UNIVERSITE DE PARIS 7 - DENIS DIDEROT
U.F.R : DIDACTIQUE DES DISCIPLINES

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée par : Frédéric PRASLON

SUJET DE LA THESE :

Continuités et ruptures dans la transition terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement.

Thèse soutenue le 14 janvier 2000 devant la commission d'examen.

JURY :

Michèle ARTIGUE	DIRECTEUR DE RECHERCHE
Yves CHEVALLARD	RAPPORTEUR
Marc ROGALSKI	RAPPORTEUR
Rémy LANGEVIN	EXAMINATEUR
Aline ROBERT	EXAMINATEUR
Marie DUFLO	INVITEE

UNIVERSITE DE PARIS 7 - DENIS DIDEROT
U.F.R : DIDACTIQUE DES DISCIPLINES

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée par : Frédéric PRASLON

SUJET DE LA THESE :

Continuités et ruptures dans la transition terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement.

Thèse soutenue le 14 janvier 2000 devant la commission d'examen.

JURY :

Michèle ARTIGUE	DIRECTEUR DE RECHERCHE
Yves CHEVALLARD	RAPPORTEUR
Marc ROGALSKI	RAPPORTEUR
Rémy LANGEVIN	EXAMINATEUR
Aline ROBERT	EXAMINATEUR
Marie DUFLO	INVITEE

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à exprimer ma reconnaissance à Michèle Artigue, directrice de ma thèse, qui, par sa grande compétence, un suivi constant et méticuleux de mon travail, et son soutien moral dans les périodes difficiles, a permis à cette recherche de se développer et d'aboutir. Au delà de ce résultat bien « tangible », je souhaite ici la remercier pour l'apport essentiel, en terme de formation, dont son encadrement m'a fait bénéficier, et dont je peux profiter au quotidien dans l'exercice de ma profession.

Je voudrais exprimer tous mes remerciements à Marc Rogalski, qui m'a guidé à l'aube de cette recherche, et m'a fourni personnellement l'occasion d'un intéressant travail au niveau de mon mémoire de DEA, en soumettant à mon analyse tout un scénario d'enseignement mené à l'université de Lille. Ce mémoire de DEA a ensuite servi de base à ce travail de thèse.
Je remercie par la même occasion Aline Robert de m'avoir orienté à l'origine vers ce travail de DEA en collaboration avec Marc Rogalski.

Je remercie Yves Chevallard et Marc Rogalski d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, et Aline Robert et Rémy Langevin d'avoir accepté de faire partie du jury en tant qu'examinateurs. Je remercie Marie Duflo, professeur dans mon université d'exercice, d'avoir accepté d'être membre de ce même jury en tant qu'invitée.

Je remercie vivement Michel Clinard, qui occupait la fonction de PRAG à l'université d'Orléans au moment où les expérimentations de mes ateliers ont eu lieu, et qui m'a reçu dans ses classes de travaux dirigés, où j'ai pu mener ces expérimentations. Il a lui-même participé à l'encadrement du travail des étudiants, selon les règles que nous avions établies ensemble.

Je remercie François Heaulme, Viviane Durand-Guerrier, Michel Clinard et Myriam Deschamps, qui m'ont fourni un certain nombre de feuilles d'exercices de DEUG Sciences, voire de polycopiés de travaux dirigés, utilisés dans leur universités respectives.
Je remercie Carlos Sacré de m'avoir envoyé l'ensemble des fiches pédagogiques de Lille remises à jour, et Jacqueline Robinet de m'avoir permis d'accéder aux feuilles d'exercices et aux sujets d'examen donnés aux étudiants à l'université de Paris 7.

Je remercie mes parents et les membres de ma famille et de mon entourage qui m'ont apporté leur soutien moral tout au long de cette thèse.

Je remercie de façon plus générale les différentes personnes qui m'ont apporté une aide et n'ont pas été citées.

INTRODUCTION DE LA THESE :

Depuis maintenant quelques années, le taux d'échec en premier cycle universitaire, qui n'a cessé de croître lors des deux dernières décennies tandis que se démocratisait largement l'accession à l'enseignement secondaire avec comme objectif, à terme, l'obtention du baccalauréat pour 80% de la population d'une classe d'âge, est devenu l'un des principaux sujets de préoccupation, non plus seulement du corps enseignant[1], mais aussi des pouvoirs publics.

A l'espoir d'une véritable démocratisation de l'enseignement et de la fin de l'élitisme du système français semble avoir succédé la réalité, au niveau du secondaire, d'une massification mal contrôlée avec une prise en compte de la seule donnée quantitative mesurée par l'obtention pour le plus grand nombre d'un baccalauréat normatif et « minimaliste », dont la crédibilité est maintenant mise en cause par la plupart des acteurs du système éducatif.

La formation dispensée dans l'enseignement secondaire ne répond plus, en termes d'apprentissages, aux besoins du supérieur[2], qui, quant à lui, ne semble pas non plus avoir produit en temps utile les efforts d'adaptation nécessaires afin de limiter l'échec d'étudiants au début du post-bac. Le malaise est d'ailleurs très général, puisqu'il atteint même les classes préparatoires. Alors qu'au début des années quatre-vingts une majorité d'étudiants de Mathématiques spéciales accédait à une école d'ingénieurs « en trois-demis »[3], la tendance s'est progressivement inversée et c'est en « cinq-demis »[4] que les étudiants de cette décennie ont le plus souvent « intégré », ce qui est le signe manifeste d'un essoufflement réel des meilleurs étudiants de l'enseignement supérieur par rapport à leurs prédécesseurs...

Les médias se font enfin, à présent, largement l'écho de cette situation d'échec à l'entrée à l'Université, au moment où l'adéquation formation - emploi est elle-même de plus en plus incertaine et problématique. Le manque de moyens humains et matériels, régulièrement dénoncé lors des grèves étudiantes, n'est qu'une composante émergente du problème, dont l'évocation seule ne peut se substituer au nécessaire débat de fond sur les apprentissages qui s'amorce toujours avec peine. Mais ces manifestations étudiantes constituent le signe bien palpable adressé à l'opinion publique du profond malaise qui secoue notre système éducatif et l'appel à une prise de conscience collective. Désormais, une réflexion en profondeur, discipline par discipline, s'avère de plus en plus cruciale, sur la façon de réduire les écarts

---

[1] Notons à ce propos, que la brochure issue de la commission Inter Irem Université, intitulée « Enseigner autrement les Mathématiques en DEUG A première année », qui se proposait d'apporter des solutions pédagogiques au problème alors déjà posé de la prise en compte du nouveau public d'étudiants, présent et à venir, date déjà de 1990.

[2] On peut notamment se reporter à ce propos à l'article écrit par M. Rogalski en 1996, et intitulé : « Le nouveau public en sciences : quels choix stratégiques ? », dans la Gazette de la SMF n°69 (p.13-43).

[3] La durée théorique de la formation dispensée en classes préparatoires scientifiques est de deux ans : une année de « Mathématiques Supérieures » et une année de « Mathématiques Spéciales ». On dit d'un étudiant qui réussit le concours d'une école d'ingénieurs et rentre dans cette école au terme de ces deux années qu'il a « intégré en trois-demis ».

[4] Se dit d'un étudiant qui redouble l'année de « Mathématiques Spéciales » (le redoublement de cette seconde année seulement étant autorisé).

entre les formations apportées par les deux institutions, du secondaire et supérieur, réflexion à mener conjointement d'un côté comme de l'autre au sein de ces deux institutions.

Probablement est-ce en Mathématiques que l'évolution de l'enseignement secondaire s'est faite le plus sentir. Après la réforme dite « des mathématiques modernes », qui s'est révélée rapidement trop élitiste dans ses exigences d'apprentissage, surtout en contrepoint de la démocratisation de l'enseignement secondaire et face à une pression énorme de l'opinion publique (les parents d'élèves) due aux enjeux sociaux exorbitants liés à cette discipline (« la sélection par les maths »), la filière scientifique a subi une suite de réformes de plus en plus rapprochées à partir des années quatre-vingts, pour une révision complète des contenus et des exigences dans les apprentissages. Plus récemment (1994) cette filière scientifique à forte dominante mathématique a fait place à une filière plus généraliste avec enseignements optionnels. La raison officielle de cette réforme était de mieux répondre à la fois aux besoins diversifiés de la société et aux goûts et aptitudes variés du public d'élèves de lycée, mais un autre objectif était sans doute de résorber cette source de tension sociale en décernant un même diplôme du baccalauréat « labellisé scientifique » à des élèves qui n'étaient pas tous capables de suivre un enseignement soutenu en Mathématiques. En tous cas, bien qu'une réduction des exigences ait déjà été amorcée auparavant, il apparaît assez nettement que cette ultime évolution a constitué l'occasion d'un nouvel infléchissement dans ce sens.

Cependant, à l'intérieur même des Mathématiques, l'étude des ruptures intervenant dans l'enseignement de l'Analyse entre le lycée et l'Université, pour des filières scientifiques, qui sera dans cette thèse objet de notre investigation, est particulièrement intéressante dans la mesure où elle nécessite une observation fine, très éloignée des caricatures un peu faciles auxquelles il est toujours tentant de se laisser aller, sur ce thème de la transition entre le secondaire et le supérieur, vu les difficultés actuellement rencontrées. En effet, s'il est exact qu'une Analyse très formalisée, notamment relative aux notions de continuité et de limite des fonctions numériques, n'est plus à l'ordre du jour des programmes du secondaire depuis maintenant assez longtemps, il n'en demeure pas moins que les enseignements actuels du lycée font encore la part belle, au sein des Mathématiques, à ce domaine de l'Analyse[5]. Ils lui donnent même souvent un relief particulier permettant le développement chez l'élève de savoir-faire (encadrements, calculs de limites par le théorème dit « des gendarmes »...), voire même de connaissances (suites récurrentes, équations différentielles...) qui n'étaient pas, dans l'enseignement reçu par leurs aînés, mis en exergue pareillement au sein d'une Analyse plus formelle.

En outre, l'évolution des savoirs et des pratiques en Analyse dans la transition entre le secondaire et le supérieur, qu'elle concerne des bouleversements importants (passage d'une Analyse admise à une Analyse démontrée, et au stade formel[6]) ou des ruptures plus fines (concernant les niveaux d'autonomie sollicités, par exemple), ne se fait pas en un jour et suppose un minimum d'adaptations de l'enseignement supérieur (notamment au niveau de l'évaluation) qui, par la force des choses, mettent en lumière non plus seulement des ruptures, mais aussi des continuités entre les deux niveaux d'enseignement. Le choix d'un objet d'étude

[5] L'enseignement de l'Algèbre, lui, s'est plus considérablement réduit, avec notamment la disparition complète des programmes de l'Algèbre linéaire.

[6] Ils risquent d'ailleurs, dans ce cas, de se limiter au cours magistral et de ne pas être beaucoup repris à l'occasion des travaux dirigés.

-la dérivée- plus particulier de l'Analyse, qui a été fait dans cette thèse, correspond à une notion fondamentale largement explorée et exploitée au lycée (en classes de premières et de terminales scientifiques), puis en première année de DEUG A, et se prête donc dans cette mesure tout particulièrement à une étude fine de ces ruptures et continuités entre les deux niveaux.

Enfin, il convient de souligner que, par définition même, la transition institutionnelle entre terminale scientifique et première année de DEUG Sciences était déjà par le passé génératrice d'évolutions sensibles, ce dont il faudra nécessairement tenir compte afin de les discerner de facteurs de rupture plus récents, pour bien comprendre en quoi et pourquoi les écarts entre le secondaire et l'Université, encore hier acceptables, constituent aujourd'hui un fossé qui s'est creusé au fil du temps pour atteindre à présent des proportions inquiétantes...

POINT DE DEPART ET ORGANISATION GENERALE DE LA THESE :

Cette thèse s'inscrit comme conséquence de notre mémoire de D.E.A, réalisé en 1994, qui portait sur l'étude de l'aspect « méta » dans une séquence d'enseignement en DEUG A relative à la dérivation et réalisée à l'Université de Lille sous la direction de M.Rogalski. Nous avons pu mesurer dans ce mémoire, le décalage très grand entre : d'une part, une pratique de l'Analyse, exposée au travers du discours de l'enseignant en cours magistral, un peu « idéale » vis à vis de motivations externes de l'enseignement supérieur[7], et d'autre part, une culture issue du secondaire, avec laquelle il convient de composer en début de DEUG A, marquée par des repères très différents (application de théorèmes et d'algorithmes standards, notamment). Imprécisions, contresens, erreurs d'interprétation jalonnaient les notes de cours manuscrites et fiches de synthèse observées dans ce mémoire, d'ailleurs essentiellement constituées de « formules » souvent non reliées entre elles et plaquées sans explications, que ces dernières soient, ou non, en rapport avec le discours méta de l'enseignant.

L'objectif nouveau de cette thèse est donc à présent de mieux cerner les éléments précis de cette transition entre secondaire (terminales scientifiques) et supérieur (DEUG Sciences ou DEUG A), à divers niveaux : conceptuels et techniques, personnels et institutionnels, en allant peu à peu du général au particulier, et notamment des Mathématiques à l'Analyse, et de l'Analyse perçue dans sa globalité à la notion de dérivée. Dans le chapitre I de cette thèse, nous présenterons un certain nombre de cadres théoriques connus, nous permettant de préciser diverses pistes d'investigation, puis d'isoler et d'étayer des hypothèses générales. La méthodologie générale de recherche adoptée sera ensuite plus strictement définie au sein du chapitre II. Au moyen d'une grille d'analyse des manuels et des feuilles de travaux dirigés, construite à partir de la considération des cadres théoriques précédents, et selon une méthodologie qui sera précisée (chapitre III), nous pourrons alors mieux jauger les rapports institutionnels réels à la notion de dérivée, au lycée (chapitre IV) et à l'université (chapitre V).

[7] Initialiser l'apprentissage de méthodes et d'idées qualitatives assez universelles dans ce domaine de l'Analyse, se situer à un niveau de formalisation et de généralité nouveau, permettant notamment de conjecture, etc...

C'est au sein du chapitre VI (présentation de tests soumis aux étudiants de l'université de Marne-la-Vallée, à l'entrée en première année de DEUG A, et analyse des résultats obtenus à ces tests) que seront étudiés, pour confrontation, les rapports personnels de ces (futurs) étudiants au savoir en jeu à la transition entre les deux institutions. Enfin, des ateliers, prenant place en cours de première année de DEUG, et visant à mieux comprendre les difficultés des étudiants dans cette transition entre secondaire et supérieur, avec la perspective d'élaboration d'ingénieries didactiques futures, seront présentés (chapitre VII), ainsi que les résultats (chapitre VIII) des expérimentations enregistrées correspondantes qui ont été déjà menées dans deux universités différentes (Orléans et Marne-la-Vallée). En conclusion (chapitre IX), nous tenterons de synthétiser les leçons que nous avons retirées de ces diverses sources d'information, et de soumettre quelques perspectives nouvelles.

Notons ici que notre étude concerne la période 1994-1998 durant laquelle s'est effectuée cette recherche, et se fonde donc, au niveau de l'institution du lycée, sur le seul programme de terminale scientifique paru au bulletin officiel n°7 du 7 juillet 1994. Elle ne tient pas compte des modifications liées au nouveau programme, qui est en vigueur depuis la rentrée scolaire 1998. Ces modifications portent essentiellement, en Analyse, sur la suppression, en classes de terminales S, de la notion de continuité et de la résolution générale des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants, d'ordre 2 (remplacée par l'étude de la seule équation $y'' + \omega^2 y = 0$).

CHAPITRE I : COMPOSANTES DE L'EVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ET PLUS SPECIALEMENT DE L'ANALYSE ENTRE TERMINALE S ET DEUG A.

I/ ORGANISATION GENERALE DE CE CHAPITRE THEORIQUE.

Dans ce qui suit, nous commencerons par présenter (partie II) quelques généralités concernant les problèmes liés à la transition institutionnelle entre terminale S et DEUG A, généralités applicables à l'ensemble de la formation scientifique dispensée.

Puis nous aborderons (partie III) les points de ruptures au sein de cette transition, en Mathématiques et plus particulièrement en Analyse, en commençant par les ruptures de nature plus spécifiquement « conceptuelle », avant d'aborder les ruptures plutôt liées aux pratiques mathématiques des élèves et des étudiants au sein des deux institutions (tout en regardant comment ces pratiques s'articulent avec des questions d'ordre conceptuel). Concernant ces ruptures pointées, nous distinguerons celles qui touchent proprement à l'Analyse et celles, plus nombreuses, qui touchent à l'ensemble du champ mathématique étudié, pour lesquelles nous nous efforcerons cependant, de présenter essentiellement des exemples appartenant au domaine de l'Analyse, voire concernant la dérivation. Deux types d'évolution sont envisageables, qu'il convient de distinguer : celles qui sont d'une nature nouvelle, spécifique de la transition entre « Terminale S » et « DEUG A », que l'on peut identifier comme de « véritables ruptures », et des évolutions plus courantes, qualitativement du même type que celles que l'on recenser dans le passage d'une classe de lycée à la suivante, mais qui, cumulées aux autres, participent ainsi à l'élargissement de *la* rupture.

Nous analyserons ensuite les influences socioculturelles et institutionnelles sur l'ampleur de ces ruptures indépendamment des contenus à enseigner. De telles considérations aboutissent naturellement à cerner plus strictement les ruptures que nous pouvons considérer comme « intrinsèques » au savoir en jeu, et donc à nuancer leur influence réelle dans le paysage constitué au niveau universitaire.

II/ CARACTERES GENERAUX DE LA TRANSITION INSTITUTIONNELLE.

A/ LES DIFFICULTES INHERENTES A LA DEMOCRATISATION DE L'ENSEIGNEMENT.

Il est important de signaler, tout d'abord, que la filière scientifique a occupé une place tout à fait privilégiée au sein de ce phénomène de démocratisation massive de l'enseignement secondaire, avec une nette augmentation du nombre de ses élèves à partir de 1988. La raison en est simple : il s'agissait de prendre en compte le besoin grandissant de la société française en très nombreux techniciens, ingénieurs et chercheurs.

Cela signifie que cette mesure, qui répondait à une nécessité immédiate, mal anticipée, s'est prise, pour une large part, dans l'urgence par rapport à la réflexion nécessaire, à mener en parallèle, en termes de moyens pédagogiques adaptés à cet objectif. Le grand débat, en Mathématiques, qui s'est instauré assez largement au sein de l'institution universitaire, suite à la réforme des DEUG, et a débouché notamment sur les colloques de Nice (mai 1986 et mai 1987), le colloque Inter-Irem de Rennes (novembre 1987) et les réunions de Jussieu, a précédé d'ailleurs de peu cette augmentation des effectifs.

C'est dans ce contexte que l'enseignement secondaire s'est trouvé alors confronté au défi suivant : tout en continuant à assumer les fonctions qui étaient les siennes jusqu'alors (en particulier, apporter une formation générale de base), être capable de faire face au dédoublement des objectifs résultant de cette démocratisation, avec la préparation d'un baccalauréat adapté au plus grand nombre d'une part, et la formation en vue d'études supérieures plus spécialisées d'autre part. Pour l'enseignement secondaire, arriver à « tenir » en même temps ces deux critères, d'ordres quantitatif et qualitatif n'était sans doute pas, dans l'absolu, chose impossible. D'autant que respecter des critères qualitatifs ne consiste pas à focaliser l'effort porté sur l'apprentissage d'un grand nombre de savoirs formels et théoriques, mais plutôt à former l'apprenant d'une façon plus transversale, visant à développer son sens critique, sa réflexion personnelle et son auto-contrôle face aux contenus enseignés[1]. Mais cela supposait une concertation générale assez longue, à la fois à l'intérieur de l'institution universitaire et entre les diverses institutions.

Il est certes exact que l'augmentation du nombre d'élèves et d'étudiants ne s'est pas généralisée uniformément à toutes les institutions du jour au lendemain. Mais elle s'est propagée comme une onde de choc, du collège au lycée, puis à l'université, masquant aux acteurs de l'institution située en aval (l'université), sans doute du fait même de cette progressivité, la portée et les conséquences réelles (à terme) du phénomène, dont il était donc difficile de prendre d'emblée la mesure.

B/ DU LYCEE A L'UNIVERSITE : PROBLEMES RECURRENTS ET FACTEURS D'AGGRAVATION PLUS ACTUELS.

On ne peut occulter ici certains aspects « classiques » du changement d'institution, que nous rappelons succinctement : passage à l'âge adulte, prise d'autonomie vis à vis de l'univers familial, changements dans les habitudes de vie (concernant le lieu d'habitation, par exemple), et nécessité éventuelle de trouver un travail pour aider à financer ses études, etc... Cette période, où le futur étudiant est dans l'attente de quelque chose de nouveau, comporte souvent une part d'euphorie succédant à l'obtention du baccalauréat et il n'est pas rare que le jeune subisse d'ailleurs une certaine décompression, suite à ce succès et à la tension subie au moment de l'examen. Cependant, un certain décalage aujourd'hui consommé entre, d'une part les potentialités d'apprentissage en terminales scientifiques, et d'autre part, les exigences réduites et normatives de l'épreuve du baccalauréat (liées au fait que ce diplôme est destiné à être attribué massivement) font de ce succès en trompe-l'œil, parfois inespéré par les

[1] Comme le suggèrent d'ailleurs les directives générales présentées au début des programmes officiels actuels. Mais des « bonnes » intentions générales exprimées, à la réalité du terrain, on constate une distorsion énorme.

candidats eux-mêmes, un leurre nouveau et dangereux dans la perspective de ce qui les attend au niveau post-bac.

La réussite des études à l'université a toujours été plus ou moins conditionnée par la capacité du jeune qui les entreprend, à faire rapidement preuve d'une maturité nouvelle, et à « se prendre en mains », pour acquérir une certaine autonomie dans son travail (autant que dans sa vie matérielle), et ne pas « tout attendre » des enseignants. Dans cette perspective, l'enseignement secondaire, aujourd'hui fortement influencé par des épreuves du baccalauréat très guidées et stéréotypées, prépare peu à cette autonomie souhaitée, censée amener le jeune à entrer plus naturellement dans le monde adulte via une responsabilisation et une liberté accrues.

La perte de repères la plus significative à l'entrée à l'université concerne précisément l'organisation du travail personnel, très dirigé au lycée, et qui est soudainement beaucoup moins suivi dans l'enseignement supérieur, avec une difficulté pour l'étudiant à anticiper les exigences attendues (moins ciblées qu'auparavant), et conséquemment, une difficulté à interpréter une baisse des résultats. C'est en tous cas ce que révèle une enquête effectuée auprès d'étudiants de l'académie de Toulouse, se situant à des niveaux Bac+1, Bac+2 et Bac+4, dont les résultats nous sont présentés par le « noosphérien » Jean Aymes, dans son article « Bac : passage ou rupture ? », publié dans « la gazette des mathématiciens » (n°69 de juillet 1996). Dans cette même enquête, les étudiants expriment que cet évanouissement des repères anciens provient aussi du caractère plus abstrait de ce qui est enseigné, conjugué à une relation plus distante à l'enseignant et un certain défaut de communication ressentis par le public actuel de DEUG comme un obstacle à leur insertion dans l'université et interprétés comme un manque d'intérêt de la part de ces enseignants. Il leur semble également que certains enseignants à l'université s'appuient sur des connaissances allant au-delà des exigences du lycée[2]. Les références à l'enseignement secondaire et la prise en compte de ses spécificités (notamment en termes d'objectifs) apparaissent incertaines.

Aux difficultés purement techniques s'ajoutent rapidement des problèmes d'ordre psychologique ; l'importance du taux d'échec en DEUG est aujourd'hui un fait connu des étudiants, rapporté par les médias, que ne font souvent que confirmer les premiers résultats obtenus. Dans cette morosité ambiante, qui accroît la sensibilité des étudiants, les mises en garde des enseignants du supérieur ont parfois un effet contraire de découragement. Il est certes exact que le taux d'échec en première année de DEUG était tout aussi élevé (voire même, le plus souvent, plus élevé) à d'autres époques : M.Bornancin, de l'association « Promosciences », rapportait par exemple, lors du colloque de Rennes (1987), que les pourcentages de reçus en première année de DEUG A et B, rapportés au nombre de présents à l'examen[3], pour douze universités pourtant engagées très tôt dans le mouvement de rénovation du DEUG restaient de l'ordre de 46% à 48% entre 1983 et 1985. Mais la massification actuelle de l'enseignement supérieur fait aujourd'hui de l'amélioration des taux de succès un enjeu crucial, tout en rendant naturellement cette amélioration aussi plus

[2] Facteur plutôt récent. Les réformes successives de plus en plus rapprochées, avec des évolutions de programme de plus en plus ténues, n'ont sans doute pas arrangé les choses.
[3] Compte tenu du nombre encore assez important d'absents à l'examen final, ce taux était nettement inférieur une fois rapporté au nombre d'étudiants inscrits, de l'ordre de 37% à 39%.

délicate. Le glissement vers une « secondarisation » du DEUG semble dès lors difficile à éviter.

C/ DE L'ELEVE A L'ETUDIANT : UNE MUTATION PROBLEMATIQUE.

Certaines universités (Orsay, Marne-la-Vallée...) proposent depuis déjà quelques années à ces nouveaux étudiants des tests de niveau ou des séances de tutorat au mois de septembre. La signification et la finalité de ces tests sont- elles toujours bien comprises par eux ? En effet, d'une part de tels tests ne peuvent revêtir aucun caractère obligatoire compte tenu du mode de recrutement retenu à l'université. Et d'autre part, concernant ce système de tutorat, il ne peut s'agir, dans l'esprit, d'une « mise à niveau » puisque, validés par leur succès à un examen national très officiel, ces futurs étudiants sont fort peu enclins à concevoir que des manques purement *actuels* puissent mettre en cause *d'emblée*, avant même d'entrer en première année de DEUG, la réussite de leurs études supérieures. Certains enseignants, notamment Myriam Deschamps, professeur de Mathématiques à l'université d'Orsay, constatent cependant que les résultats obtenus au test d'entrée proposé au mois de septembre corroborent largement les résultats finaux à l'examen de DEUG première année[4]. Les évaluations suivantes, obligatoires celles là, mais beaucoup moins fréquentes qu'au lycée (d'où une difficulté à se situer pour l'étudiant), viennent généralement bien plus tard pour sanctionner souvent un échec alors en partie déjà consommé.

En classes préparatoires, l'effondrement des notes accompagnant la transition avec le secondaire est beaucoup plus spectaculaire qu'il y a quelques années. L'étudiant doit alors trouver en lui-même les ressources morales pour affronter cette situation et la maturité lui permettant de relativiser ses résultats (le classement comptant davantage en classes préparatoires que les notes brutes). Et dans les universités, la fréquence plus faible qu'au lycée des évaluations (qui ont aussi une valeur formative) constitue également une source de difficulté pour les étudiants, du fait de la nature nouvelle des objectifs d'apprentissage, à tel point que bon nombre de ces universités ont tenté et tentent encore d'instaurer des systèmes de contrôle continu de plus en plus soutenus, remplaçant celui, plus traditionnel, des partiels, ou se cumulant à lui.

Enfin, et c'est là aussi un facteur d'évolution tout à fait déterminant de la transition secondaire/supérieur, la situation actuelle du marché du travail pose de façon cruciale la question des *débouchés* de cet enseignement de masse, et concourt à ce que les étudiants se sentent un peu désorientés face aux choix qu'ils ont à faire et aient le sentiment de ne plus guère avoir de droit à l'erreur ni dans ces choix, ni dans le déroulement de leurs études comme c'était le cas en des temps plus prospères.

Dans ce contexte de crispation, tout s'accélère et le système semble parfois s'emballer. Ainsi, la réforme récente du DEUG a abouti à la généralisation en France d'une organisation par semestres, avec un premier semestre qualifié (pudiquement ?) de « semestre d'orientation »,

[4] Cela est à mettre en rapport avec l'hypothèse dite « des blocs » vérifiée dans les travaux de Robert et Boschet (1984) : suite à un test effectué à l'entrée à l'université, il s'avère que les étudiants qui ont les meilleures performances en cours d'année sont ceux qui avaient en début d'année suffisamment de connaissances dans suffisamment de cadres (algébrique, graphique, numérique...). Cahiers de Didactique des Mathématiques n°18, Université de Paris 7, Didirem.

au terme duquel les étudiants sont invités à faire le point sur l'adéquation entre leurs capacités avérées et la formation pour laquelle ils ont opté. Un semestre, pour un étudiant entrant à l'université, avec tous les problèmes initiaux d'adaptation que cela suppose, c'est vraiment très court[5], d'autant qu'il conviendrait sans doute de parler plutôt de trimestre puisque, « grosso-modo », à Noël tout est joué, les examens du premier semestre se situant généralement en janvier ou en février[6]. Comment demander à l'étudiant de DEUG de porter aussi rapidement un regard lucide sur ses possibilités, pour effectuer les meilleurs choix en fonction de ces possibilités ?

D/ ADAPTATION, EQUITE ET LISIBILITE DU SYSTEME EDUCATIF : UN AVENIR INCERTAIN.

Aujourd'hui, ce sont des exigences nouvelles de la société, en termes de niveaux de qualification et de compétitivité, que le système éducatif doit pouvoir satisfaire rapidement. Comment concilier une mission de formation et d'instruction générale avec les contraintes imposées par un besoin de spécialisation plus rapide et effectif ? En outre, on ne demande plus seulement aux jeunes diplômés de posséder des connaissances, mais aussi d'être adaptable, de faire preuve d'initiative, et d'avoir des capacités de compréhension de l'évolution du monde. Comment l'école peut-elle répondre à cet enjeu ? Dans ce contexte, chaque discipline enseignée peut-elle continuer à fonctionner en vase clos ?

Devant toutes ces questions, on constate que l'enseignement secondaire, comme l'enseignement supérieur, « se renvoient la balle » sans vraiment développer de part et d'autre les qualités d'initiative, de réflexion, de créativité et d'aptitude au travail collectif réclamées par le monde de l'entreprise. Le débat classique sur le « niveau » des étudiants ou les contenus disciplinaires des programmes reste encore très présent, là où une discussion de fond sur la méthode s'imposerait, les représentants de l'université se contentant souvent de préconiser une révision à la hausse des exigences du lycée et leurs vis à vis du secondaire leur reprochant de trop ignorer le passé des étudiants. De ce point de vue, les deux institutions se rejoignent, hélas, et l'on peut, en un certain sens, parler ici de « continuités » dans le passage de l'une à l'autre, l'éveil des étudiants à des activités de recherche, qui devrait logiquement constituer une préoccupation première des enseignants-chercheurs à l'université, restant un vain mot. Les exigences du niveau DEUG, même si elles concernent des savoirs et des savoir-faire plus complexes qu'au lycée, restent dans le même esprit, notamment au niveau des évaluations, et l'énergie des étudiants est investie pour l'essentiel dans l'acquisition de savoirs formels et de techniques.

Effectuant ce constat depuis de longues années, Marc Legrand tente, dans son « premier cours en amphithéâtre »[7], de faire comprendre dès le premier jour aux étudiants inscrits en première

[5] Même si, pour les enseignants intervenant en travaux dirigés, l'échec futur de certains étudiants ne fait déjà plus de doute au bout de quelques semaines.
[6] De plus, ce découpage en semestres s'avère incompatible, selon M.Legrand, maitre de conférence à l'université de Grenoble, avec un apprentissage cohérent et l'instauration d'un contrat avec les étudiants, visant une avancée qualitative réelle par rapport à la pratique mathématique.
[7] Retranscrit dans la brochure « Enseigner autrement les Mathématiques en DEUG A première année », ce cours date déjà de 1987 (le problème n'est pas nouveau) et sert d'introduction à l'ensemble des enseignements d'une section pilote de DEUG A.

année de DEUG Sciences, l'intérêt qu'il peut y avoir pour eux à se forger des méthodes de travail, à ne pas se limiter à absorber des connaissances, mais plutôt à apprendre à apprendre, dans un monde qui évolue trop vite pour que l'on sache exactement de quelles compétences professionnelles[8] on aura besoin dans cinq ou dix ans. Il préconise une formule de « débat scientifique en cours[9] », qu'il a expérimentée lui-même avec ses étudiants de DEUG A, se substituant en partie au cours magistral classique, et permettant aux étudiants de faire appel à leurs qualités propres de réflexion, d'imagination et de sens critique, pour construire par eux-mêmes, activement et collectivement, le cours, au moyen d'un débat contradictoire que l'enseignant ne fait que guider et canaliser habilement. Ce dispositif se met en place[10] dans le cadre d'un contrat didactique[11] que Marc Legrand qualifie lui-même « d'ontologiquement démocratique », c'est à dire, selon ses propres mots : *« ... dans lequel professeur et élève désirent partager un rapport au savoir de même nature ; le professeur n'est plus le seul garant de la vérité et de la pertinence, il partage cette responsabilité avec ses élèves, il devient co-responsable du sens que ces derniers construisent sur son savoir... »*. Par opposition, il qualifie de contrat « formellement démocratique », celui dans lequel le professeur « *dit le savoir* » et l'élève l'apprend, celui dans lequel *« le professeur expose, ordonne et juge, il est le garant de la vérité et de la pertinence tandis que l'élève écoute, imite et manipule, pour mettre en application »*[12].

On s'aperçoit aujourd'hui que le phénomène de massification de l'enseignement secondaire, puis maintenant de l'enseignement supérieur, dans sa forme actuelle de développement, s'il s'opère selon une certaine continuité (forcée), rentre en conflit avec une véritable démocratisation -bien comprise- des études.

En effet, dans la mesure où les apprentissages du lycée, puis, à présent de plus en plus, par un phénomène amorcé de secondarisation du DEUG, ceux de l'université, se résument à la répétition de savoirs généraux et à la reproduction de techniques standards, un profond fossé se creuse entre l'université pour tous (ou des classes préparatoires de second rang, qui se sont multipliées, notamment en banlieue parisienne) et le haut de la pyramide (les classes préparatoires des grands lycées parisiens et provinciaux). Ce phénomène trouve maintenant sa plus parfaite illustration dans ce que les médias et les politiques appellent la « panne de l'ascenseur social ». Bien loin d'apporter l'égalité des chances, le système actuel a donc donné naissance à une forme nouvelle d'élitisme, plus exclusif encore, fondé parfois sur des critères tels que le lieu d'habitation (principe de la sectorisation), qui n'ont même plus rien à voir avec les capacités réelles des étudiants, qu'elles résultent ou non d'une position socioculturelle favorisée. Car devant les incertitudes concernant le marché de l'emploi, certains lycées possédant des classes préparatoires n'hésitent pas, au niveau du secondaire, lorsqu'ils en ont les moyens (en terme de public), à déroger aux programmes pour favoriser leurs élèves dans la perspective future de concours, pratiquant de surcroît une sélection

---

[8] Il leur rappelle, à ce titre, que très peu d'entre eux feront un jour des Mathématiques ou de la Physique de façon professionnelle, bien que ce soient les deux disciplines auxquelles ils consacrent le plus de temps actuellement.
[9] Dans la même brochure.
[10] Voir la retranscription du « premier cours en amphithéâtre ».
[11] Notion due à G. Brousseau en 1980 : c'est l'ensemble des comportements spécifiques du maître qui sont attendus de l'élève, et de ceux de l'élève qui sont attendus du maître.
[12]Pour de plus amples développements, lire l'article intitulé : « Mathématiques, mythe ou réalité : un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique. », Marc Legrand, juillet 1995, Repères IREM n°20&21.

préférentielle au niveau post-bac. Ainsi, de très bons étudiants se trouvent pénalisés lorsqu'ils ont effectué leurs études secondaires dans un établissement qui respecte les programmes.

Pour prendre un exemple plus particulier, le choix de l'enseignement de spécialité en terminale scientifique n'est pas toujours indifférent vis à vis des chances qu'il peut procurer d'être admis en classes préparatoires[13], car l'option « Mathématiques » est d'un point de vue qualitatif la plus exigeante (avec des chapitres de géométrie[14], donc une approche du raisonnement aussi plus poussée), et correspond alors au profil d'élève le plus recherché. Au système ancien, très élitiste, semblent donc s'être substitués de nouveaux modes de sélection en mathématiques et en sciences, parfois plus iniques encore, qui nécessitent d'être initié à certaines « subtilités » nouvelles d'un système éducatif qu'il faut de plus en plus savoir décrypter, au-delà de certains leurres tels que la réussite au baccalauréat.

III/ DIFFERENTS POINTS DE RUPTURE EN MATHEMATIQUE, ET PLUS PARTICULIEREMENT DANS LE DOMAINE DE L'ANALYSE.

A/ PRESENTATION GENERALE.

Nous ayant préalablement fixé comme objectif de dégager diverses ruptures de nature « conceptuelle » dans la transition secondaire / supérieur, nous nous appuierons d'abord, pour cela, sur les travaux d'A.Robert concernant l'influence de l'évolution du niveau de généralisation ou de formalisation en DEUG, les notions de « niveaux de conceptualisation », de concept généralisateur, unificateur, formalisateur (paragraphe B), et sur les travaux de certains auteurs anglo-saxons (D.Tall, A.Sfard, Ed.Dubinsky), ayant trait à la transition processus / objet (paragraphe C). Nous réaliserons alors (au paragraphe D) un cadrage plus particulier sur l'évolution de l'enseignement de l'Analyse (au niveau conceptuel) entre secondaire et supérieur, en nous appuyant notamment sur les travaux de M.Artigue, M.Legrand, M.Schneider.
Le cadre théorique défini par Y.Chevallard (approches anthropologique et écologique des savoirs, organisation praxéologique en système de tâches, techniques, technologies, théories) nous servira dans la partie suivante (paragraphe E) à « planter le décor » pour une analyse des ruptures se présentant plutôt en termes de *pratiques institutionnelles* (en interaction avec les aspects plus « conceptuels »). Nous reviendrons sur l'identification des dimensions « outil » et « objet » définies par R.Douady, qui nous semble essentielle à cet égard, tandis que les notions de « cadres » (R.Douady), de « registres sémiotiques » (R.Duval) et de « points de vue » (A.Robert & I.Tenaud, C.Castela, M.Rogalski) nous permettront de mieux appréhender certaines dimensions d'une « flexibilité cognitive » (D.Tall & T.Dreyfus) dont le besoin se modifie en DEUG A, dans la résolution d'exercices ou de problèmes (paragraphe F). Les notions de niveaux de mise en fonctionnement « technique », « mobilisable » et « disponible » des connaissances pour une « réorganisation nécessaire de ces connaissances » en DEUG (A.Robert) seront également évoquées dans ce paragraphe. Nous aborderons

---

[13] Ce que peu de gens savent. Propos rapportés de la commission nationale du CI2U qui travaille sur le problème de la transition secondaire/supérieur.
[14] Et d'arithmétique depuis l'année dernière, suite au nouveau programme de terminale S, élaboré en 1998.

ensuite (paragraphe G) la question des « méthodes » avec des références aux écrits de Robert, Tenaud et Rogalski.

B/ QUELQUES RUPTURES CONCEPTUELLES DETERMINANTES.

1°) Introduction.

Nous pouvons isoler trois aspects spécifiques de l'évolution du contenu théorique (autrement dit, du « cours ») enseigné en Mathématiques entre terminale S et DEUG A (première année), qui, considérés conjointement, permettent une première approche de certaines ruptures conceptuelles. Ces aspects, en interaction dialectique les uns avec les autres, sont les suivants :

- L'augmentation du degré de généralisation et de formalisation des notions,
- L'augmentation du nombre et de la complexité des définitions et des énoncés,
- Le passage d'énoncés admis à des énoncés démontrés.

Dans ce qui suit, nous allons donc tenter de détailler des éléments d'analyse des difficultés conceptuelles nouvelles, intervenant au niveau universitaire, en lien avec ces trois aspects.

2°) Différentes facettes d'une augmentation du degré de généralisation, en lien avec les problèmes de conceptualisation.

Alors que les quelques définitions et énoncés présentés dans le cours de terminale sont seulement destinés à être appliqués isolément dans des situations particulières (études de fonctions ou de suites usuelles), on est souvent amené en DEUG à les réinvestir pour étudier des classes de fonctions et de suites, ce qui engendre alors d'autres énoncés généraux, etc... Par exemple, dans un cours de DEUG A sur le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis, on présente généralement en application la démonstration du théorème de monotonie, la « règle du marquis de l'Hospital » ou le théorème qui affirme que, sous certaines hypothèses (*générales*), la limite du taux d'accroissement d'une fonction en un point est égale à celle de la fonction dérivée en ce point (si cette dernière existe). Ainsi, l'entrée dans une analyse démontrée est-elle aussi à la base d'un tissu d'énoncés généraux, bien agencés et reliés les uns aux autres, là où auparavant des connaissances générales en nombre restreint, éparses, avaient chacune leur champ d'utilisation bien limité ; en cela, l'augmentation du degré de généralité est source de difficultés conceptuelles spécifiques, puisqu'il doit s'accompagner d'une organisation et d'une structuration nouvelles des connaissances pour l'étudiant, *intégrant* les connaissances anciennes disséminées. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette question de *l'organisation des connaissances*, dégagée (notamment) par A.Robert[1], lors de notre analyse des difficultés liées à la transition secondaire / supérieur au niveau de l'articulation entre théorie et pratique mathématique courante (paragraphe F).

Notons cependant encore ici que cette organisation nouvelle des connaissances jette des ponts entre des domaines jusqu'alors déconnectés dans l'enseignement reçu au lycée, ce qui

[1] In « Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université », Recherches en didactique de mathématiques, Vol.18/2, p139-p189, 1998.

occasionne un saut conceptuel bien identifiable. Par exemple, la notion de borne supérieure dans R prend tout son intérêt en première année de DEUG A au moment de l'introduction du théorème de convergence monotone sur les suites numériques.

Cependant, ce travail sur des classes d'objets plus généraux, qui vise à décrire une partie plus grande de la complexité mathématique réelle, non seulement tend pour cela à multiplier les énoncés et les définitions nouvelles, mais suppose aussi au niveau de la conceptualisation une identification plus précise des notions. Par exemple, en terminale S, on dispose de ce que A.Robert appelle un *« gros théorème »*[2] pour conclure à la fois à l'existence et à l'unicité d'une racine à l'équation f(x) = 0, et au caractère bijectif de l'application f définie sur un intervalle I de R à valeurs dans f(I) : il suffit, selon ce théorème, de vérifier que f , ici une fonction numérique *particulière*, est continue et strictement monotone sur I. Nul besoin de « *démêler les différents arguments* »[3] (théorème des valeurs intermédiaires pour l'existence de la solution, stricte monotonie pour l'unicité...), qui concourent à ce résultat, ni même de savoir précisément ce qu'est une bijection (dans le cas le plus *général*). En DEUG A, la considération de situations plus générales nécessite l'identification de telles raisons, donc la connaissance des énoncés généraux sous-jacents ou le recours à des notions nouvelles (injectivité, surjectivité).

Enfin, une notion peut présenter en elle-même, selon A.Robert, un certain *degré de généralisation* par rapport à des notions antérieures.

Il peut s'agir de : « [...] généralisations simples d'autres notions déjà introduites, ne nécessitant en particulier aucun formalisme nouveau pour leur introduction (à part l'extension du domaine de validité du formalisme déjà en place). » [ibid., p.161].
«[...] D'autres notions présentent au contraire un grand degré de généralisation par rapport aux notions déjà enseignées qui s'y rapportent. » [ibid., p.161].

De telles notions peuvent aussi posséder un *caractère unificateur* par rapport à certaines notions antérieures, ou permettre de résoudre de nouveaux problèmes, ou bien d'anciens problèmes mais de façon différente :

« Nous distinguons notamment le fait que la notion permette d'apporter une réponse à un problème précis, qu'on peut énoncer mais non résoudre avec leurs connaissances antérieures, ou au contraire le fait qu'elle permette d'aborder autrement certains problèmes, et de les résoudre dans un formalisme nouveau, sans réelle continuité avec les résolutions antérieures (si elles étaient possibles). » [ibid., p.162].

Les sauts conceptuels à attendre dépendent donc à la fois de toutes ces variables, et certaines notions, telles que la notion de limite étudiée en DEUG A, possèdent en même temps un caractère généralisateur et unificateur, peuvent permettre de résoudre de nouveaux problèmes (plus « théoriques »), et correspondent à l'introduction d'un nouveau formalisme. Nous reviendrons sur de telles notions un peu plus loin, qui sont le plus en rupture, du point de vue conceptuel, avec les connaissances antérieures du lycée.

Cependant, il convient de préciser que les variables exposées ci-dessus ne suffisent sans doute pas à décrire parfaitement les ruptures conceptuelles liées à l'introduction d'une notion nouvelle. Ainsi, la notion de développement limité d'ordre n, étudiée en DEUG A, généralise, a priori de façon très simple et ordinaire, celle de développement limité d'ordre 1 vue en classe de première, en permettant également le calcul de nouvelles limites, mais ne

[2] Ibid.
[3] Ibid.

s'accompagne d'aucun formalisme nouveau et n'amène pas une unification de connaissances anciennes. Mais une nouvelle variable est ici à tenir en considération pour l'évaluation du saut conceptuel à envisager : le degré de familiarisation à une notion ancienne. Car la notion de développement limité d'ordre 1 en un point, bien que figurant officiellement aux programmes de premières et de terminales scientifiques, reste assez marginale au niveau de ces classes du fait qu'elle équivaut à une définition commode, par limite du taux d'accroissement, de la dérivabilité en ce point, ce qui rend l'introduction en DEUG A de la notion de développement limité d'ordre n moins « naturelle » que l'on aurait pu l'espérer.

3°) Problèmes liés à l'augmentation du degré de formalisation.

Ce phénomène accompagne naturellement celui de l'augmentation du degré de généralisation, même si les deux choses restent en partie dissociables. En effet, la confrontation avec des notions *plus* générales et avec « *davantage* de définitions et d'énoncés généraux », nécessaires à une description plus complète de la complexité mathématique réelle, suppose l'adoption d'un langage formel précis (celui fourni par la logique élémentaire).

Ce langage peut par exemple aider à mieux identifier, pour une fonction, ce qu'est la « non dérivabilité » en un point réel, situation particulièrement complexe, à ne pas confondre avec la non-existence d'une tangente au point considéré : multiplicité des cas possibles, selon que la limite du taux d'accroissement existe et est infinie, ou n'existe pas, soit parce qu'elle diffère à droite et à gauche au point, soit parce qu'elle n'existe pas à droite et/ou à gauche en ce point. Mais ce langage formel s'avère particulièrement utile s'agissant de la définition de la limite et du cortège de théorèmes et de propriétés qui l'accompagnent, et différents travaux ont montré les difficultés conceptuelles qui sont liées à la formalisation de cette notion. Il y a les obstacles provenant du conflit entre la signification de cette définition experte et les significations qui proviennent des diverses conceptions des étudiants, identifiées en particulier par A.Robert[4], mais d'autres travaux tels que ceux, récents, de Ed.Dubinsky et O.Yiparaki[5] sur les interprétations de sens liées à l'ordre des deux quantificateurs $\forall$ (« pour tout ») et $\exists$ (« il existe »), dévoilent aussi des difficultés propres au langage adopté. Ces auteurs ont soumis leurs étudiants à un dispositif comprenant un questionnaire avec onze propositions dont il fallait donner la valeur de vérité, en argumentant, suivi d'interviews. L'expérience a montré que les étudiants, au lieu d'analyser la syntaxe avec précision, se laissent porter par l'idée générale véhiculée par la proposition, *telle qu'ils se l'imaginent*, et sont généralement alors plus enclins, notamment pour des raisons de simplicité cognitive, à interpréter une proposition requiérant les deux quantificateurs comme si le quantificateur « $\forall$ » précédait systématiquement le quantificateur « $\exists$ ». Rappelons enfin les difficultés conceptuelles liées à l'utilisation du symbole d'implication, comme confirmation du caractère problématique de la formalisation de cette notion de limite.

Cependant, les mathématiques telles qu'elles se présentent en DEUG A ne nécessitent pas toujours un degré de formalisation aussi élevé que celui requis par l'exposé de la théorie des limites. Pour autant, cela n'exclut pas la présence éventuelle de nouvelles difficultés de nature

[4] In « L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur », Thèse d'état, Université de Paris VII, 1982.
[5] In « On Student Understanding of AE and EA Quantification », Université d'Atlanta, Géorgie, avril 1998.

très différente. Ainsi, si l'on prend comme vérité cette remarque de Dubinsky : « [...] pratically all interesting mathematical statements have at least one universal & at least one existential quantifier »[6], il convient aussi de remarquer que l'une de ces deux quantifications peut être implicite, cachée derrière des mots, notamment des articles définis ou indéfinis (Mason, 1996), ce qui ne facilite pas leur identification.

De même, si l'on considère le théorème de Rolle ou celui des accroissements finis, présentés en première année de DEUG A, on peut constater qu'ils recèlent une quantification universelle implicite, car le résultat annoncé, valable pour une fonction continue sur un segment [a,b] *donné*, dérivable sur]a,b[, le reste si on remplace [a,b] par n'importe quel intervalle [x,y] ($\subset$ [a,b]) et]a,b[par]x,y[, ce qui permet d'annoncer comme conclusion : $(\forall(x,y)\in[a,b]^2 ; x<y)\ (\exists c\in]x,y[)\ \ f'(c)=0$ (resp. $f(b)-f(a)=(b-a).f'(c)$).

Ce point est essentiel pour une bonne compréhension de ces théorèmes, car il met en exergue une contrainte sur c (à savoir $x<c<y$), qui peut jouer un rôle essentiel dans certains raisonnements (passage à la limite dans la formule par exemple). Ajoutons que lorsqu'une quantification reste implicite dans une proposition, cela peut conduire l'étudiant à bien des erreurs lorsqu'il s'agit de nier la proposition en question, ainsi que le souligne A.Robert[7] en citant l'exemple de l'égalité de deux fonctions.

D'un point de vue général, une des difficultés du niveau post-bac consiste aussi à déterminer quelle « dose » de formalisation est pertinente pour la résolution d'un problème donné, ou lors d'une démonstration. Cela reste en effet assez variable selon le cas et un « excès » de formalisation peut empêcher le sujet de bien cerner l'idée qualitative de la solution. Ainsi, l'étude de bon nombre de séries numériques peut se mener en utilisant seulement ce que A.Robert appelle dans sa thèse (ibid.) le modèle « préstatique » de la convergence.

Exemple : « A partir d'un certain rang, $(\ln(n))^5 / n^3 \leq 1/n^2$, puisque l'on a : $\lim_{n\to\infty} (\ln(n))^5 / n$ égale 0, donc la série $\Sigma\ (\ln(n))^5 / n^3$ converge »

Les rapports entre « conceptualisation » et « formalisation », en début de DEUG A et en Analyse, ne se résument donc pas à l'apprentissage de la définition formelle d'une limite. Ils interviennent à bien d'autres niveaux, parfois plus élémentaires, où ils peuvent aussi être l'enjeu d'une avancée significative dans le champ de l'Analyse. On peut donc parler ici de *« rapport variable à la formalisation »*. Citons à ce propos un exemple donné par M.Rogalski ; pour établir la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in N}$ sachant que la suite $(n.u_n)_{n\in N}$ tend vers zéro à l'infini, on est tributaire d'un « truc » de formalisation tout simple : penser à écrire $(\forall n)\ nu_n = \varepsilon_n$ avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. La même astuce permet de retrouver la formule du développement limité d'une fonction en un point à partir de la définition de la dérivabilité de cette fonction en ce point par la limite du taux d'accroissement. La variété des situations envisageables et le passage d'une analyse admise à une analyse démontrée rend nécessaire une telle souplesse au niveau de la formalisation.

---

[6] Ibid.
[7] Lors de la IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Houlgate, 1997.

4°) La transition vers des « niveaux de conceptualisation » plus élevés.

A.Robert appelle[8] *« niveau de conceptualisation »* relatif à un champ conceptuel[9] donné, « [...] un palier correspondant à une organisation cohérente d'une partie du champ, caractérisée par des objets mathématiques présentés d'une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes, et des problèmes que les élèves peuvent résoudre avec les théorèmes du niveau considéré, et en utilisant ces méthodes. » (p.149).

Elle constate, en particulier dans la transition du secondaire au supérieur, qu'un des enjeux de l'apprentissage se situe dans le passage, au sein d'un même champ conceptuel, d'un certain niveau de conceptualisation, à un autre plus élevé. Cela concerne notamment les notions classiques de l'Analyse (continuité, limites, intégration...) déjà abordées en terminale S, puis reprises en DEUG A, mais de façon très différente.

Un aspect important de cette modification a été déjà signalé plus haut : il consiste en la considération d'objets *« plus généraux »*, correspondant à des *« structures nouvelles, plus riches »*, nécessitant éventuellement *« l'introduction d'un formalisme nouveau, plus adapté »*. A.Robert précise en outre que des situations de problèmes qui, à un niveau donné, apparaissent comme théoriques, générales, peuvent ainsi faire l'objet de théorèmes et de méthodes perçues comme « standards » à un niveau de conceptualisation plus élevé. On peut citer à cet égard les problèmes d'études de suites récurrentes par utilisation de l'inégalité des accroissements finis en terminale S, qui sont ensuite très clairement balisés en DEUG avec l'institutionnalisation du théorème du point fixe.

Dans le secondaire, le cadre de l'étude de fonctions particulières permet de se limiter à une approche empirique de ces notions, fondée sur des exemples servant à l'élève de référence. Ainsi, si les définitions formelles permettant l'établissement de théorèmes généraux de l'Analyse ne sont exposées qu'au niveau du DEUG, ces mêmes théorèmes sont admis et appliqués dès le lycée, ce qui permet alors d'établir des résultats d'un niveau plus élémentaire, et de faire déjà fonctionner des notions qui seront vraiment étudiées à l'université.

Pour A.Robert : « [...] tout se passe comme si on préparait les élèves à une présentation de ces notions à un certain niveau de conceptualisation, mais sans l'atteindre dans les années du lycée. » [ibid., p.154]

Pour reprendre un exemple déjà utilisé plus haut, la détermination du nombre de solutions sur un intervalle I de R d'une équation du type : $f(x) = 0$ (avec $f : I \to R$) s'effectue au lycée, pour des fonctions usuelles, dérivables sur I, en dressant le tableau de variations de f et en constatant les changements de signe sur I. C'est essentiellement la perception intuitive des choses, liée à l'observation du tableau de variations, qui est requise, alors qu'au niveau de l'argumentation, l'évocation de la continuité de f (possible en terminale, mais pas en première) est surtout le fait du contrat didactique. En DEUG A, l'évocation d'un théorème général, celui des valeurs intermédiaires, est exigible (dans des situations aussi plus générales), et l'on peut établir le lien entre ce théorème et celui qui affirme que : « L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle ». Au lycée les élèves constateront seulement, concernant les fonctions usuelles qu'ils étudient, la réalité de ce

[8] In « L'enseignement de l'algèbre linéaire en question », coordonné par J-L Dorier, Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage Editions, p149-p157, Grenoble, 1997.
[9] In « La théorie des champs conceptuels », G.Vergnaud, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 10-2-3, 1990.

théorème qui est aussi à leur programme. Le niveau de conceptualisation suivant est atteint en licence, avec un degré de généralisation et de formalisation plus élevé, à travers le théorème : « L'image d'un connexe par une application continue est un connexe ».

5°) Vers les premiers concepts généralisateurs, formalisateurs, unificateurs, simplificateurs.

L'algèbre linéaire et la théorie des limites fondée sur la formalisation en (ε, N) de cette notion de limite constituent, au niveau des difficultés d'ordre conceptuel, le « noyau dur » de la première année de DEUG A, parce qu'ils sont le cadre de ce que A.Robert[10] appelle des concepts *généralisateurs*, *formalisateurs*, *unificateurs*, *simplificateurs*. Ces quatre caractéristiques ne sont pas présentes par hasard au sein d'un même concept. Elles s'impliquent mutuellement dans une perspective de reconstruction du savoir a posteriori, assez éloignée des situations de problèmes qui leur ont donné naissance.

Ainsi, l'aspect « formalisateur » est lié à l'aspect « simplificateur » car :

« La formalisation de ces notions (définition en (ε, N), définition des espaces vectoriels puis affines) permet en effet de réaliser une économie formidable dans beaucoup de démonstrations, qui deviennent « standards », les mêmes pour tous les problèmes analogues issus de domaines pouvant se ramener à ce « modèle ». » [ibid., p.155].

Ce dernier point montre également l'aspect « unificateur » associé à la formalisation. Nous avons aussi parlé précédemment des liens entre formalisation et généralisation, ce que confirme A.Robert :

« Cette formalisation, qui correspond d'ailleurs à l'introduction effective du concept et par là même rend possible l'installation d'un travail à un nouveau niveau de conceptualisation, permet aussi d'aborder de nouveaux problèmes, inconcevables sans le formalisme, ne serait-ce que des problèmes énoncés avec le dit formalisme. »[ibid., p.156]

Tous ces perfectionnements ont un prix : l'analyse historique montre que les théories ici en question, de l'algèbre linéaire et des limites, sont l'aboutissement récent d'un long cheminement qui n'est pas transmissible aux étudiants. Et ce contexte d'ordre épistémologique se traduit par des difficultés conceptuelles particulières pour eux. De tels concepts, généralisateurs, unificateurs, formalisateurs, précisément parce qu'ils ont été créés pour se substituer efficacement à un ensemble de démarches disparates correspondant à des contextes spécifiques, ont des difficultés à prendre sens pour les étudiants à partir de problèmes particuliers. Conjointement, une autre difficulté apparaît pour ces mêmes étudiants : l'utilisation du cadre formel, qui tend à limiter le rôle de la perception en phase de résolution, n'offre plus les mêmes moyens de contrôle à l'étudiant, provoquant alors des pertes de sens. Ce nouveau langage, universel, qui constitue un raccourci et apporte clarification et structuration du point de vue de l'expert, reste ainsi difficile à interpréter pour l'étudiant, car les images anciennes associées au langage antérieur sont occultées, et la simplification, qui découle précisément de cela , s'accompagne donc pour lui d'une perte de lisibilité.

[10]Ibid.

6°) L'évolution conceptuelle liée à la production de preuves d'énoncés complexes.

L'introduction, en DEUG A, des démonstrations, suppose la manipulation des concepts dans leur statut d'objet *construit*, à un niveau formel. Mais mieux encore, la définition formelle d'une *limite* (étudiée à ce niveau d'étude), constituant dans l'histoire de ce concept un saut qualitatif essentiel (et tardif), est à considérer selon I.Lakatos comme faite *pour* la démonstration (Lakatos, 1976) ; elle se démarque profondément, ce faisant, des formes de connaissances antérieures sur cette notion de limite, plus liées à l'intuition, que nous pouvons rencontrer au lycée (nous y reviendrons plus loin, paragraphe D).

Inversement, la présence de démonstrations dans le cours de Mathématiques doit permettre en DEUG le développement d'une approche plus « mûre » des concepts, notamment en Analyse. Par exemple, la démonstration du critère de d'Alembert pour les séries numériques, dans son principe même, dévoile clairement les raisons pour lesquelles l'application de ce critère ne peut être efficace que pour étudier la nature de séries convergeant ou divergeant « au moins » *géométriquement*, donc sera inefficace pour traiter des séries du type « Riemann », plus *lentes*. De même, la démonstration du théorème de Rolle, est instructive du point de vue d'une approche qualitative nouvelle de l'Analyse, puisque cette preuve nécessite d'introduire le candidat c de]a,b[à vérifier : f '(c) = 0 (à savoir, le c tel que f(c) est maximal ou minimal sur [a,b]), alors que le théorème lui-même, très général dans ses hypothèses et sa conclusion reste un *pur* théorème d'existence.

C/ LES DIVERS MODELES LIES A LA TRANSITION PROCESSUS / OBJET.

Nous évoquons à présent les modèles explicatifs des processus psychologiques intervenant dans la conceptualisation en Mathématiques, mis au point par Ed.Dubinsky, A.Sfard et D.Tall dans leurs recherches au niveau de la « pensée mathématique avancée[11]». Certains résultats de ces travaux sont déjà anciens (Dubinsky, 1991), mais ont servi de base à une approche cognitive des problèmes de conceptualisation qui est encore en développement actuellement (Sfard & Tall, 1997).

1°) La transition processus-objet selon Ed. Dubinsky.

Dubinsky, fortement influencé par Piaget, identifie[12] des phénomènes d'abstraction réfléchissante intervenant dans la conceptualisation en mathématiques « avancées », ce qui lui permet d'établir une décomposition génétique des concepts (par exemple, ceux de « limite » et de « groupe »). Dans ces phénomènes d'abstraction, *l'intériorisation* d'actions matérielles génère des processus, et l'*encapsulation* (ou *conversion*) de ces processus (dynamiques) fournit des objets (statiques) pouvant être ensuite réinvestis dans de nouveaux processus. Les divers processus peuvent être d'ailleurs coordonnés, inversés ou généralisés au sein de

[11] Expression reprise comme titre d'un ouvrage faisant la synthèse de divers travaux ayant pour point commun ce niveau d'enseignement : « Advanced Mathematical Thinking », D.Tall (ed).
[12] In « Reflective abstraction in advanced mathematical thinking », in D.Tall (ed), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers, p95-p123, Cambridge, 1991.

« *schémas* » plus larges (c'est-à-dire d'ensembles plus ou moins cohérents d'objets et de processus associés).

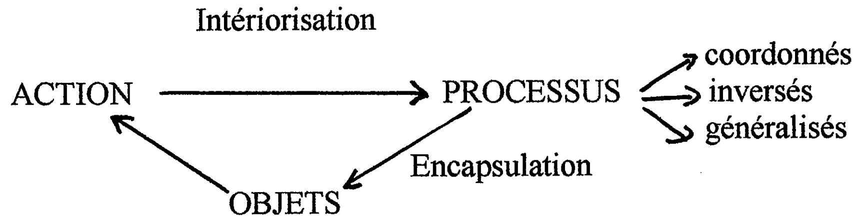


Figure 1 :

Au sein de cette vision très hiérarchisée de l'apprentissage des concepts, procédant selon une spirale de transformations réversibles processus/objets, l'encapsulation demeure, selon Ed.Dubinsky, l'étape cognitive présentant le saut qualitatif le plus important, ce qu'il observe notamment à propos du concept de fonction.

D'autres travaux (S.Vinner et D.Tall, 1981), ayant trait aussi à ce concept, vont dans le même sens en dévoilant, à partir de différentes tâches proposées aux élèves (des tâches de définition, de reconnaissance, d'identification…), un cloisonnement difficile à dépasser entre des savoirs déclaratifs (côté objet) et des procédures activées isolément selon le contexte. Les auteurs introduisent la distinction entre « concept-définition » et « concept-image »[13], et observent chez l'apprenant des zônes de cohérence locale entre ces deux facettes du concept, mais aussi des conflits potentiels nombreux, cependant rarement actualisés en même temps.

2°) La théorie de la réification selon A. Sfard.

A.Sfard dégage deux dimensions inhérentes aux concepts mathématiques : une dimension *structurelle* (associée à la notion d'objet), statique, instantanée et intégrative, et une autre, *opérationnelle* (liée à la notion de processus), dynamique, séquentielle et détaillée.

Conformément au développement historique des Mathématiques, la formation du concept chez le sujet doit passer d'abord, selon elle, par le stade opérationnel pour atteindre ensuite le stade structurel. Précisément, pour A.Sfard les dimensions structurelle et opérationnelle d'un même concept sont duales, complémentaires et non en opposition, la compréhension étant conditionnée par la capacité à voir les concepts selon ces deux dimensions[14] :

« […] It is very important to emphasize that operational and structural conceptions of the same mathematical notion are not mutually exclusive. Although ostensibly incompatible (how can anything be a processus and a object at the same time ?), they are in fact complementary. […] the ability of seeing a function or a number both as a process and as an object is indispensable for a deep understanding of mathematics, whatever the definition of « understanding » is. » [ibid., p.4-5]

[13] In « Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity », Educational Studies in Mathematics, vol 12, p151-p169, 1981.
[14] In « On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objets as different sides of the same coin », Educational Studies in Mathematics, 22(1), p1-p36, 1991.

Côté apprentissage, une conséquence pratique importante de cette théorie est que l'introduction trop précoce du point de vue structurel ne conduit chez l'apprenant qu'à l'identification de « pseudo-objets », non désencapsulables, pour lesquels le jeu dialectique précédent, entre processus et objets, ne peut fonctionner.

Plus dialectique donc, et moins hiérarchisé que celui de Dubinsky, le modèle de Sfard présente cependant le passage des processus aux objets comme la finalité première à atteindre sur le plan cognitif. Les étapes d'*intériorisation*, de *réification* qu'elle distingue dans cette transition s'apparentent à celles que dégage Ed.Dubinsky de son modèle, avec des conclusions similaires. Ainsi, la *réification* du processus, concourant à l'identification de l'objet et caractérisée par la convergence sémantique de représentations différentes du même concept, reste proche du phénomène d'*encapsulation* chez Dubinsky et est aussi analysée par Sfard comme l'évolution cognitive majeure sur le plan qualitatif. Mais A.Sfard porte en outre une attention spéciale aux formes particulières de représentation symbolique, notant que certaines (représentations graphiques) sont plutôt associées à une conception structurelle, globale, statique, du concept de fonction et d'autres (expressions algébriques, algorithmes) plutôt à une conception opérationnelle et dynamique de ce concept.

3°) Un exemple d'application des modèles de Sfard et Dubinsky en Analyse.

Le passage de la terminale scientifique au DEUG A s'accompagne, pour certains concepts, d'une transition processus/objet au sens de Sfard et Dubinsky. C'est notamment le cas pour le concept de limite (vu au-dessus) mais aussi pour ceux de bijection et d'image directe, f(A), d'une partie A par une application f.

Les exercices ayant trait à ces deux dernières notions au lycée consistent en effet, pour une application *numérique* f *(particulière)* de la variable *réelle*, à établir le caractère bijectif de f définie et *dérivable* sur un intervalle I, à valeurs dans f(I) (à trouver), en étudiant le sens de variation de f (il s'agit encore du « gros » théorème évoqué par A.Robert, mais que l'on analyse ici d'un autre point de vue). Les processus en jeu sont alors constitués des actions suivantes à intérioriser : calcul de la dérivée de f et étude de son signe sur I, construction du tableau de variations de f sur I et lecture de la stricte monotonie sur I, calcul des limites de f aux bornes de I et déduction de f(I). Une véritable familiarisation aux objets concernés n'est pas nécessaire dans une telle situation, alors que cette dimension structurelle peut être sollicitée en DEUG, ce qui justifie aussi alors l'introduction des notions d'injectivité et de surjectivité. L'expérience montre que la familiarisation, en DEUG, à ces deux objets dont la définition joue dès lors un rôle crucial, est effectivement délicate.

4°) D.Tall : notions de « procept » et de « versatile thinking ».

Dans le prolongement des théories de Dubinsky et (plus encore) de Sfard, D.Tall insiste sur la prise en compte de la flexibilité du symbolisme mathématique qui porte en lui à la fois la dimension « processus » et la dimension « objet », cette flexibilité permettant justement le jeu nécessaire au travail mathématique entre ces niveaux[15] :

« At the time we began to be aware of the use of algebraic symbols in two very different ways – as generalised arithmetic where an expression such as 2+3x stood for a *process* of evaluation (once x is given a value) and also as a manipulable mathematical *objet.* » (p.16)

Il invente ainsi le terme de « procept » pour désigner une entité unique résumant à la fois processus et concept, le procept représentant l'encapsulation d'un processus en objet par le biais d'un symbolisme mathématique qui figure à la fois ces deux dimensions :

« This encapsulation of process into object has as a pivot the use of symbolism to represent either process or concept and we therefore coined the term procept to represent this amalgam of a process to be carried out, the symbol for the result of the process and the result itself. » [ibid., p.16]

Pour D.Tall, il y a trois sortes de procepts :

1) les procepts *opérationnels* qui correspondent à des processus directement exécutables pour produire un résultat,
2) les procepts *patrons* qui correspondent à des processus non directement exécutables, où intervient la nécessité de donner des valeurs aux variables présentes dans la symbolisation mathématique, mais où le symbole est manipulé en tant qu'objet (exemple : expression algébrique),
3) les procepts *structurels*, renvoyant à des processus pour lesquels il n'y a pas de méthode systématique de production du résultat (exemple : passage à la limite).

Comme le souligne M.Dias dans sa thèse[16], D.Tall exprime, à travers cette idée de procept, une vision des phénomènes de conceptualisation moins hiérarchisée que les précédentes, puisqu'elle conduit à exprimer que les deux dimensions, processus et objet, d'un même concept, peuvent être rapidement présentes (ensemble) chez l'apprenant, au cours de l'apprentissage, et vont simplement évoluer simultanément dans le temps, et en interaction l'une avec l'autre.

La notion de procept, associée à l'idée de « versatile thinking », prend place chez Tall au sein d'un schéma général d'organisation des représentations (cf. figure 2, ci-après) qu'il construit à partir de la distinction introduite par Bruner entre trois niveaux de représentation :

1) le stade « *sensori-moteur* » (« *enactive* » pour l'auteur), lié à la perception des objets du monde extérieur sur lesquels on peut alors agir avant de les tester par des expériences physiques,
2) le stade « *iconique* » (ou « *visuo-spatial* ») où les objets sont représentés (ici graphiquement) pour nous permettre une interprétation en vue de construire des expériences mentales,
3) le stade « *symbolique* », où les objets et leurs relations sont d'abord décrits au niveau verbal, symbolisés et utilisés au niveau proceptuel, et enfin définis, formalisés au niveau logique pour en déduire des propriétés validées par la preuve formelle.

[15] In « A versatile theory of visualisation and symbolisation in Mathematics », D.Tall, Invited plenary lecture at the CIAEM Conference, Tome I, p15-p26, IREM de Toulouse, 1994.
[16] « Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire », Thèse de Doctorat, Université de Paris VII, 1998.

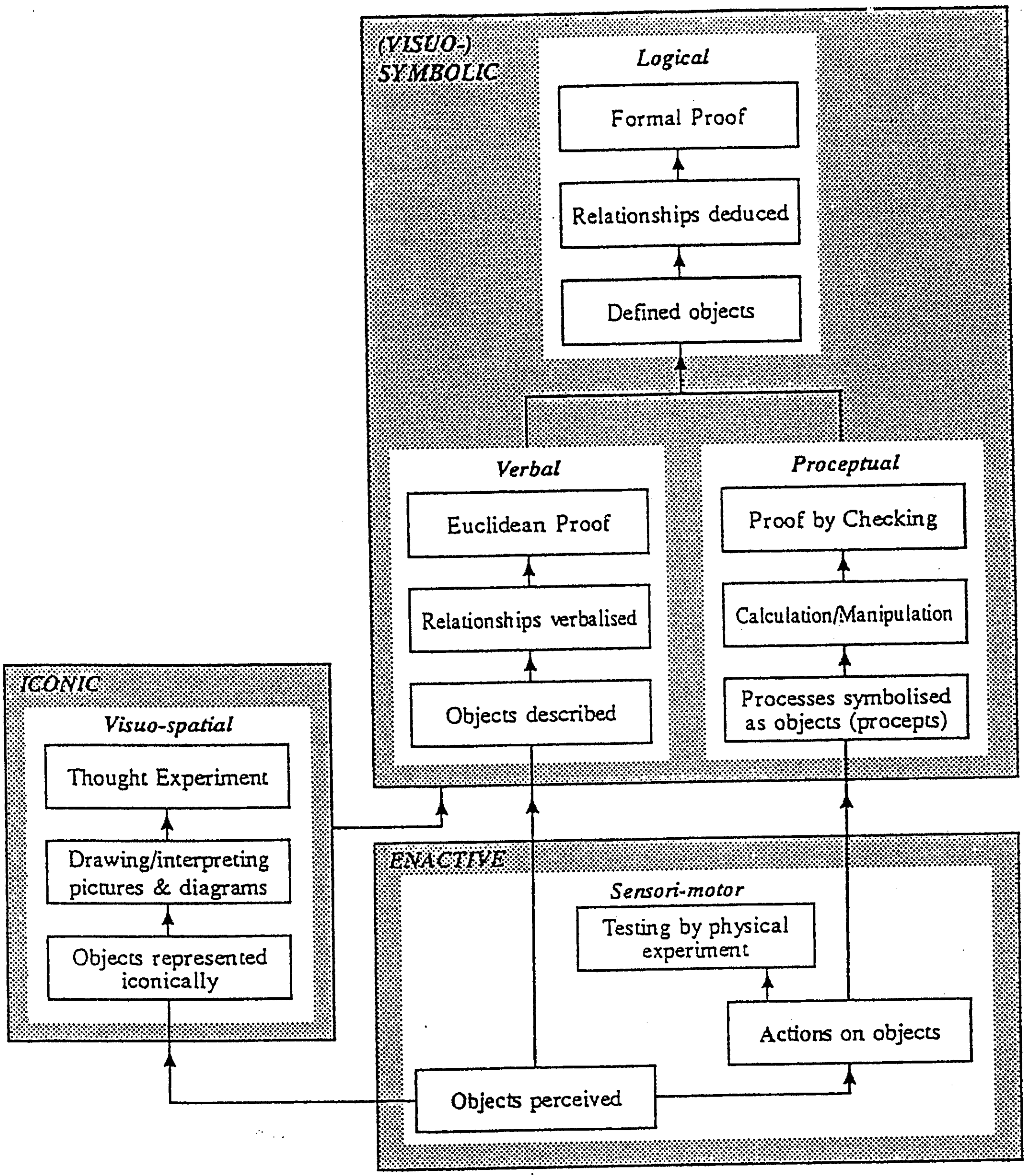


Figure 2: Objects, actions & proofs in different representational modes

En Analyse, les expériences liées à l'action constituent une base intuitive au Calculus alors que le fonctionnement proceptuel exploite des représentations numériques, symboliques et visuelles et correspond pour D.Tall au Calculus élémentaire. Enfin, c'est au niveau du champ de l'Analyse proprement dit que le fonctionnement formel intervient, les objets étant alors manipulés via des définitions.

Le passage du niveau verbal ou proceptuel à ce niveau formel est l'étape cognitive la plus délicate et les encapsulations du niveau proceptuel ne sont plus suffisantes, selon Tall, pour assurer la jonction avec le stade formel. Là, le niveau « visuo-spatial » vu comme support de l'intuition ne permet plus à lui seul l'apprentissage des notions, et Tall fait la distinction entre

« objet décrit » correspondant au concept-image, et « objet défini » au stade formel qui répond à des règles précises :

« [...] Regrettably their images of the concepts often have very different properties from those of the new « defined objects » that are given by the formal definitions. [...] » [ibid., p.22]

Et même quand les approches visuo-spatiales d'un concept supportent des intuitions efficaces (cas des concepts de limite, de continuité, de différentiabilité, d'intégrale) en donnant sens aux définitions formelles, elles ne suffisent pas à rendre ces définitions opératoires.

Le modèle de Tall évolue progressivement vers une meilleure prise en compte de la dimension dialectique des rapports entre processus et objets et des systèmes de représentation utilisés par l'apprenant (dimension sémiotique de l'activité), intégrant ainsi une part plus importante de la complexité réelle du développement cognitif.

D/ DES RUPTURES CONCEPTUELLES PLUS SPECIFIQUES DE L'ANALYSE.

Nous allons tenter de montrer à la lumière de divers travaux, dans ce cadrage plus spécifique sur les concepts de l'Analyse, que la rupture entre lycée et université se caractérise fortement, à la fois par l'impossibilité de s'en remettre en DEUG A, aussi largement qu'auparavant, à l'intuition première, et par une diversification importante des problématiques envisageables dans cette discipline.

1°) Philosophie et premières mesures de la contre-réforme en Analyse.

La contre-réforme amorcée dès 1982 pour les lycées, dont la philosophie inspire encore les programmes les plus récents, fut mise en œuvre en réaction à la réforme structuraliste des mathématiques modernes, en vue de proposer une approche de l'enseignement à la fois plus viable dans une optique d'enseignement de masse, et plus satisfaisante sur un plan épistémologique. Comme le précise M.Artigue[17] :

« Contrairement aux deux réformes précédentes, cette contre-réforme des années 80 est une réforme émanant du terrain, plus précisément des enseignants regroupés au sein de l'APMEP et des IREMs [...]. Pour ce qui est de l'analyse, le rôle de la commission InterIREM « Analyse » a été déterminant. Il suffit de comparer la brochure publiée par cette commission en 1981 et les programmes publiés en 1982 pour s'en convaincre. » (p.10-11).

Organiser l'enseignement autour de la résolution de problèmes, rééquilibrer qualitatif et quantitatif, promouvoir une approche constructiviste de l'apprentissage, limiter théorisation et formalisation au maximum en étaient les grands axes[18]. En Analyse, il s'agissait alors de faire rentrer progressivement les élèves dans le champ de l'approximation à partir d'une approche *intuitive*, notamment basée sur la considération de suites et de fonctions de référence et des explorations numériques et graphiques réalisées avec la calculatrice. La notion de limite n'est, à partir de 1985, plus définie ; elle est remplacée par un « langage des limites » fondé sur des

---

[17] In « Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994) », in B.Belhoste et al (eds) Les sciences au lycée, Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique à l'étranger, p.195-p.216, Vuibert, 1996.

[18] Lire notamment l'article : « Pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'Analyse », dans le Bulletin Inter-Irem de décembre 1981, par D.Lazet (IREM de Bordeaux) et J-L Ovaert (IREM de Marseille).

exemples. L'objectif est de centrer le travail de l'élève sur des activités de majoration et de minoration au cœur du champ.

Cette stratégie d'enseignement n'est pas sans soulever un certain nombre d'interrogations comme le souligne M.Artigue[19] :

« [...] Qu'apprennent réellement les élèves ? Comment structurent-ils un champ que l'enseignement ne structure pas pour eux ? Quelles conceptions se forgent-ils de notions qu'ils manipulent sans jamais pouvoir recourir à des définitions précises ? [...]
Comment peut se faire pour ceux qui poursuivront des études mathématiques à l'université la transition vers un autre rapport au champ de l'analyse [...] ? » (p.32)

La dernière de ces questions est évidemment essentielle, s'agissant de mieux cerner les ruptures intervenant dans la transition secondaire / supérieur, d'autant que dans la période nous séparant aujourd'hui de ce virage décisif (période jalonnée d'autres réformes, de moindre envergure que la contre-réforme, mais ne faisant qu'accentuer les effets de cette dernière), l'enseignement universitaire n'a pas évolué au même rythme. La présentation de certains obstacles et de problématiques de l'Analyse propres à l'enseignement supérieur dans la période actuelle est susceptible d'éclairer à présent notre propos.

2°) Obstacles épistémologiques et reconstruction du savoir.

Il convient à présent de retraçer les difficultés liées à la conceptualisation de la notion de limite, qui ont fait l'objet d'importants travaux de recherche, et prennent ici valeur d'exemples fondamentaux.

Ceux de Cornu (1983), repris et synthétisés[20] (1991), ceux de Sierpinska[21] (1985), ainsi que ceux de Schneider[22] (1991) sur les aires et les volumes ont permis en effet d'identifier un certain nombre d'obstacles épistémologiques[23] qui se dressent de façon cruciale au niveau du supérieur, et dont M.Artigue donne dans son article[24] une classification :

1) Le *sens commun* lié au terme même de « limite », qui induit une conception comme barrière infranchissable, non accessible, borne ou terme ultime d'un processus, ou tend à renforcer une conception monotone de la convergence déjà identifiée par A.Robert dans sa thèse et issue de la simultanéité des natures « convergente » et « monotone » de la plupart des suites rencontrées au lycée.
2) La *généralisation abusive* à des processus infinis de propriétés inhérentes à des processus finis selon le principe de continuité de Leibniz, et l'assimilation du passage à la limite avec des opérations algébriques classiques.

---

[19] In « L'enseignement des débuts de l'analyse : problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques. », J.A.Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de la Laguna, Tenerife, pp.27-53, 1996.
[20] In « Limits », Advanced Mathematical Thinking, Edited by D.Tall, p153-p166.
[21] In « Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite », RDM, vol.6-1, p5-p67.
[22] In « Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides », Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.11 2/3, p.241-294.
[23] Notion introduite par G.Bachelard (1938) et reprise en Didactique par G.Brousseau (1983) in « Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques », RDM, Vol. 4.2, p 164-198. Ces obstacles tiennent leur résistance de ce qu'ils correspondent à des connaissances et des conceptions antérieurement efficaces ; de plus, ils jalonnent de façon incontournable le processus de conceptualisation en marche, ce que leur histoire confirme.
[24] Ibid.

Notons qu'en DEUG A, l'étude des séries de fonctions, les questions d'inversion entre « signe somme » et « passage à la limite » sont nécessairement concernées au premier chef par cet obstacle historique.

3) Des *conceptions* liées à une « *géométrie de la forme* » qui n'identifient pas clairement les objets impliqués dans le processus de limite et leur topologie sous-jacente (rapports entre cadres numérique et géométrique au sein de ce processus), et amènent à croire, par exemple, que si « géométriquement » un objet tend vers un autre, toutes ses grandeurs auront pour limites les valeurs des grandeurs de l'objet limite.

Les travaux d'A.Sierpinska ont joué un rôle essentiel dans la mise à jour de ces obstacles. Elle donne le nom d' « Horror Infiniti » à un groupe de cinq catégories d'obstacles qu'elle a identifiées : refus du statut d'opération pour le passage à la limite, obstacles liés à la notion de fonction, à une conception géométrique, obstacles logiques, obstacle du symbole.

Concernant le troisième type d'obstacles de la classification donnée par M.Artigue, M.Schneider a, quant à elle, bien montré comment les notions de tangente et d'aire, vues de façon très *intuitive* comme objets « limites », peuvent être l'occasion d'erreurs, bien que cette méthode soit productive dans un certain nombre de cas (voir les indivisibles de Cavaliéri au XVIIème siècle). S'agissant par exemple d'évaluer le volume et la surface d'une sphère de rayon R, M.Artigue[25] rappelle ainsi qu'un calcul par intégration de volumes et de surfaces élémentaires : $dV = \pi r^2 dz$ et $dS = 2\pi r dz$ (où $r = (R^2-z^2)^{1/2}$ et z, la « hauteur », varie de –R à R), correspondant à un empilement de cylindres, donne un résultat correct dans le premier cas et incorrect dans le second, et constate qu'un public d'étudiants de niveau variable (DEUG à Maîtrise) ne peut arriver à expliquer ce phénomène.

M. Schneider parle à ce sujet de « l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions » pour caractériser en quoi cet « attachement au géométrique » (si on considère l'exemple précédent, l'attachement à l'idée que l'empilement des cylindres semble bien « tendre » géométriquement vers la sphère) est source d'erreurs, comme ce fut d'ailleurs historiquement le cas.

Il convient cependant d'admettre qu'un tel type de problèmes ne se rencontre pas au niveau du lycée où une approche *intuitive* un peu « naïve » est toujours licite vu les objets étudiés (voir la notion de tangente à une courbe, justement). Comme l'exprime M.Artigue[26], l'évolution actuelle de la didactique vers des approches socioculturelles ne peut qu'amener à s'interroger sur ce fait, et A.Sierpinska postule dès 1988 que de tels obstacles ne peuvent intervenir qu'à certains niveaux de la culture mathématique. Selon M.Artigue, l'universalité initialement admise des obstacles épistémologiques, utile à la prise en compte de discontinuités bien identifiées de l'apprentissage est :

« à déplacer au niveau de principes plus généraux du fonctionnement mathématique, susceptibles de s'actualiser ou non en obstacles dans des contextes donnés [...]. ».
« [...] L'existence de telles discontinuités est évidente en analyse mais elles y sont de nature diverse et il nous semble plus productif, aujourd'hui, pour avancer dans la compréhension de ces discontinuités de les penser en termes de reconstructions, d'évolutions de rapports à des objets, en se libérant, en quelque sorte, des contraintes à la fois théoriques et méthodologiques que fait peser sur le travail didactique un attachement trop fort à la notion d'obstacle épistémologique. »[ibid., p.238].

---

[25] In « Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire », Rapport de recherche, IREM Paris 7, 1989.
[26] In « L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse », RDM, vol 18.2, p.231-P.261, 1998.

A ce titre, l'évolution du rapport à la notion de limite entre lycée et université est particulièrement significative avec l'introduction de la définition formelle. Car selon cette définition, ce n'est plus « la variable qui tire la fonction[27] », comme le suggère une utilisation très *intuitive* de la calculatrice[28], qui est encouragée dans l'enseignement secondaire. Tout au contraire, c'est le degré d'approximation que l'on désire, qui impose à la variable une condition de limitation à un intervalle, et cette inversion du processus n'a rien de *naturel* pour l'étudiant. Comme l'écrit M.Artigue afin de caractériser ce type de transition entre secondaire et supérieur :

« [...] on travaille d'abord sur des objets préconstruits auxquels on essaye de donner sens par un ensemble de pratiques ; ce n'est que dans un second temps que ces objets sont censés prendre le statut d'objets construits assujettis à des définitions[29]. L'enseignement actuel du concept de limite, central en analyse, en est un exemple évident et les besoins mathématiques des reconstructions ci-dessus évoquées aident bien à comprendre, nous semble t'il, ce qui peut séparer la capacité à donner un sens intuitif au concept, à l'illustrer par des exemples et des contre-exemples, de la capacité à manipuler opérationnellement le concept avec son statut d'objet construit, assujetti à des preuves formelles. » [ibid., p.239]

Déjà au début de ce siècle, Poincaré montrait, à propos de la continuité et de la dérivabilité des fonctions, comment une approche rigoureuse de l'Analyse, soutenue par la logique des raisonnements et la précision des définitions, pouvait parfois *s'opposer* à l'intuition en dévoilant certains de ses aspects trompeurs. Mais conscient de la nécessité de s'adapter aux capacités cognitives de l'élève en ménageant différentes étapes dans l'apprentissage, il préconisait de laisser vivre cette dichotomie analyse intuitive / analyse rigoureuse dans l'enseignement.

Aujourd'hui, on peut dire que la transition entre terminale S et DEUG A est aussi l'occasion d'une présentation de certaines « pathologies », marquant ainsi une prise de distance avec l'analyse intuitive du lycée (voir les contre-exemples fournis par les fonctions oscillant indéfiniment au voisinage d'un point x_0, la possibilité d'obtenir ainsi, par exemple, une fonction f vérifiant $f'(x_0) > 0$ sans que f soit localement strictement croissante autour de x_0)[30].

Les exemples de l'évolution du *rapport à l'intuition* entre le secondaire et supérieur abondent. Ainsi, tandis qu'il est aisé d'admettre en terminale qu'une suite du type $u_n = f(n)$ puisse avoir une limite finie ou infinie (et de la déterminer) selon les variations observées de la fonction usuelle f qui se cache derrière, il est plus délicat de saisir en DEUG A pourquoi une série à termes positifs du type Σu_n avec $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ peut converger ou non, selon le cas, et l'interprétation visuelle du problème en termes d'aires n'est d'aucun secours dans la compréhension de ce phénomène. Seul le raisonnement soutenu par un calcul permet en effet de *constater* par exemple que $\Sigma 1/n^2$ converge alors que $\Sigma 1/n$ diverge[31].

[27] Expression due à R.Bkouche, correspondant à une conception d'élève qui consiste à penser qu'une fonction f admet une limite λ à l'infini si, lorsque l'on teste des valeurs de la variable très grandes, f(x) est proche de λ.
[28] Voir les travaux de L.Trouche, sa thèse : « Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation », Université de Montpellier II, 1996.
[29] Dans la même période, R.Bkouche affirmait : « La définition, loin d'être un préalable à l'activité mathématique, en est un premier aboutissement. » (R.Bkouche, 1996).
[30] Considérer par exemple la fonction définie par : $f(x) = (x/2) + (x^2.\sin(1/x))$ pour x non nul, et $f(0)=0$.
[31] De la même façon, ce n'est pas l'intuition qui peut nous amener à penser que l'intégrale de Fresnel (de $f(t)=\sin(t^2)$ entre 0 et $+\infty$) converge, alors que l'intégrale de 0 à $+\infty$ de $g(t)=\sin(t)$ diverge.

3°) Des difficultés conceptuelles de nature variée en DEUG.

Comme le souligne M.Artigue[32], le domaine de l'Analyse a été l'objet d'une importante prolifération de recherches en raison des difficultés ressenties à faire rentrer les étudiants véritablement dans le champ de cette discipline et à leur faire saisir l'originalité des concepts et modes de pensée qui la caractérisent, au-delà d'une approche algébrisée et algorithmique classique. Si, comme elle le précise, la diversité de ces travaux est en partie liée au poids assez variable accordé aux différentes dimensions épistémologique, cognitive, didactique, et à l'absence de paradigme dominant, force est de constater que s'agissant de travaux qui s'inscrivent dans une perspective systémique globale du didactique, une certaine variété dans la nature des problèmes conceptuels abordés reste observable.

Ainsi, le concept d'intégrale au sens de Riemann par exemple, qui répond à un problème de sommation très concret (intervenant notamment dans le calcul de grandeurs physiques), peut facilement être abordé à l'aide d'une ingénierie adéquate (celle présentée par M.Legrand[33] de l'attraction gravitationnelle entre une barre et une masse ponctuelle), ménageant des phases a-didactiques dans l'approche de ce concept. Cette *situation fondamentale*[34], gérable par des débats[35] en cours (en amphithéâtre), n'est en rien comparable avec celle dite « du pétrolier » (Legrand, 1996) qui s'est avérée en grande partie inadaptée à une construction similaire d'un rapport au concept de limite répondant aux exigences du supérieur, car la notion formelle de limite est liée (comme vu plus haut) à des besoins d'unification, de généralisation et de structuration dont la *dévolution* ne peut s'effectuer aussi aisément.

Une autre recherche menée par M.Artigue[36] en collaboration avec les didacticiens de la physique, sur les procédures différentielles et intégrales, a révélé que les deux fonctions, d'approximation locale (étude locale de courbes, tangentes et plans tangents, calculs d'erreurs...) et d'approximation linéaire locale dans le passage du local au global (variations, évaluation de grandeurs géométriques ou physiques...), essentielles tant en mathématique qu'en physique, ne sont pas bien identifiées par les étudiants, ce qui se caractérise différemment dans les deux disciplines. Le fait qu'il n'arrivent pas à donner sens aux éléments différentiels (et ne cherchent pas à le faire) n'exclut pas chez eux une réelle efficacité technique, acquise par imitation et mémorisation, tandis que leur conception sur ces éléments différentiels demeure relativement figée au cours de leur scolarité universitaire. Selon M.Artigue, cette situation, qui se pérennise au prix d'un cloisonnement entre mathématiques et sciences physiques, serait due au décalage entre le niveau *technique* requis et le niveau *théorique* des objets rencontrés, trop élevé pour que ces objets puissent servir de références. Il semble que les difficultés conceptuelles ici éprouvées, bien que réelles, restent larvées, par suite d'une adaptation économique de l'étudiant comme du système universitaire en général. Les problèmes en résultant n'en sont alors que plus délicats à *poser* et à *résoudre*.

---

[32] In « L'enseignement des débuts de l'analyse : problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques. »

[33] In « Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année. », Cahier de didactique des Mathématiques n°22, Irem Paris 7, par Grenier, Legrand et Richard, 1985.

[34] In « Le concept de situation fondamentale », cours de la septième école d'été de didactique des mathématiques, M.Legrand, 1993.

[35] In « Débat scientifique en cours de Mathématiques et spécificité de l'analyse », Repères Irem n°10, p.123-p.159, 1993.

[36] Dans le cadre du G.D.R, Groupement de Recherche Didactique du CNRS en 1989.

Enfin, comme nous l'avons suggéré au début de ce paragraphe, la rupture entre secondaire et supérieur en Analyse intervient aussi au niveau d'une nécessaire reconstruction des *modes de raisonnements* et des *rapports à l'algébrique*, ce qui a été bien mis en valeur par M.Legrand (Legrand, 1993). Alors qu'au niveau du lycée, on se cantonne dans une Analyse totalement algébrisée avec des raisonnements s'effectuant par *équivalences successives* (par exemple, résolution algébrique d'une inéquation pour étudier le signe d'une dérivée), on est amené en DEUG A à raisonner par *conditions suffisantes*, dans des contextes qui ne supposent pas *que* des compétences algébriques. Ainsi, afin de montrer une inégalité du type « $f(x) < g(x)$ » sur un certain domaine de valeurs de x, il peut s'avérer nécessaire d'imaginer des termes intermédiaires $f_i(x)$ (où $i \in \{1,2...n\}$) tels que l'on ait : $f(x) < f_1(x) < f_2(x) ... < f_n(x)$ sur un tel domaine, pour finalement prouver plus facilement alors que $f_n(x) < g(x)$. Le principe de ce type de raisonnement est celui d'une *perte contrôlée d'information* à chaque étape, afin que les termes $f_i(x)$ présentent une simplicité de traitement de plus en plus grande, tout en restant inférieurs à l'expression g(x).

Comme le précise M.Artigue : « Il y a là tout un jeu subtil qui suppose une familiarité avec les expressions, les ordres de grandeurs respectifs, qui ne peut s'apprendre que dans le long terme [...] »[ibid.].

De même, pour prouver qu'au voisinage d'un point x_0, $f(x) < g(x)$, un raisonnement typique de l'analyse consiste, par un « bricolage » de majorations, à constater que pour $\alpha > 0$ pris suffisamment petit, et $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, on a l'inégalité, là où un raisonnement algébrique s'évertuerait à tenter de transformer l'inégalité, visant ainsi la détermination (beaucoup plus délicate) de l'ensemble *exact* où elle se trouve être effectivement vérifiée.

Enfin, démontrer *l'égalité* de deux expressions f(x) et g(x) nécessite parfois en Analyse de se donner une certaine « marge de manœuvre » (M.Rogalski[37], 1994) en tentant plutôt d'établir que : « *pour tout* $\varepsilon > 0$, $|f(x)-g(x)| < \varepsilon$ ». Des « *idées* », qui ne sont généralement pas explicitées en cours, portant notamment sur la différence entre « propriété *locale* » et « propriété *globale* », sur celle existant entre une analyse des *nombres* et une analyse des *fonctions* (importance des notions de négligeabilité et d'équivalence pour des fonctions au voisinage d'un point), ou sur les possibilités d'extension d'une propriété de Q à R, sont au cœur des problèmes posés par l'Analyse au niveau post-bac.

Et, ainsi que le rappelle M.Artigue :

« Tout ceci n'a pas de raison d'être naturel et le sera d'autant moins que l'idéologie usuelle de l'enseignement qui conduit à minimiser les ruptures pour maintenir la fiction d'un apprentissage progressif et continu, tendra à laisser la prise de conscience de ces ruptures au seul registre du travail privé de l'élève. » [ibid.]

Sans doute, les évolutions conceptuelles qui viennent d'être énoncées à l'entrée dans le champ de l'Analyse, constitutives d'un véritable bouleversement culturel, doivent-elles faire l'objet d'un discours de type « méta » tout en s'inscrivant dans une certaine *pratique*, répétée, avec une reprise en séances de travaux dirigés de ce discours[38]. Ce thème de la « pratique » et de ses articulations possibles avec « le conceptuel » va maintenant être abordé dans la suite de cette étude des ruptures entre enseignements secondaire et supérieur en Analyse.

---

[37] Dans son premier cours d'analyse en DEUG A à l'université de Lille. Voir le mémoire de DEA de nous-mêmes, intitulé : « Analyse de l'aspect méta dans un enseignement de DEUG A concernant le concept de dérivée. Etude des effets sur l'apprentissage. », Université de Paris VII, F.Praslon, 1994.

[38] Telle était en tous cas la conviction de M.Rogalski lorsqu'il a conçu son dispositif d'enseignement.

E/ DES DIFFICULTES NOUVELLES DANS L'ARTICULATION ENTRE THEORIE ET PRATIQUE.

1°) Le cadre théorique de Chevallard comme point de départ.

Chevallard construit un cadre théorique[1] pour la didactique à partir du paradigme sous-jacent à la théorie des ensembles (principe d'unité de la construction) : tout est objet, et parmi les objets à considérer, il y a notamment les institutions (notées I), les individus (notés X ou Y), les objets de connaissance (notés O, mathématiques ou autres). Tous ces objets prennent sens à partir des relations qu'ils entretiennent entre eux, ces relations amenant d'ailleurs des questions de deux types :

a) Pourquoi y a t'il relation ou absence de relation dans un cas ou un autre ?
b) Pourquoi y a t'il tel genre de relation plutôt que tel autre ?

Ainsi, Chevallard considère que pour un objet O ayant une existence au sein de deux institutions I et I' (I figurant pour nous l'enseignement secondaire, I', l'université et O un objet rencontré en Analyse, tant en terminale qu'en DEUG : fonctions, limites, dérivées, etc...), l'évolution du rapport R(I,O) à l'objet O dans l'institution I vers un rapport R(I',O) dans l'institution I' va amener le sujet cognitif X dans cette transition de I vers I' à modifier son rapport personnel R(X,O), qui était conforme à R(I,O), en un rapport nouveau R'(X,O) davantage conforme à R(I',O). Dès lors, les objets n'existent plus en eux-mêmes, mais émergent dans chaque institution des systèmes de *pratiques* (institutionnelles) qui les caractérisent, une pratique se définissant selon Chevallard comme un *système de tâches*, c'est à dire d'activités relativement bien circonscrites. Ces objets pris dans des pratiques portent alors le nom de *praxèmes.*

Une tâche donnée, constitutive d'une pratique, peut s'avérer « routinière » si le sujet possède la *technique* qui y répond, et « problématique » dans le cas contraire. Mais à une phase de « routinisation » des tâches, et donc des pratiques associées, va succéder une phase de « naturalisation » : ces pratiques, stabilisées, nous semblent désormais transparentes, et à travers elles, certains objets nous apparaissent alors comme posséder une existence propre[2]. On conçoit aisément que l'intérêt de la distinction entre « tâches routinières » et « tâches problématiques » réside dans la part de relativité qu'elle introduit dans l'analyse du comportement des élèves ou des étudiants. Telle tâche, qui est problématique pour un élève de première (par exemple, étudier les variations d'une fonction simple), parce qu'il n'en maîtrise pas encore tous les tenants et les aboutissants, ne le sera plus pour un étudiant de DEUG A pour qui elle est devenue « routinière ».

Ainsi, ce cadre anthropologique nous aide-t-il à prendre davantage la mesure des évolutions en Analyse entre secondaire et supérieur dans leur dimension *technique*, et non plus seulement *conceptuelle*, comme c'est encore trop souvent le cas.

---

[1] In : « Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique », R.D.M, Vol. 12-1, p.73-p.112, 1992.
[2] In : « La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. », in R.Noirfalise et M.J.Perrin (eds), Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques, IREM de Clermont-Ferrand, p.83-p.122, 1995.

Dans le contexte de cette thèse, la référence à cette théorie peut nous amener à avoir un regard différent sur la transition et à nous poser à nous-mêmes des questions plus pertinentes du point de vue de l'analyse des ruptures. Par exemple, il nous semble ici utile de s'interroger sur les problèmes suivants : *« Y a t'il suffisamment de temps accordé à la « routinisation » de telle ou telle technique dans la transition secondaire/supérieur ? »*, ou encore : *« Telle évolution qualitative, perçue de prime abord comme une rupture décisive dans la transition, n'est-elle pas à juger, finalement, de manière plus nuancée, comme suite naturelle au travail quantitatif antérieur de familiarisation à des techniques ? »* (les exigences ne pouvant pas être de même nature dans le contexte d'un rapport initial au concept et en DEUG A, où les objets sur lesquels on travaille : la dérivée, l'intégrale, etc… ne sont plus tout à fait des inconnus).

Remarquons d'ailleurs, d'une part qu'une technique particulière peut demander un travail assez long (Chevallard, au sein de l'approche anthropologique, cite l'exemple de la technique de marche de « l'onioi » chez les petites filles maori), et d'autre part, qu'une technique donnée n'a toujours qu'une portée théorique limitée. Elle est calibrée à certaines tâches « t » d'un type « T » et peut être à réadapter, voire à réinventer, pour d'autres tâches du même type T (exemple : porter des escarpins à talons hauts demande une technique de marche adaptée). Il est intéressant de se demander ainsi, à propos de la dérivée, quelle place est laissée au travail d'adaptation d'une technique donnée pour des tâches en évolution par rapport à une tâche élémentaire de départ, au sein de chaque environnement institutionnel (lycée, université). Par exemple, le fait de passer du calcul et de l'étude du signe de la dérivée d'une fonction donnée (technique initiale) pour en étudier les variations (tâche initiale), au calcul de dérivées successives et à la réalisation de tableaux de variation en chaîne dans le même but (technique adaptée lorsque le signe de la dérivée première n'est pas immédiatement appréhendable) constitue t'il un objectif raisonnable, voire facile à atteindre pour les élèves du lycée en assez peu de temps ? Cette évolution va t'elle se décomposer en plusieurs étapes correspondant à une certaine progression dans l'apprentissage ? Quelle place va t'elle prendre dans la période qui sépare l'initiation au concept de dérivée et la fin de la première année de DEUG ? Voilà autant de questions liées à l'étude des ruptures (et aussi des continuités !) éventuelles qu'ouvre, selon nous, la perspective théorique exposée par Chevallard.

Cependant, Chevallard nous montre aussi qu'une technique donnée ne peut assurer sa pérennité au sein d'un certain système, autrement dit n'est viable écologiquement[3] dans ce système, que s'il existe un « discours » officiel dans l'institution considérée qui la rende compréhensible et la justifie de façon générale. Ainsi, selon lui, l'extraction des racines carrées « à la main » (par un procédé de division) est un savoir-faire qui est devenu obsolète bien avant l'introduction des calculatrices dans l'enseignement du collège, en réalité dès lors que cette pratique s'est trouvée en décalage avec un environnement plutôt centré sur les transformations algébriques applicables aux expressions comportant des radicaux. Du fait de l'absence d'un discours la justifiant dans cet environnement, elle a donc disparu.

Un tel discours justifiant une technique donnée est ce que Chevallard appelle génériquement une « *technologie* » de la technique, un logos qui rende raison de la technè.

---

[3] Au sein de la théorie de l'anthropologique, « *l'écologie des savoirs* » étudie les relations qu'entretiennent entre eux les savoirs, et les circonstances, le milieu dans lesquels ils naissent, se développent et disparaissent.

Au niveau de la pratique quotidienne des Mathématiques, ce qui correspond typiquement à ce que Chevallard appelle « technologie », pour une technique donnée, c'est le théorème qui justifie cette technique. Par exemple, ce sont les théorèmes généraux de dérivabilité qui justifient les techniques de dérivation. D'un autre point de vue, ce qui donne (écologiquement) leur raison d'être à ces différentes techniques de dérivation des fonctions au niveau du lycée, ce peut être (notamment) la présence dans cet environnement du théorème de monotonie, qui dit que toute fonction dont la dérivée est positive (resp. négative) sur un intervalle I, est croissante (resp. décroissante) sur I, ce qui permet d'étudier les variations de cette fonction.

L'observation des technologies, des théorèmes, en Analyse, qui donnent sens aux différentes techniques présentes, entre la classe de première S et la première année de DEUG A, peut s'avérer assez instructive pour ce qui est de jauger la transition institutionnelle entre les niveaux d'étude concernés. Si l'on prend l'exemple des exercices ou problèmes portant sur l'étude d'une suite récurrente par la méthode du point fixe en classe de terminale, on constate que c'est tout un environnement culturel (inégalité des accroissements finis, théorème des gendarmes, problème de la détermination de la valeur approchée de la solution d'une équation, etc...), qui rend compréhensible la présence de ce type de problème, avec tout son cortège de tâches et de techniques associées, répétitives et guidées, alors que la technologie principale (et simplificatrice), le théorème du point fixe, ne sera exposée qu'au niveau du DEUG.

Mais l'augmentation (manifeste) du nombre de théorèmes (ou « technologies ») mis à la disposition des étudiants en DEUG A dans la transition lycée / université, qui doit être, à terme, source de simplification et de clarification, comme l'indique une première lecture de la théorie de Chevallard, ne pose t'elle pas aussi des problèmes d'organisation et de restructuration des connaissances en lien avec les pratiques ? N'y a t'il pas nécessité, à ce titre, de rapports plus « dialectiques » (plus délicats à instaurer) entre un corpus « théorique » et ses applications, entre les technologies et les techniques ? C'est ce que nous allons tenter d'étudier dans ce qui suit.

Signalons auparavant que l'on trouve, selon Chevallard, au-dessus de la technologie, qui justifie la technique, encore un niveau, qui est celui de la « *théorie* », et qui constitue en quelque sorte une « technologie de cette technologie », autrement dit une justification de cette justification. Une théorie va se constituer d'un réseau de définitions, de théorèmes et de propriétés (démontrés), de méthodes, bien *organisés*, formant un tout cohérent ; la théorie des limites, en DEUG A, est sans doute la première théorie rencontrée au cours de la scolarité. Notons, pour conclure sur le modèle de Chevallard, que la position institutionnelle p de l'individu X d'une institution I est modélisable par un système $[T/\tau/\theta/\Theta](p)$, constitué de types de tâches, de techniques, de technologies et de théories tous associés à cette position institutionnelle p, ce système $[T/\tau/\theta/\Theta](p)$ constituant alors ce qu'il appelle une « *organisation praxéologique* ».

2°) Evolution de la dialectique cours / exercices entre le lycée et l'université.

Du point de vue de l'étudiant, la transition entre lycée et université se traduit par des bouleversements dans l'organisation générale du couple cours-exercices, les équilibres et les articulations entre « théorie » et « pratique ». Ces transformations constituent sans doute l'un des faits les plus marquants de la transition entre le secondaire et le supérieur pour ce qui est de l'enseignement des Mathématiques en filière scientifique.

En classes terminales, l'introduction des concepts est d'abord pensée sous l'angle de la fonctionnalité : le cours proprement dit est le plus bref et le plus synthétique possible, avec très peu de démonstrations, et immédiatement illustré d'applications directes assez nombreuses. Centré sur quelques définitions et théorèmes « prêts à l'emploi », bien adaptés aux exercices proposés, ce cours est éclairé en amont par un enrobage d'activités préparatoires, et complété en aval par des travaux pratiques ou des éléments de méthode. Dépouillé de toute « théorisation superflue », il correspond strictement aux besoins exprimés par le texte d'un programme bien circonscrit dans ses contenus et précis dans ses recommandations (analysé en partie III de la thèse). En DEUG A, le cours « magistral », qui fait cette fois l'objet de séances bien isolées, en amphithéâtre, est beaucoup plus dense, avec de nombreux énoncés, le plus souvent démontrés, et généralement une absence de problématisation. L'explicitation d'exemples, de situations, est aussi, en proportion, moins développée qu'au lycée. Les exercices sont pris en charge en séances de travaux dirigés, le plus fréquemment par un enseignant différent, ce qui pose le problème de l'homogénéité du discours[4] et nécessite une entente et une communication régulière entre les deux intervenants pour que se produisent, lors des exercices, les reprises nécessaires concernant le cours et que ces reprises soient bien identifiées comme telles par les étudiants (concordance des contenus évoqués, des notations, etc…).

Il y a de toutes façons un rééquilibrage très fort entre cours et exercices, s'effectuant au profit du cours, avec corrélativement une violente accélération du temps didactique[5] (grande concentration d'un contenu neuf en un temps réduit). Ce rééquilibrage a aussi une interprétation que l'étudiant doit saisir, et qui touche à la conception même de la discipline : les Mathématiques deviennent vraiment un objet d'étude pour lui-même, répondant à des exigences (constructions axiomatiques, par exemple) et des finalités qui lui sont propres et ne se justifient plus seulement comme un outil pour d'autres disciplines telles que la physique ou l'économie. Dans les filières scientifiques des différentes universités, le contenu est tracé seulement dans ses grandes lignes, pour chaque module, ce qui laisse une liberté importante à l'enseignant, et propice aux dérapages, notamment en ce qui concerne les niveaux d'exigence technique, les objectifs en matière de savoir-faire. Des méthodes parfois radicalement nouvelles sont induites par la présence des démonstrations du cours (par exemple, en Analyse, pour la recherche d'une condition suffisante en vue d'établir une proposition formelle en ε,α),

---

[4] La variété des points de vue que l'on peut rencontrer d'un enseignant à l'autre, est naturellement une source d'enrichissement pour l'étudiant expérimenté, mais elle demeure assez déconcertante pour le néo-bachelier qui n'y est pas habitué et reste en quête de « certitudes ».

[5] Temps consacré à l'enseignement, par opposition avec le temps d'apprentissage, nécessaire à l'acquisition des notions.

et ne sont que rarement isolées[6], décontextualisées par l'enseignant, ce qui ne facilite pas leur identification par l'étudiant. Du reste, la finalité des démonstrations, leur relief, leurs différences de nature et de fonctionnalité, ne sont guère perçues par les néo-bacheliers, qui ont simplement l'impression qu'avant le bac, on ne démontre rien et qu'après, on démontre tout[7]. Cet amas de preuves les déconcerte : Faut-il les apprendre toutes par cœur ? Ou au contraire les laisser de côté ? Sont-elles alors seulement de l'ordre de l'éthique de l'enseignant, présentes juste pour sa satisfaction personnelle ? C'est souvent en ces termes que se pose pour eux le problème, le rôle de ces démonstrations de cours vis à vis de la pratique mathématique quotidienne ne leur apparaissant pas clairement.

Cette difficulté éprouvée à faire le lien entre le cours magistral (ressenti comme assez formel et linéaire) et les travaux dirigés (pour eux, la pratique des Mathématiques « en vrai », surtout par référence à ce qu'ils ont connu au lycée), ce sentiment de profonde distorsion entre ce que l'on peut apprendre par chacun de ces deux types de « dispositifs d'étude[8] » est régulièrement exprimé par ces étudiants. Il y a conséquemment une certaine difficulté à leur faire admettre la nécessité, réelle, qu'il y a à travailler le cours de façon spécifique, justement parce qu'il se situe à un niveau plus élevé de généralité, pour pouvoir appréhender les exercices qui en dépendent : c'est précisément parce que cette dépendance est moins explicite qu'au lycée qu'un tel travail s'impose ! Inversement, il est plus aisément possible, au lycée, d'apprendre le cours « en situation », simplement en faisant des exercices, à la fois parce que ce cours est assez restreint et les problèmes abordés moins variés, et parce que la « distance » entre le cours et les exercices étant plus faible, elle est aussi franchie plus aisément. En outre, notre hypothèse est ici que la relation cours-exercices est essentiellement de nature « descendante » au lycée (avec peu de retours sur le cours enrichissant les points de vue sur ce dernier), et plutôt de nature « dialectique » au niveau de l'université, ce que l'étude des praxèmes doit révéler. Notons enfin que le fait d'avoir eu surtout à manipuler, au niveau du lycée, des objets particuliers[9] (des fonctions usuelles, par exemple), est également susceptible, pour des étudiants novices de l'université, de les amener à minimiser l'importance du cours dans l'enseignement des Mathématiques.

Nous pouvons développer personnellement deux exemples, l'un pris en Algèbre (linéaire) et l'autre en Analyse, afin d'illustrer les propos précédents.

<u>*Premier exemple*</u> : Pour prouver, lors d'un exercice, qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n est bijectif, on peut par exemple se contenter de déterminer le noyau de f, ou bien l'image de f, ou encore montrer que la matrice de f dans une base donnée de E est inversible, ou de rang égal à n. La référence au cours, qui permet à la fois de simplifier le travail à effectuer et de l'envisager selon différents angles, devient en grande partie *implicite* (théorème du rang et ses conséquences, équivalence entre injectivité de f et noyau de f réduit à $\{0_E\}$, entre injectivité et surjectivité en dimension finie, représentation

[6] Il y a des exceptions : voir le cours précité de Marc Rogalski à l'Université de Lille, retranscrit et analysé dans notre mémoire de D.E.A.
[7] Tiré de l'enquête rapportée dans « Bac : passage ou rupture ? » (Jean Aymes - la Gazette des Mathématiciens n°70 (1996).
[8] Expression empruntée à Chevallard.
[9] En DEUG A, on travaille aussi, dans les exercices, sur des objets généraux.

matricielle d'un endomorphisme relativement à une base donnée, etc...). Il y a bien nécessité *en amont* d'un travail spécifique sur le cours *en vue* d'une gestion appropriée des exercices et non plus seulement application et apprentissage du cours *en situation, au moment* des exercices.

Second exemple : Pour étudier localement la position relative d'une courbe et de sa tangente en un point, on peut étudier la fonction différence par dérivations successives, ou utiliser une formule de Taylor (pas nécessairement celle de Taylor-Young d'ailleurs), ou encore faire référence à un théorème lié aux propriétés de convexité-concavité. Les mêmes remarques que précédemment, sur le caractère implicite des références ou des méthodes à invoquer et la nécessité d'isoler le travail spécifique du cours restent alors valables. Dans les deux cas, la pluralité des méthodes envisageables pour résoudre le problème posé favorise un retour sur le cours via la fonction de *vérification*.

Nous allons à présent tenter d'étayer notre affirmation d'une nature plus complexe et dialectique de la relation entre « théorie » et « pratique » en DEUG A, par une analyse succincte des divers énoncés et de leur environnement (constitué en particulier des démonstrations) rencontrés à ce niveau de l'apprentissage.

3°) Une analyse du relief nouveau des énoncés en DEUG A.

En DEUG A, une première distinction[10] est nécessaire entre les divers énoncés du cours, du point de vue du rapport que ces énoncés entretiennent avec la pratique, cette distinction n'étant pas efficiente, en revanche, au lycée : certains énoncés sont directement applicables en situation d'exercice, tandis que d'autres, peu utilisables dans la pratique quotidienne, car trop théoriques, vont plutôt permettre *l'avancement du cours*, donnant naissance à des résultats qui, eux, seront opérationnels. Ainsi, le critère de Cauchy pour les suites numériques est-il rarement utile en vue de résoudre un exercice[11], mais sert d'un point de vue théorique, par exemple afin d'établir le critère très opérationnel pour l'étude des séries numériques, selon lequel : *« Toute série absolument convergente est convergente »*. De la même façon, la formule de Taylor-Young est souvent bien délicate à appliquer telle quelle pour déterminer le développement limité d'une certaine fonction, surtout si cette fonction est un mélange de produit(s), quotient(s), composée(s) de fonctions usuelles simples (le calcul des dérivées successives de cette fonction pouvant devenir rapidement très pénible). En revanche, cette formule permet d'obtenir les développements limités usuels qui permettent une bonne gestion[12] de ce type de problème. Ajoutons que dans un problème de nature plus « théorique »[13], le recours à la formule de Taylor-Young pourra au contraire devenir

[10] Liée à l'accroissement du niveau théorique des cours, *en particulier* à l'introduction des premières « théories » au sens de Chevallard.
[11] Ainsi que l'a montré M.Rogalski. On peut toutefois citer l'exercice consistant à établir qu'une suite convergente au sens ordinaire l'est au sens de Césaro, exercice qui s'effectue commodément grâce au critère de Cauchy, même si ce n'est pas la seule voie possible.
[12] On est confronté ici à une question d'un autre ordre que la précédente, la complexité des relations possibles entre « énoncés » et « pratiques » s'incrivant cette fois dans une perspective d'ordre « économique ».
[13] Cas où la fonction n'est pas donnée explicitement, et appartient seulement à une certaine classe de fonctions caractérisée par des propriétés générales.

obligatoire, ce qui pose à l'étudiant le problème du *choix* de la démarche à adopter selon le cas.

Cependant, le fait qu'une formule telle que celle de Taylor-Young, qui occupe une place prépondérante dans le cours, n'ait plus d'utilité directe dans la perspective du calcul de développements limités de fonctions usuelles (qui constitue le type de tâche le plus sollicité relativement à cette partie du cours) peut être assez troublant pour l'étudiant. Cela semble d'autant plus vrai qu'il s'agit cette fois d'un algorithme et non d'un énoncé purement qualitatif ou d'une définition formelle (type « critère de Cauchy ») et qu'il lui faudra réaliser à l'inverse, que certaines tâches standards en DEUG A (telle que l'intégration de fractions rationnelles, de fonctions à radicaux…) exigent la connaissance *précise* et l'application *scrupuleuse* d'algorithmes déjà complexes (théorème de décomposition d'une fraction rationnelle, méthode d'intégration d'un élément simple de seconde espèce, changements de variables à appliquer selon le type de fonction rencontré).

Mais l'entrée en DEUG dans une analyse *démontrée* reste naturellement le premier détonateur d'une nécessaire évolution du rapport aux énoncés. Elle introduit une modification dans le contrat didactique, l'enseignant qui démontre des résultats généraux étant en droit d'attendre que ses étudiants arrivent peu à peu à l'imiter, mais surtout, elle rend incontournable un profond *questionnement* des énoncés, qui, le plus souvent, n'étaient mis en valeur au lycée que comme simples conditions (suffisantes) à faire fonctionner dans les exercices.

Une fonction dont la dérivée est positive ou nulle sur un intervalle (avec des valeurs effectives d'annulation) peut-elle être strictement croissante sur cet intervalle ? Une bijection f, définie sur un intervalle I de R, à valeurs réelles dans f(I), est-elle nécessairement strictement monotone sur I ? Continue sur I ? Et si on suppose qu'elle possède l'une de ces deux propriétés, possède t'elle obligatoirement l'autre ? Pourquoi tel théorème est-il affublé de telles hypothèses ? Par exemple, pourquoi le théorème de Rolle se vérifie t'il pour une fonction f continue sur [a,b] et seulement dérivable sur]a,b[? Ce sont autant de questions qu'il faut être en mesure de se poser si l'on veut pouvoir pénétrer la modélisation mathématique au niveau DEUG et la dialectique des objectifs et des moyens à adapter à ces objectifs, notamment dans la perspective de situations d'exercices ne relevant pas de la « simple » application.

D'un point de vue théorique, la référence aux statuts « outil » et « objet » mis en évidence par R.Douady s'impose ici à nous pour évoquer l'évolution du rôle des énoncés (et aussi des définitions) dans la transition « terminale S / DEUG A ». Rappelons qu'à partir d'une analyse épistémologique des phénomènes liés à la conceptualisation, R.Douady aboutit à l'idée que les concepts mathématiques jouent alternativement le rôle d'*outil* dans un problème à résoudre, et d'*objet* au sein d'une construction plus globale, le savoir mathématique, culturellement organisé et socialement reconnu :

« Un concept est investi dans sa dimension « outil » lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème […] »
« L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. Le statut d'objet permet la capitalisation du savoir et donc l'extension du corps des connaissances. Il permet aussi le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine. » (Douady, 1992)

Par rapport à ces deux statuts, on constate que les concepts et les énoncés rencontrés se limitent plutôt à un rôle « d'outils » en terminale, alors qu'ils peuvent aussi être impliqués dans leur dimension « objet » au sein d'exercices et de problèmes de niveau DEUG (par exemple, autour des questions de dérivabilité, travail mettant en jeu différentes formes de taux d'accroissement, travail sur des conjectures, travail mettant au centre des préoccupations les conditions d'application de tel ou tel énoncé, etc…).

Les énoncés de cours en DEUG A, comme les démonstrations associées, peuvent avoir des caractéristiques assez diverses du point de vue de leur utilité en phase de résolution de problème. Certains énoncés ont un grand champ d'application (c'est le cas, par exemple, du *théorème de monotonie* pour les suites numériques[14]), tandis que d'autres ont un rôle « clef » dans la théorie, mais n'apparaissent qu'en filigrane dans la résolution des exercices (cas de l'énoncé : *« Toute partie non vide et majorée de R admet une borne supérieure. »*). De même, une démonstration peut avoir une grande valeur exemplaire du point de vue des démarches, des modes de raisonnement qu'elle met en jeu (intérêt de la preuve vue côté « objet »). C'est par exemple le cas de la démonstration du théorème des accroissements finis ou de la formule de Taylor-Lagrange (il faut appliquer le théorème de Rolle à une certaine fonction), ou encore de l'établissement de la position relative courbe / tangente pour une fonction convexe (dériver deux fois l'expression de la fonction différence : $\varphi(x) = f(x)-f(x_0)-f'(x_0).(x-x_0)$).

Mais une preuve peut aussi présenter de l'intérêt du point de vue de l'importance des outils engagés (la preuve vue côté « outil »). Par exemple, la démonstration de la convergence de certaines séries (avec calcul de la somme), comme application de la formule de Taylor avec reste intégral, permet de montrer un certain travail de majoration, classique en Analyse. Certaines démonstrations mettent bien en relief le rôle des idées qualitatives dans le travail de preuve, tandis que d'autres ne consistent qu'en un « jeu d'écriture » : par exemple, la démonstration du théorème de monotonie pour les suites utilise de façon forte la notion de borne supérieure, tandis que démontrer qu'une suite croissante et non majorée tend vers l'infini ne laisse apparaître que le travail formel. Naturellement, la reconnaissance de tous ces aspects, qui est nécessaire à une certaine familiarisation aux pratiques mathématiques en DEUG A, est source de difficultés nouvelles pour l'étudiant.

F/ FLEXIBILITE COGNITIVE ET ORGANISATION DES CONNAISSANCES.

1°) Changements de cadres, de registres, de points de vue.

Nous développons dans ce paragraphe ces notions théoriques correspondant à différentes dimensions d'analyse utiles à caractériser des « niveaux de flexibilité » nouveaux, qu'il est nécessaire d'instaurer, selon nous, à l'entrée en DEUG A. Nous reprenons le plan de présentation de ces notions utilisé par M.Dias dans sa thèse[15].

---

[14] « Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) est convergente. »
[15] Chapitre I, paragraphe III : Le cadre des modèles cognitifs non hiérarchisés [ibid.].

a) Notion de cadre :

Pour R.Douady[16] :

« Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. » (Douady, 1992, p.135).

Parmi les principaux cadres possibles, citons le cadre algébrique, le cadre numérique, le cadre graphique, le cadre géométrique. La notion de cadre est ainsi définie pour mettre en évidence le fait qu'un concept donné peut être mis en jeu dans différents environnements conceptuels et techniques, chacun d'eux étant caractérisé par un fonctionnement qui lui est propre.

Les *changements de cadres* permettent ainsi de formuler différemment un problème, et amènent, ce faisant, une diversité de contextes et de formes de représentation pouvant aider à la résolution de ce problème : les différences de fonctionnement et de formulation entre les cadres sont vues en effet comme *moteur de l'activité mathématique*, parce qu'elles permettent une diversification des entrées dans le problème et la mise en œuvre d'outils et de techniques variés :

« Les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux, en somme à l'enrichissement du cadre originel et de cadres auxiliaires de travail » [ibid., p.135-p.136].

La transition secondaire / supérieur que nous analysons dans cette thèse est marquée selon nous par la nécessité nouvelle pour l'étudiant de faire appel *par lui-même* à divers cadres lorsque le besoin s'en fait sentir dans un problème, voire même de penser *spontanément* les choses dans divers cadres, là où l'enseignement secondaire prenait à sa charge les changements de cadre nécessaires. Certains travaux sur l'enseignement des équations différentielles (M.Artigue et M.Rogalski, 1990, puis M.Artigue, 1992 & 1994) ont par exemple montré les limitations cognitives liées à la domination historique du cadre algébrique dans l'enseignement des Mathématiques en France, et les problèmes d'intégration didactique qui se posent si on veut donner à d'autres cadres la place qu'ils devraient avoir. Cette question devient particulièrement cruciale en DEUG A, où la résolution *exacte* d'équations différentielles (utilisant le cadre algébrique) devrait normalement céder du terrain aux résolutions *numérique* et *qualitative* (notamment à l'occasion de l'introduction du théorème de Cauchy-Lipschitz) qui nécessitent, elles, les cadres numérique et géométrique. Cette occasion de mettre en scène des tâches sollicitant un travail sur divers cadres à la fois, en interaction, semble encore insuffisamment exploitée dans l'enseignement courant, bien qu'un tel travail s'avèrerait tout à fait nécessaire en termes d'apprentissage.

b) Notion de registre.

Pour R.Duval[17], les activités cognitives en Mathématiques nécessitent des systèmes d'expression et de représentation qui ne se résument pas à la langue naturelle et aux images.

[16] In « Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement », Repères-Irem n°6, p.132-p.158, 1992.

[17] In « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. », Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol 5, p.37-p.65, Irem de Strasbourg, 1993.

Il évoque là les *représentations sémiotiques* : « ces productions constituées par l'emploi de *signes* (énoncés *écrits* dans cette langue naturelle, formules algébriques, graphes, figures géométriques, etc...) ».

R.Duval distingue la *sémiosis*, appréhension ou production d'une représentation sémiotique, et la *noésis*, correspondant à l'appréhension conceptuelle. Il affirme *l'interdépendance* de la sémiosis et de la noésis : les systèmes de représentation sémiotique n'ont pas qu'une fonction de communication, mais ont aussi une fonction de *traitement* que ne peuvent remplir les représentations mentales ; ils permettent donc l'activité sur des objets mathématiques. Ainsi, dans le calcul numérique, les procédures utilisées et leur coût dépendent du système d'écriture choisi (binaire, décimal, fractionnaire).

D'ailleurs, il constate[18] que le développement de systèmes sémiotiques nouveaux et celui de la connaissance mathématique elle-même vont de pair, tandis que :

« [...] la pluralité des systèmes sémiotiques permet une diversification des représentations d'un objet, qui augmente les capacités cognitives des sujets, et par suite, leurs représentations mentales. » et :
« [...] il n'y a pas de noésis sans sémiosis, c'est la sémiosis qui détermine les conditions de possibilité et d'exercice de la noésis. » [Duval, 1995, p.3-p.4].

Un système sémiotique prend le nom de *registre sémiotique de représentation* lorsque ce système permet les trois activités cognitives suivantes :

1) Formation d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné,
2) Traitement (transformation) d'une représentation interne au registre où elle a été formée,
3) Conversion (transformation) d'une représentation en une représentation d'un autre registre.

R.Duval précise ainsi la distinction à effectuer entre cadre et registre :

« Un registre se détermine par rapport à un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales. Un cadre se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurrence des objets mathématiques. Il peut y avoir changement de cadre sans changement de registre et changement de registre sans changement de cadre, car un cadre peut exiger la mobilisation de plusieurs registres (par exemple, le cadre géométrique). » [Duval, 1996]

Pour traiter une conjecture, activité tendant à devenir plus familière en DEUG, l'étudiant peut avoir intérêt à faire appel au registre des représentations graphiques (notamment en cas de recherche de contre-exemple), et dans ce cas, il lui faudra ensuite modéliser dans le registre des expressions algébriques ce contre-exemple trouvé dans le registre graphique. Différents travaux ont montré les problèmes d'articulation des différents registres symboliques d'expression des fonctions. R.Duval, en particulier, a mis en évidence les difficultés inhérentes au passage du registre des représentations graphiques au registre des écritures algébriques, même pour des droites[19].

A l'instar de ce que nous avons déjà signalé précédemment pour les *cadre*s de R.Douady, et comme le signale M.Artigue[20] :

[18] In : « Sémiosis et pensée humaine », Peter Lang, Paris, 1995.
[19] Lire l'article : « Graphiques et équations : l'articulation de deux registres », Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 1, p.235-p.253, Irem de Strasbourg, 1988.
[20] In « L'enseignement des débuts de l'analyse : problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques. ».

« [...] la trop grande prédominance accordée au registre algébrique, le statut infra-mathématique du registre graphique, empêchent de gérer convenablement ce type de difficultés et d'aider l'élève à construire les flexibilités requises. ».

Autre exemple : une bonne compréhension et utilisation de la définition formelle d'une limite (par exemple, celle de : « $(u_n)_{n\in N}$ tend vers λ pour n tendant vers $+\infty$ ») nous semblent en particulier assujetties au fait de lire assez instantanément une inégalité du type : $|u_n-\lambda| < \varepsilon$ en termes de « distance séparant des points de coordonnées u_n et λ sur un axe orienté » et à la perception de la convergence vers λ en termes de « nuages de points » pris dans une « bande de largeur 2ε » à partir d'un certain rang. L'interprétation d'une valeur absolue en termes de distance est spécialement travaillée au lycée, mais sollicitée explicitement dans des contextes spécifiques elle n'est pas encore « naturalisée » (au sens de Chevallard) à ce stade.

Il y a là un passage du registre algébrique (formel) au registre graphique qui ne va pas de soi en DEUG A, de même que le recours au registre de la langue naturelle pour expliciter cette définition formelle de limite pose aussi des problèmes.

c) Notion de « point de vue » :

Le terme de *« point de vue »* est utilisé conjointement par plusieurs auteurs pour décrire des réalités assez différentes. Large et recoupant diverses catégories d'analyse, cette notion, contrairement à celle de « cadre » et de « registre », reste encore mal définie.

On peut cependant distinguer en géométrie la notion de point de vue au sens de A.Robert et I.Tenaud[21] : les stratégies de résolution de problèmes peuvent s'amorcer d'une manière ou d'une autre, selon la façon dont on *regarde* et on *interprète* une situation géométrique. Par exemple, *« trois droites concourantes en un point peuvent être vues comme trois droites passant par un même point, ou telles qu'il existe un point appartenant à chacune d'elles, ou encore comme le fait que le point d'intersection de deux d'entre elles appartienne à la troisième »*. Sans doute y a t'il lieu, selon A.Robert et I.Tenaud, de le dévoiler aux élèves cette importance du point de vue adopté, en lien avec un enseignement de méthodes adéquatement situé dans un scénario plus global. Notons que cette expression de « point de vue » est ici mentionnée par les auteurs sans être vraiment définie par eux.

C.Castela[22], quant à elle, est amenée à caractériser les conceptions des élèves de lycée sur la tangente, qui s'avèrent fortement influencées par les propriétés de la tangente au cercle, première occurrence de tangente rencontrée au cours de la scolarité. Elle définit alors la notion de « point de vue » comme : « [...] un découpage dans le corps des savoirs mathématiques sur un objet donné, rassemblant définitions, théorèmes, situations et signifiants. » [Castela, 1995, p.10], et distingue « in fine » trois points de vue différents sur la notion de tangente, dont deux d'entre eux sont directement issus des propriétés spécifiques de la tangente au cercle :

1) Le point de vue « *intersection* », lié au nombre de points d'intersection et à la position relative courbe / tangente, généralisé abusivement par les élèves avec l'une et/ou l'autre de ces deux propriétés.

---

[21] In : « Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C. », R.D.M, vol 9/1, p.31-p.70, 1989.

[22] In : « Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures - un exemple concret : celui de la tangente. », R.D.M, Vol.15.1, p.7-47, 1995.

2) Le point de vue « *normale au rayon* », auquel correspond, dans le savoir mathématique, la notion de cercle « osculateur »,
3) Le point de vue « *analyse* », qui correspond à l'idée d'approximation locale par une droite (et doit permettre la stabilisation du concept).

Pour C.Castela, les conceptions des élèves sur la tangente peuvent être modélisées à l'aide de ces points de vue coexistant au sein de ces conceptions selon des proportions variables : « Chaque point de vue ainsi dégagé donne usuellement naissance à une conception derrière laquelle il s'efface. » [ibid., p.10-p.11]. Il convient simplement de préciser comment chaque point de vue intervient dans une conception donnée, avec quel contenu, quelle déformation éventuellement non respectueuse du savoir scientifique (généralisation abusive, exception à la règle…). Notons encore, que chez C.Castela, la notion de point de vue reste assez dissociée de celle de cadre ou de registre.

L.Trouche, dans sa thèse[23], parle de « découpage dans le champ épistémologique », pour évoquer cette fois, trois « points de vue », de R.Bkouche[24] et Dahan-Dalmédico, concernant la notion de limite :

1) Le point de vue « *cinématique* » : « C'est la variable qui tire la fonction », (R.Bkouche, 1996).
2) Le point de vue « *approximation* » : « C'est le degré d'approximation que l'on veut qui tire la variable », (R.Bkouche, 1996)
3) Le point de vue « *algébrique* » : il fonctionne sur des règles « sans élucider la nature des objets sur lesquelles elles opèrent » (Dahan-Dalmédico, 1982). On peut en effet, selon ce troisième point de vue, manipuler des théorèmes opératoires, utiliser des résultats relatifs aux limites usuelles, effectuer des calculs divers, sans que soit mis en jeu le point de vue « cinématique » ou le point de vue « approximation ».

La transition secondaire / supérieur se caractérise par l'émergence (délicate) du point de vue « approximation », seuls les points de vue « cinématique » et « algébrique » étant déjà présents au niveau du secondaire.

Enfin, pour M.Rogalski, un point de vue sur un objet mathématique est une *« manière de le regarder, de le faire fonctionner »*, voire *« de le définir »*. Cette notion n'est pas indépendante, pour lui, de celles de cadre et de registre, et il remarque par exemple que regarder un objet dans différents cadres, c'est avoir différents points de vue sur cet objet, mais qu'inversement, on peut avoir plusieurs points de vue dans un même cadre ou dans un même registre (ainsi, il constate que les écritures : $|x-2|<3$, $-1<x<5$, ou $x\in]-1,5[$ mettent en jeu des points de vue différents tout en se situant dans le même registre symbolique). En Analyse, le nombre dérivé fait l'objet de divers points de vue, selon M.Rogalski, et en particulier les points de vue : *« approximation affine »*, *« limite d'un taux d'accroissement »*, *« coefficient directeur de la tangente »* et *« vitesse instantanée »*.

M.Rogalski montre en Algèbre (linéaire), mais aussi en Analyse, l'importance nouvelle, en DEUG A, des changements de points de vue en phase de résolution de problèmes. Il distingue ainsi les points de vue *« paramétrique »* et *« cartésien »* en géométrie vectorielle et en géométrie analytique, en lien avec les modes de définition et de représentation pour les objets

[23] Ibid.
[24] In : « Points de vue sur l'enseignement de l'Analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement. », Repères-Irem, vol 24, p.67-p.76, 1996.

de ce champ, et M.Dias nous dévoile plus précisément dans sa thèse[25] le rôle joué par les articulations entre ces points de vue dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

Concernant plus spécialement l'entrée dans le champ de l'Analyse, M.Rogalski nous rappelle[26] que le fait de changer de fonction ou de variable pour simplifier un problème (par exemple, poser : $g(t)=f(x_0+t)-f(x_0)$ pour se ramener à une hypothèse du type « $g(0) = 0$ » au lieu de « $f(x_0)$ est quelconque »), de comparer f-g à 0 plutôt que f à g, ou encore de tenter, pour établir une inégalité du type $A \leq B$, de montrer que l'on a : $(\forall\varepsilon>0)\ A\leq B+\varepsilon$, sont autant de changements de points de vue pouvant faciliter la résolution d'un problème (voire s'avérer nécessaires à cette résolution, dans le troisième cas). Ici, le changement de point de vue effectué nous renvoie à l'idée de *méthode* ; il ne se restreint pas à un changement de registre, mais s'exprime par un *théorème*. Pour mémoire, citons deux énoncés typiques en DEUG A, où de tels changements de point de vue sont, selon nous, utiles :

1) Le problème consistant à établir que : « *Pour deux fonctions f et g, deux fois dérivables sur un intervalle [a,b], vérifiant f(a)=g(a), f(b)=g(b), et* $(\forall x \in[a,b])\ f''(x) \leq g''(x)$, *on a :* $(\forall x \in[a,b])\ g(x) \leq f(x)$ », qui se ramène immédiatement au problème (plus simple dans son expression et sa conception) à une seule fonction : « *Pour une fonction f, deux fois dérivable sur un intervalle [a,b], vérifiant f(a)=0, f(b)=0, et* $(\forall x \in[a,b])\ f''(x) \leq 0$, *on a :* $(\forall x \in[a,b])\ 0\leq f(x)$ »

2) Le problème consistant à établir que : « *Pour une fonction f définie et continue sur [0,1], à valeurs dans [0,1], il existe nécessairement un réel* α *de [0,1] tel que* $f(\alpha) = \alpha$ », qui se résout en posant : $g(x) = f(x)-x$ et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à g entre 0 et 1.

2°) Des besoins nouveaux en DEUG A au niveau des pratiques.

Les pratiques *expertes*, décrites et caractérisées par A.Robert[27], peuvent notamment servir de référence afin de mieux appréhender les évolutions nécessaires de la pratique mathématique dans la transition lycée / université.

A l'image des concepts scientifiques, organisés en systèmes, les connaissances de l'expert sont caractérisées par « *un certain degré d'organisation* », qui se traduit par des « *questionnements systématiques, et des repères sollicités constamment.* » [ibid.]. L'expert peut se poser à lui-même des « *questions de structure, d'homogénéité, de cohérence* », avoir « *des interrogations sur le caractère local ou global, fini ou infini* », se poser aussi des questions « *d'existence, d'unicité, d'exhausitivité* » [ibid.].

Pour A.Robert, cette organisation des connaissances est « *active et individuelle* », et l'expert est capable de « *mises en relations* », de « *généralisations* », mais aussi de « *particularisations* » ; il peut faire « *varier les paramètres, les hypothèses,* le *domaine d'application, changer de cadre,* de *registre,* de *point de vue,* de *stratégie, transformer son objet de travail* » [ibid.]. De plus, il dispose de « *situations de référence* » lui servant de

[25] Ibid.
[26] Dans son premier cours d'analyse en DEUG A à l'université de Lille, déjà cité plus haut.
[27] In : « Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. ».

« moyen de contrôle » ou de *« terrain d'expérimentation »*, et A.Robert évoque ici l'expression de *« concret de l'expert »* [ibid.].

Si l'on se place à présent du côté de l'étudiant, il semblerait que la pratique de l'Analyse s'infléchit à partir de la première année de DEUG A, en commençant à solliciter davantage les types de compétences précédents.

Concernant les questions d'*homogénéité* et de *cohérence*, par exemple, il peut être utile d'avoir intégré l'idée que la dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est impaire (resp. paire), petit théorème ayant surtout l'intérêt de permettre les vérifications, qu'une suite numérique qui est monotone admet nécessairement une limite, finie ou infinie (c'est la conséquence de deux théorèmes, l'un concernant les suites croissantes et majorées, et l'autre, les suites croissantes et non majorées). Que de même, le calcul du produit de deux développements limités d'ordre 3 en zéro ne peut permettre d'obtenir un développement limité d'ordre supérieur ou égal à 4, et qu'il doit y avoir égalité entre la valeur du terme constant d'un développement limité en zéro calculé pour une certaine fonction, et la valeur de la limite en zéro de cette fonction qui a pu être obtenue par une autre méthode. Autre exemple : on ne peut démontrer une inégalité sur tout un intervalle *donné à l'avance* à l'aide de la formule de Taylor-Young, alors qu'en revanche, établir une proposition du type : $(\exists\ \lambda > 0)\ (\forall x \in]-\lambda,\lambda[)\quad 1- x/2 - x^2/6 \ \leq\ (\sin x)/(e^x-1)\ \leq\ 1- x/2 + x^2/6$, s'effectue à l'aide d'un développement limité (questions liées au caractère *« local »* ou *« global »* d'une propriété).

Concernant les questions sur le caractère *fini* ou *infini* : pour prouver qu'une suite convergente est bornée, il faut remarquer en particulier que pour n_0 fixé, $\{u_n\ ;\ n \leq n_0\}$ est forcément borné car fini. Certaines *généralisations* ou *mises en relation* peuvent permettre de résoudre ou de simplifier un problème pour l'étudiant de DEUG : par exemple, étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f, définie par $f(x) = x / \ln(x)$, et de sa tangente au point d'abscisse e^2, au voisinage de ce point, il n'est pas nécessaire d'effectuer un développement limité en e^2 (ici délicat, car l'étudiant doit en choisir l'ordre et cet ordre doit être au moins égal à 3, puisque $f''(e^2) = 0$ alors que le calcul des dérivées successives de f devient rapidement pénible !). L'étude du signe de f'' au voisinage de $x_0 = e^2$ (plus standard), et l'évocation des propriétés générales des fonctions convexes et concaves, mène plus sûrement au résultat. Enfin, la nécessité de changer de cadre, de registre ou de point de vue dans certaines situations a déjà été évoquée plus haut.

A.Robert rentre elle-même dans le détail des compétences de plus en plus attendues de la part de l'étudiant à partir du niveau post-bac. Faisant référence aux problèmes d'existence et d'unicité, à la mise en œuvre de raisonnements par analyse-synthèse, elle remarque qu'il faut parfois *« reconnaître le problème, voire même identifier qu'il se pose, puis le résoudre »*. Elle note que *« pour effectuer une démonstration, il faut souvent faire appel à plusieurs arguments plus ou moins imbriqués »*, utiliser une *« répétition d'arguments »*, recourir à *plusieurs* théorèmes à la fois, identifier des *« emboîtements dans les preuves »* à fournir [ibid.]. Elle pose donc notamment le problème en termes de *complexité* nouvelle des raisonnements, de *nouveauté*, de *pluralité* et de nécessité d'*articulations* des arguments :

« ...il ne s'agit plus de juxtaposer assez systématiquement des applications simples des théorèmes du cours mais bien de faire intervenir simultanément plusieurs éléments, de les combiner, ou d'effectuer des choix [...], d'adapter des outils de manière un peu nouvelle, éventuellement dans de nouveaux types de problèmes. [...] Les élèves peuvent avoir des initiatives à prendre s'il y a à faire des modifications non indiquées par exemple. » [ibid., p.150]

Elle remarque que la *rapidité* devient un *facteur de réussite,* car les démonstrations sont plus longues qu'auparavant et une mauvaise méthode, plus dommageable, d'où la nécessité pour l'étudiant de disposer de quelques connaissances ou modes de raisonnement tout à fait sûrs.

Citons comme cas de problème *à identifier*, celui où l'étudiant doit s'assurer de l'existence d'une borne supérieure, ou vérifier les hypothèses du théorème qu'il souhaite appliquer parce qu'il ne va pas de soi qu'elles sont satisfaites (cas où il y a plusieurs hypothèses assez fines, par exemple). Exemple : Application du théorème de Rolle à la fonction g définie sur [a,b] par : $g(x) = (f(x)-f(a)) / (x-a)$ pour $x \in]a,b]$ et $g(a) = f'(a)$, f étant dérivable sur [a,b], en vue de prouver que sous les hypothèses : $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)$ égale $(f(c)-f(a)) / (c-a)$. Cette situation est peu rencontrée dans l'enseignement secondaire où le champ des fonctions usuelles sur lesquelles on travaille et la simplicité des énoncés font que ce type de vérification ne demande pas un soin particulier (en général).

Il est important de remarquer que la nécessité d'arguments *imbriqués*, *combinés* ou *répétés* évoquée par A.Robert peut très bien concerner des situations qui mettent essentiellement en jeu des algorithmes, donc *en apparence* proches de ce que l'on rencontre en terminale. Ainsi, la démonstration d'une inégalité peut-elle demander de dériver *plusieurs* fois une fonction, le calcul d'une intégrale, *plusieurs* intégrations par parties (*répétition d'arguments*). Autre exemple : si l'on a préalablement calculé la dérivée de la fonction g définie sur R par : $g(x) = \text{Arctan}(\text{sh}(x))$, la détermination du développement limité de g d'ordre 6 en zéro peut s'effectuer plus aisément qu'en composant les développements limités d'ordre 6 des fonctions Arctangente et sinus hyperbolique (référence à la nécessité de *rapidité* évoquée par A.Robert). En effet, la dérivée $g'(x)$ ayant une expression assez simple après réduction ($g'(x) = 1/\text{ch}(x)$), on peut facilement calculer son développement limité d'ordre 4, puis l'intégrer pour obtenir celui de g d'ordre 6, ayant remarqué que g est impaire. Mais cette démarche, combinant subtilement calculs et arguments, demeure en fait assez éloignée des pratiques de terminale, notamment du fait de l'originalité de la tactique adoptée.

3°) Disponibilité des connaissances et flexibilité cognitive.

Le cadre théorique de Robert[28], en termes de connaissances pouvant être mises en fonctionnement à trois niveaux différents : le niveau « *technique* », le niveau « *mobilisable* » et le niveau « *disponible* » permet en partie de caractériser les compétences décrites précédemment.

Le *niveau technique* correspond à des mises en fonctionnement *« isolées, locales, explicites »*, à des applications *« immédiates »* de théorèmes ou de définitions, à des calculs standards. C'est la fonction *« outil »* qui est surtout mise en valeur ici. Concernant la notion de dérivée, il peut s'agir selon nous, en première S, de calculer par exemple les fonctions dérivées de fonctions usuelles, et en terminale S, les primitives de telles fonctions. Au niveau du DEUG Sciences (première année), on peut imaginer par exemple une question du type : « Ecrire le

[28] Ibid.

théorème des accroissements finis pour telle fonction donnée, entre tels points». A.Robert rappelle ici que *« certaines évaluations, publiées dans l'E.V.A.P.M, ont montré le caractère fragile des connaissances qui sont mises en fonctionnement seulement à ce niveau technique »*.

Le niveau des *connaissances mobilisables* correspond à un début *« d'association des savoirs »* dans un domaine donné, voire *« d'organisation »*. Par exemple, s'il y a une *« pluralité de méthodes ou d'étapes »*, amenée par l'utilisation de ces connaissances dans le champ d'action considéré. On dépasse la simple application directe d'une propriété unique, il y a déjà un besoin *« d'adaptation »* de ses connaissances. Les caractères *« outil »* et *« objet »* peuvent être concernés. Cependant, ce qui est en jeu est ici *« explicite »* et un savoir est dit mobilisable s'il est *« bien identifié »* par l'élève comme l'enjeu du problème posé, et si cet élève est *« capable de l'utiliser correctement »*. En classe de terminale, étudier sans indication la dérivabilité d'une fonction en un point, lorsqu'il y a lieu de distinguer limite à gauche et à droite et, par exemple, de faire appel à des résultats concernant des nouvelles fonctions (exemple : limite en 0 de la fonction $x \to x.\ln(x)$) nous semble mettre en jeu le niveau mobilisable. En première année de DEUG A, il en va de même, selon nous, d'une tâche du type « Montrer telle inégalité en utilisant la formule de Taylor-Lagrange » (choix de la fonction, des points concernés, de l'ordre, majoration ou minoration autonome du reste de Lagrange).

Enfin, le *niveau disponible*, le plus élevé, correspond au fait de *« savoir résoudre ce qui est proposé sans indications »*, de pouvoir *« appliquer des méthodes non prévues »*, effectuer des *« mises en relation »*, *« donner des contre-exemples (retrouver ou inventer) »*, *« changer de cadre sans suggestion »* [ibid., p166]. C'est le niveau qui est lié à une *« organisation de connaissances, à la connaissance de situations de référence variées »*, à une *« familiarité importante »*, au fait de disposer de *« repères »*, voire même d'être capable *« de se poser seul un problème, ou de tirer des bilans »*, etc… Par exemple, être capable, au niveau du lycée, de déterminer si une fonction admettant une dérivée symétrique en un point est toujours dérivable en ce point correspond, selon nous, au niveau disponible. Cela implique en effet la nécessité de trouver un contre-exemple en faisant appel au cadre graphique pour jauger la situation, d'imaginer des cas de non dérivabilité, et notamment de penser à la situation où il y a présence de deux demi-tangentes distinctes à droite et à gauche en un point, mais nécessité aussi de bien connaître la définition du nombre dérivé et de savoir quelles formes de taux d'accroissement sont, ou non, admissibles pour l'expression de ce nombre dérivé. En DEUG Sciences, il nous semble que déterminer si une fonction f, dérivable sur $]0,1[$, à valeurs réelles, vérifiant pour tout entier naturel n non nul : $f(1/n)= (-1)^n$, satisfait nécessairement, ou non, certaines conjectures, telles que, par exemple : *« Il existe $a \in]0,1[$ tel que : $f'(a) \geq 1995$ »*, ou encore : *« Il existe $a \in]0,1[$ tel que $f'(a) = 0$ (resp. $f'(a) = 1995$) »*, correspond au niveau disponible. Il y a nécessité de faire éventuellement appel (sans indication du texte) à des théorèmes nouveaux (par exemple au théorème de Rolle ou à celui des accroissements finis) et de se mettre dans des conditions où l'on peut les appliquer. La fonction f qui est considérée ici ne ressemble en rien aux fonctions étudiées habituellement, même au niveau du DEUG A, et il y a lieu préalablement de faire appel au cadre graphique pour bien visualiser la situation.

Même si ces niveaux de mise en fonctionnement des connaissances restent pour A.Robert relatifs au niveau de classe auquel se situe l'élève ou l'étudiant, l'hypothèse sous-jacente à notre analyse précédente suggère que le niveau « mobilisable », voire « disponible », est plus souvent sollicité à partir de la première année de DEUG A qu'au lycée.

Cette disponibilité de connaissances et une certaine conscience de celle-ci correspondent à ce que les auteurs anglo-saxons (Tall, 1991 et Dreyfus,1996) nomment «*flexibilité cognitive* », l'un des problèmes de l'enseignement supérieur consistant à savoir quels moyens mettre en œuvre pour prendre en compte et faciliter cette flexibilité attendue, qui, jusqu'alors, a été traitée comme si elle « allait de soi », ou relevait du seul travail privé de l'étudiant. Elle s'avère, selon A.Robert, d'autant plus nécessaire au niveau post-bac, que l'étudiant est confronté à une « *combinatoire explosive des possibles* » au niveau des problèmes rencontrés, dont la résolution nécessite donc organisation, efficacité, adaptation des connaissances, puisque les situations nouvelles sont alors plus fréquentes.

4°) Des microruptures d'ordre technique : l'exemple du calcul des limites.

La transition secondaire / supérieur en Analyse ne peut pas, nous semble t'il, s'analyser uniquement en termes de pratiques contrastant résolument avec celles du lycée, car conditionnées par un contenu neuf (avec éventuellement des connaissances abstraites et formelles) et/ou des problématiques nouvelles (générales, par exemple) plus exigeantes. Les exemples présentés précédemment ont cette caractéristique, les questionnements, les repères, les mises en relation, les changements de registre ou de point de vue sollicités comme la complexité et la nouveauté évoquées relevant alors de ruptures assez « marquées ».

Il convient aussi de mentionner des ruptures plus fines, concernant *l'évolution* nécessaire du *degré d'autonomie*, des *techniques* et de leur *gestion*, notamment présentes dans des types de tâches déjà usuels au lycée (calcul de limites ou de dérivées par exemple). Ainsi, le calcul de la dérivée de la fonction g (déjà évoquée plus haut) définie par : $g(x) = \text{Arctan}\,(\text{sh}(x))$ ne relève pas de pratiques ou de modes de pensée qui soient *qualitativement* éloignés de ceux du lycée, même s'il s'agit ici d'une nouvelle fonction. Il faut cependant être capable de reconnaître en g, pour calculer correctement sa dérivée g', une fonction composée, bien que sa forme ne s'apparente pas aux cas bien répertoriés de terminale ($\sqrt{f}$, $\ln(f)$, e^f,... etc.), et la simplification de l'expression de $g'(x)$ ne peut s'effectuer qu'au prix d'une bonne connaissance de la propriété des fonctions sinus et cosinus hyperboliques, en l'occurrence de la formule : $(\forall x \in R)\ \ \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$, à utiliser ici sans indication.

Naturellement, ces petites difficultés, en l'absence d'indications particulières, cumulées à d'autres plus importantes, jouent leur rôle dans l'élargissement de *la* rupture entre les deux niveaux d'enseignement.

<u>L'exemple du calcul des limites</u> :

Concernant la détermination de limites de fonctions usuelles, diverses questions se posent à propos des savoir-faire de l'élève, au sortir d'une terminale scientifique, et en particulier : Quelles techniques est-il capable d'appliquer de façon autonome ? D'appliquer avec indications ? Quel est son niveau de « *distanciation* » par rapport à ces techniques : sait-il identifier les situations où il faut appliquer telle ou telle technique ? Quelles restructuration des connaissances serait nécessaire à ce sujet en DEUG A ?

On constate qu'au lycée, trois techniques élémentaires (factorisation par le terme prépondérant, utilisation des quantités conjuguées, reconnaissance d'un taux d'accroissement) sont assez répandues et peuvent être sollicitées sans indications, et que deux types de théorèmes peuvent être à utiliser avec indications (le théorème de composition des limites et ceux d'encadrement). La technique du changement de variable, qui constitue une forme plus opérationnelle du théorème de composition des limites n'est pas exigible au lycée. Celle du « passage au logarithme népérien », qui permet de calculer des limites de produits ou de fonctions du type : $f(x) = u(x)^{v(x)}$ et de dénouer de nouvelles formes indéterminées (non mentionnées au lycée, notamment du type « 1^{∞} ») n'est pas dans les objectifs du programme de terminale S.

Le travail de *distanciation* à réaliser au sujet de ces différentes techniques peut être cerné assez précisément : apprendre ce que l'on peut attendre de telle ou telle technique, distinguer ainsi des techniques qui relèvent d'une simple transformation algébrique (factorisation par le terme prépondérant, utilisation des quantités conjuguées) de celle qui touchent davantage au champ de l'Analyse (utilisation de théorèmes d'encadrement, reconnaissance d'un nombre dérivé), comprendre que les deux changements de variables : $u = x-x_0$ (translation) et $u = 1/x$ (inversion) peuvent permettre de ramener un calcul de limite en n'importe quel point réel ou en l'infini mais que (par nature même) un changement de variable ne peut aider à lever une indétermination (il peut seulement la déplacer), etc…

Il y a bien là quelques avancées possibles, non seulement dans la connaissance de techniques de calcul, mais aussi dans la prise de recul vis à vis de ces techniques. Ces avancées s'inscrivent dans la continuité de l'enseignement du lycée et pourraient légitimement prendre place en première année de DEUG A. La nécessité de situer le rôle des *développements limités*, qui constituent une notion emblématique de la transition avec le lycée, dans le calcul de limites, par rapport à des techniques plus anciennes, le justifierait également : il n'y a pas lieu de faire « table rase » de ces techniques plus anciennes, les développements limités constituant un outil puissant qui les complète sans toutefois s'y substituer totalement.

Signalons cependant que toutes ces avancées sont dans l'ensemble assez peu travaillées de façon explicite en DEUG A, l'effort principal de l'enseignement portant en général davantage sur ce qui est plus spécifiquement nouveau : les ruptures conceptuelles fortes occultent, en quelque sorte, ces microruptures d'ordre technique. Sans doute le travail de distanciation évoqué plus haut est il considéré aussi comme étant du registre privé de l'étudiant qui, sous la pression de calculs de limites techniquement plus délicats (et moins aidés) qu'au lycée, est censé s'adapter à cette situation, porteuse en germes de nouvelles microruptures.

5°) Le rôle de la mémorisation dans le travail technique.

La place des calculatrices programmables dans l'enseignement secondaire et l'existence d'un formulaire au baccalauréat semblent tendre à diminuer le rôle de la mémorisation dans la pratique mathématique en terminale. Or il convient de noter ici l'importance nouvelle prise par la mémoire (et au delà, une mémoire « *organisée* », là encore) au niveau de l'enseignement supérieur, notamment en vue de permettre au sujet les *associations* nécessaires (pour pouvoir « *re-connaître* » il faut déjà « *connaître* »). En effet, compte tenu du *niveau d'autonomie nouveau* qui est exigé, ce rôle de la mémoire semble amplifié, même pour les tâches les plus courantes, celles qui sont dans la filiation des pratiques algorithmiques du lycée.

Par exemple, comment déterminer le développement limité en zéro de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(\cos(x)) / (1+\sin(x))^{1/2}$, si l'on ne peut identifier le rôle de certains développements limités usuels en zéro (ceux de $x \to \cos(x)$, de $x \to \ln(1+x)$, de $x \to \sin(x)$, de $x \to (1+x)^{\alpha}$ avec $\alpha=1/2$) pour le calcul de celui de f ? De même, comment faire sienne l'idée que $u = \text{Arctan}(t)$ constitue un « bon » changement de variable pour la détermination des primitives de $t \to 1/(1+t^2)^n$, si on n'a pas présent à l'esprit l'égalité : $1 / (1+\tan^2(\theta)) = \cos^2(\theta)$? Ce problème des *reconnaissances de formes* est d'ailleurs posé par M.Rogalski[29], à propos d'exercices moins élémentaires tels que, par exemple, l'étude de la suite récurrente $(u_n)_{n\in N}$, définie pour tout n par : $u_{n+1} = [(n+\sin(n))/(n+\ln(n)) + u_n]^{1/2}$ qu'il faut identifier comme étant de la forme : $u_{n+1} = [a_n+u_n]^{1/2}$ avec $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, pour pouvoir décider de sa convergence.

G/ <u>DE NOUVEAUX BESOINS AU NIVEAU DES METHODES.</u>

1°) Un besoin implicite lié à l'évolution du degré d'autonomie ; exemples.

M.Rogalski caractérise[30] les méthodes, en parlant à leur sujet, de « *recherche de stratégie préalable et d'idées* », de « *classement du problème* », amenant des « *choix de tactiques et de techniques* » qui précèdent une planification de la preuve organisée en « *buts, règles et sous-buts* », la stratégie étant guidée par des « *préceptes ou métarègles* » telles que « *localiser la difficulté* » ou « *changer de point de vue* ». Cependant, il s'intéresse en priorité à des méthodes permettant véritablement de pénétrer le champ de l'Analyse et qui, *par essence même*, parce qu'elles supposent souvent un degré de formalisation plus élevé, voire des connaissances nouvelles, restent propres au niveau post-bac, et ne peuvent être appropriées par l'étudiant que sur le long terme : raisonnement à ε-près, méthode de réduction d'un problème à des cas plus simples, par exemple par translation, par changement de fonction, recours au raisonnement par l'absurde, etc...

Nous souhaitons montrer ici, afin de pointer des ruptures plus fines de la transition secondaire/supérieur, que *l'évolution du degré d'autonomie* requis entre la terminale et la première année de DEUG pour la réalisation d'un certain nombre de tâches encore assez élémentaires, *communes aux deux niveaux d'enseignement*, nécessite aussi l'acquisition nouvelle en DEUG de certaines méthodes.

Ainsi, lorsque l'élève de terminale est appelé explicitement à réaliser une (unique) intégration par parties, parfois selon des indications qui lui sont fournies (notamment sur ce qu'il faut

---

[29] In : « Les concepts de l'E.I.A.O sont ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en Analyse. », Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 14/1.2, p.43-p.66, 1994.
[30] Ibid.

primitiver ou dériver), afin d'obtenir un résultat qui peut lui être également précisé, il ne fait qu'appliquer scrupuleusement une certaine technique de transformation formelle d'une intégrale. En revanche, quand l'étudiant de DEUG A doit concevoir, planifier et réaliser sans aide une ou plusieurs intégrations par parties, selon des modalités à déterminer, à des fins qui relèvent d'une certaine stratégie, on peut alors parler de « méthode ». Par exemple, pour prouver le lemme de Riemann-Lebesgue (pour une fonction f de classe C^1 sur un intervalle [a,b], l'intégrale de $g(t) = f(t).\sin(\lambda t)$ sur [a,b] tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$), on doit réaliser une intégration par parties sur g en dérivant f et en primitivant $t \to \sin(\lambda t)$, puisque cela va permettre de faire apparaître λ au dénominateur, avant d'effectuer les majorations convenables et d'utiliser un théorème d'encadrement. De même, le calcul des primitives de la fonction : $\varphi : x \to \varphi(x) = (\ln(x)/x)^2$, requiert une double intégration par parties, l'idée étant de provoquer l'extinction en deux temps de la partie logarithmique (qu'on dérive) dans l'espoir de se ramener au calcul des primitives d'une fraction rationnelle (pour lequel on dispose d'une théorie générale). Il y a bien là, même dans ces activités encore assez élémentaires, ne nécessitant aucune notion, aucun formalisme dépassant le niveau de terminale, la nécessité d'utiliser les « préceptes ou métarègles » évoqués par M.Rogalski, qui découlent de l'analyse heuristique du problème et conduisent à une stratégie.

De la même façon, un certain travail de majorations-minorations (par exemple, en vue de déterminer la limite de fonctions, suites ou intégrales), *déjà sollicité au lycée*, demande un tout autre niveau d'autonomie en DEUG, s'inscrivant ainsi, seulement à ce stade, dans une démarche *réflexive* globale au centre de laquelle la notion de méthode prend tout son sens. Tandis qu'en terminale, on demande juste à l'élève d'identifier des raisons simples (monotonie, positivité, passage à l'intégrale...) assurant la validité d'une inégalité ou d'un encadrement qui est généralement fourni, l'étudiant de DEUG peut être amené (par exemple) à majorer par lui-même un reste intégral en vue de montrer que la série de Taylor associée converge. Il lui faudra alors non seulement choisir un terme majorant adéquat, mais également *contrôler* lui-même le domaine de validité de sa majoration. Il peut avoir aussi à considérer et à étudier une fonction sur un certain intervalle sans indication du texte. Les articulations entre un certain bricolage et des énoncés généraux ne sont donc plus de même nature : à une première familiarisation à « l'outillage » intervenant dans le travail de majoration, caractérisée par l'accomplissement de quelques tâches bien séparées, sans compréhension globale, succède une prise en charge *active* des différentes étapes d'un cheminement réfléchi, les aspects conceptuels s'enracinant davantage dans les questions d'ordre technique.

2°) Méthodes et points-méthodes : des finalités différentes.

Les manuels de lycée comportent à présent des rubriques diversement baptisées (« points-méthodes », « fiches-méthodes », « savoir-faire »...etc.) qui résument des techniques isolées, voire même rappellent, remettent en relief des résultats du cours. Citons entre autres : « *Pour calculer une primitive de f (hormis les cas immédiats), pensez à écrire f(x)=kg(x), où k est un nombre constant, et g une fonction dont vous connaissez a priori une primitive* » (Transmath.TS p.112) et : « *Comment calculer une dérivée : [...] Décomposez f sous la forme uov et utilisez la formule : (uov)' = v'.(u'ov)* » (Fractale TS p.40)

On constate que ces « points-méthodes », visant à faciliter la *mise en fonctionnement* de notions très élémentaires du calcul différentiel ou intégral, répondent bien à cette exigence signalée plus haut de première familiarisation aux outils de base, et restent donc très éloignés, dans leur finalité autant que dans leur nature (parfois très locale), de « méthodes » (générales) propres au niveau DEUG, déjà décrites. C'est *l'application* pure et simple de techniques bien précises, à travailler pour elles-mêmes, qui est ici ciblée, et non l'élaboration de stratégies[31], qui suppose au contraire l'idée de *choix* (notamment dans les techniques investies), donc aussi d'éviction de certaines démarches, jugées inefficaces ou coûteuses : « *Une des fonctions d'une méthode est d'aider le sujet à gérer et le choix des stratégies, et l'abandon éventuel d'une voie initialement choisie.* »[32]

Il peut cependant aussi arriver qu'un « point-méthode » ne porte pas sur une technique unique, mais sur un ensemble de techniques successives, décrivant une certaine démarche, assez générale. Une véritable méthode peut alors être à la base des exercices correspondants. C'est notamment le cas de certains problèmes de Bac concernant l'étude de suites récurrentes, construits sur l'exploitation de la méthode dite « du point fixe ». Cependant, le théorème du point fixe n'est institutionnalisé qu'au niveau DEUG, et d'un problème à l'autre, en terminale, on retrouve des canevas tout à fait similaires, bien découpés, de questions très guidées :

1) Etude de fonction, de l'existence et de l'unicité d'un point fixe α pour une fonction f, sur un intervalle *donné* I,
2) Etude de la stabilité de I par f,
3) Majoration de $|f'|$ sur I par un réel a, *fourni*, de]0,1[,
4) Etude de la suite récurrente $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1}= f(u_n)$ avec :
   a) établissement par récurrence du fait que $(\forall n\in N)\ u_n \in I$,
   b) preuve de l'inégalité : $(\forall n\in N)\ |u_{n+1}- \alpha| \leq a|u_n-\alpha|$ grâce aux inégalités des accroissements finis (*démarche précisée*),
   c) preuve de l'inégalité : $(\forall n\in N)\ |u_n- \alpha| \leq a^n|u_0-\alpha|$,
   d) conclusion sur la nature de la suite.
5) Application à la recherche de la valeur approchée d'un réel (en l'occurrence α).

C'est ce dernier point qui semble justifier, selon le programme, la fréquence de ce type de problème. Mais la stratégie sous-jacente n'étant pas à la charge de l'élève, qui ne dispose ici d'aucune marge de manœuvre (l'énoncé prend en charge chaque étape de la démarche), il ne peut guère s'approprier la méthode en jeu et distinguer dans le cas présent autre chose qu'une situation classique à « bachoter », une suite de tâches soumises à systématisation[33]. Dès lors, le point-méthode correspondant est plutôt à considérer comme un simple « *plan d'action* » (récapitulant scrupuleusement un programme préétabli de tâches), peu susceptible de provoquer la *distanciation* nécessaire par rapport à l'action. Car, comme le souligne A.Robert, « *une méthode n'exprime pas ce qu'il y a de commun dans des comportements, mais ce qui est commun dans des approches efficaces* » [ibid.].

---

[31] Celle-ci nécessite justement que ces « gammes » soient préalablement déjà suffisamment maitrisées.
[32] In : « Enseigner des méthodes », Cahier de Didactique n°38, Irem Paris 7, A.Robert, J.Rogalski, R.Samurçay.
[33] Signalons d'ailleurs que l'étude de suites récurrentes en terminale S reste limitée au cas de ce type de problème, ce qui exclut l'idée même de « choix », inhérente à la notion de méthode.

3°) Une rupture qualitative ignorée ; difficultés inhérentes à sa prise en charge.

En DEUG A, ce besoin nouveau de méthodes, qui relève certes d'une logique de fonctionnement assez différente de celle du lycée, s'inscrit cependant comme une étape normale de l'apprentissage, et n'est pas à considérer *en soi* comme une source de rupture.

Nous avons tenté de montrer à travers différents exemples (intégrations par parties, majorations, étude de suites récurrentes) que c'est aussi un travail de *capitalisation*, de *synthétisation* de savoir-faire concernant des objets anciens qui, *en Analyse*, est en jeu dans cette évolution. Des heuristiques encore très locales, des stratégies assez sommaires, peuvent être nécessaires à l'étudiant de DEUG pour résoudre les problèmes qui lui sont posés (notamment au niveau de l'évaluation, où le contrat est revu à la baisse).

Mais l'enseignement supérieur, traditionnellement plus orienté vers l'acquisition d'un contenu théorique nouveau, assez dense, assume t'il cette prise de relais au niveau méthodologique ? On constate par exemple que les difficultés liées à l'évolution de l'autonomie nécessaire dans le travail technique semblent constituer un point « aveugle » de la transition secondaire/supérieur, comme si cette évolution était transparente ou allait de soi. C'est ainsi que l'institution universitaire ne s'impose pas toujours, en matière de savoir-faire, des objectifs bien circonscrits, comme le fait le lycée, qui s'appuie en ce domaine sur des textes de programmes très précis. Un certain travail d'analyse des savoirs (nouveaux *et* anciens) et des modes de fonctionnement propres à l'enseignement supérieur, pour cette nécessaire reprise en main au niveau méthodologique, est alors généralement laissé à la seule charge du travail privé de l'étudiant, qui doit s'adapter très vite à cette nouvelle donne. On peut donc penser que c'est en faisant l'économie de ce travail (économie corrélative d'une certaine *péjoration* des questions d'ordre technique) que l'institution universitaire permet le développement d'une rupture entre les deux niveaux d'enseignement.

Cependant, l'apport d'un contenu neuf étant *aussi* à l'origine de méthodes, cette fois radicalement nouvelles (du type de celles observées par Legrand et Rogalski), une difficulté de l'enseignement de l'Analyse en DEUG tient sans doute dans l'existence d'un certain « *dégradé* » dans ce domaine, d'un large éventail, dont il convient de tenir compte, les diverses méthodes s'avérant plus ou moins délicates à installer chez l'étudiant selon qu'elles représentent ou non un saut qualitatif important, et selon le degré de familiarisation de l'étudiant avec les objets attenants. Par exemple, en DEUG A la méthode de démonstration des inégalités à ε-près, à relier avec l'introduction de la théorie des limites, introduit une idée philosophiquement nouvelle dans le champ de l'Analyse, non réductible à des procédés plus anciens et historiquement datable, tout en s'accompagnant d'un corpus de définitions et de théorèmes également nouveaux pour l'étudiant. L'enseignement « ordinaire » en DEUG prend surtout en charge l'apprentissage de ce corpus très concentré et très « *abouti* », sans le « désamalgamer » de la méthode sous-jacente (avec tout le travail technique l'accompagnant), qui elle, reste implicite.

Les questions qui se posent alors sont les suivantes : Y aurait il lieu d'institutionnaliser cette méthode au sein du cours ? Et plus généralement, quelle place donner à un enseignement de méthodes en DEUG, compte-tenu du « dégradé » (évoqué plus haut), de la disparité des difficultés d'apprentissage rencontrées ?

A.Robert, qui a montré qu'un enseignement de méthodes, pour être efficace, doit se situer au sein d'un scénario complexe, incluant une participation active de l'élève et une dévolution importante à son travail privé[34], a également prouvé l'importance cruciale du choix du stade d'apprentissage auquel un tel enseignement se situe.

Compte-tenu des structures d'enseignement assez rigides de l'université, on comprend aisément que le problème posé s'avère, en DEUG A, très délicat à gérer.

[34] A.Robert et I.Tenaud ont observé sur un objet différent, la géométrie en classes de terminales scientifiques, que c'était l'interaction dialectique entre enseignement de méthodes et travail en petits groupes qui était favorable à l'apprentissage (in « Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C », R.D.M, vol 9/1, p.31-p.70, 1989).

CHAPITRE II : PREMIERES HYPOTHESES. METHODOLOGIE GENERALE DE RECHERCHE.

I/ HYPOTHESES ISSUES DE L'ANALYSE THEORIQUE.

L'étude théorique que nous venons de réaliser dans le chapitre I nous amène à formuler à présent l'hypothèse principale qui va guider notre travail de recherche, et que l'on peut résumer de la façon suivante :

« L'évolution des rapports à l'Analyse entre le lycée et l'université n'est pas *réductible* au passage d'une Analyse intuitive et algébrisée à une Analyse formalisée, même si, bien sûr, c'est là une composante essentielle de la transition. Cette évolution est multiforme, multidimensionnelle et non réductible à une évolution de type *hiérarchique.* »

En effet, nous avons en particulier essayé de montrer, dans notre étude théorique, en quoi l'entrée dans une Analyse démontrée modifie en DEUG A les rapports aux concepts et aux énoncés en projetant l'étudiant dans une culture tout à fait différente de celle du lycée. Notre présentation des problèmes de transition lycée /université en Analyse s'est ainsi imposée peu à peu comme une illustration directe du cadre théorique d'Yves Chevallard, étayée au niveau du contenu par d'autres cadres théoriques, notamment exprimés en termes de besoins nouveaux au niveau de la flexibilité cognitive et de l'organisation des connaissances. Ce cadre anthropologique d'Yves Chevallard va désormais nous servir de fil directeur principal tout au long de cette thèse, que nous utiliserons comme une *grille de lecture* particulière nous permettant de porter sur ces problèmes de transition institutionnelle, un regard nouveau et original en termes de pratiques émergeant de deux cultures distinctes.

Un des aspects essentiels de cette transition, selon nous, lié à l'importance accordée par Y.Chevallard au travail de routinisation des tâches dans l'apprentissage, tient dans le fait que l'activité mathématique, telle qu'elle est présentée aux étudiants dès le début de l'enseignement supérieur, suppose une parfaite maîtrise d'un certain nombre de tâches, parfois *succinctement* abordées au lycée, ou faisant encore l'objet dans cette institution d'*aides à la résolution* conséquentes. Cela nous amène à formuler ainsi l'hypothèse complémentaire selon laquelle les enseignants du supérieur sont souvent peu sensibles à la complexité des tâches qu'ils sollicitent de la part des étudiants, d'une part parce que ces tâches sont devenues pour eux peu à peu de plus en plus *transparentes* (phénomène de « naturalisation »), et d'autre part parce qu'ils estiment parfois à tort que certaines sous-tâches dont elles se constituent sont déjà parfaitement « compilées » pour l'étudiant au terme du lycée.

En outre, il convient de noter que les difficultés liées aux changements de contextes intervenant dans la transition (entrée dans un nouveau monde fonctionnel, passage de situations particulières à des situations générales, ...etc.) sont également susceptibles, selon nous, d'être sous-estimées par les acteurs de l'institution universitaire. De tels bouleversements des contextes proposés sont cependant susceptibles de modifier la perception qu'a l'étudiant d'une tâche donnée, quand ce ne sont pas les conditions de réalisation de cette tâche elles-mêmes.

II/ METHODOLOGIE GENERALE DE RECHERCHE.

A/ DIFFERENTES ENTREES POUR NOTRE RECHERCHE.

Ayant fait le choix de la notion de dérivée[1] comme objet particulier de l'Analyse sur lequel nous souhaitions tester nos hypothèses dans ce travail de recherche, plusieurs voies s'offraient à nous pour tenter de mieux comprendre l'évolution des rapports à cette notion dans la transition secondaire / supérieur.

Trois niveaux d'analyse nous semblaient a priori envisageables pour l'étude de tels rapports :

a) Considérer *in abstracto* les rapports *possibles* à la notion de dérivée,
b) Etudier les rapports *attendus*, d'un point de vue « purement » institutionnel, à la notion de dérivée,
c) Tenter de cerner les rapports *effectifs*, *réels*, des étudiants à cette notion.

Le premier de ces trois niveaux ne nous ayant pas semblé très intéressant pour l'objectif qui était le nôtre, nous avons organisé notre recherche selon les deux autres axes, notamment susceptibles, selon nous, de nous aider à distinguer ce qui, dans la transition, est pris en compte par l'enseignement universitaire de ce qui est laissé à la charge de l'étudiant. Nous avons donc tenté de développer une méthodologie adaptée au choix précédent, les difficultés d'accès aux rapports effectifs, *personnels*, des étudiants à la dérivée nécessitant un dispositif particulier décrit un peu plus loin.

B/ L'ETUDE DES RAPPORTS INSTITUTIONNELS A LA DERIVEE.

1°) Choix adopté pour réaliser cette étude.

Nous avons décidé de mener cette étude des rapports institutionnels à la dérivée, à travers une analyse comparée des environnements d'exercices et de problèmes mettant en jeu cette notion, présents dans des *manuels de lycée* et au sein de *feuilles de travaux dirigés* de première année de DEUG A collectées auprès de différentes universités (Marne-la-Vallée, Paris 7, Valence, Nantes et Lille).

Les manuels de lycée choisis (classes de premières et de terminales scientifiques) constituent un échantillon représentatif de ceux qui sont utilisés au niveau national (collections « Déclic », « Transmath », « Fractale », « Terracher »), et correspondent à la période 1994-1998 sur laquelle s'est déroulé notre travail de recherche[2]. Concernant l'étude institutionnelle à réaliser de manière conjointe pour la première année de DEUG A, il nous a semblé plus

[1] Notion centrale dans l'enseignement de l'Analyse, tant au niveau du lycée qu'à l'université en première année de DEUG A.
[2] Rappelons ici qu'un nouveau programme est actuellement en vigueur en terminale S depuis la rentrée 1998.

judicieux de travailler sur des feuilles de travaux dirigés, davantage susceptibles de traduire la *réalité* des pratiques, que sur des exercices trouvés au sein d'ouvrages[3].

Les exercices et problèmes analysés peuvent :

- soit être spécifiquement centrés sur la notion de dérivée (*exemples* : calculs de fonctions dérivées, étude de la dérivabilité d'une fonction en un point),
- soit se situer dans son environnement direct, notamment en tant qu'application (*exemples* : étude des variations ou de la convexité d'une fonction, utilisation d'une formule de Taylor à certaines fins),
- soit encore, en connexion plus lointaine avec cette notion (*exemples* : calculs de primitives, ou de limites par la règle dite « de l'Hospital »).

2°) Outil méthodologique construit et utilisé dans la perspective précédente.

Nous avons entrepris de construire comme *outil d'analyse* de cette transition institutionnelle une grille multidimensionnelle, se constituant de plusieurs tableaux de classification à double entrée, nous permettant de répertorier méthodiquement les caractéristiques marquantes des divers environnements d'exercices observés, à travers des informations *qualitatives* et *quantitatives*.

Cette grille d'analyse, que l'on a été amené à *faire évoluer* entre l'étude de manuels de lycée et celle de feuilles d'exercices de DEUG Sciences (pour des raisons qui sont données ci-dessous), se fonde sur la considération d'un certain nombre de cadres théoriques parmi ceux décrits dans le chapitre I de cette thèse, cadres qui nous ont permis de la structurer précisément.

Les tableaux de classification, initialement au nombre de cinq pour l'analyse des exercices et problèmes des manuels de lycée[4], portent ainsi :

(1) Sur la décomposition *a priori* des tâches correspondant aux questions posées au sein des divers exercices, en sous-tâches *élémentaires* au niveau d'apprentissage considéré, et sur la nature de ces sous-tâches (calcul, travail de nature graphique, raisonnement, application d'un théorème, ...etc.),
(2) Sur les aides à la résolution, explicites ou implicites, présentes dans les environnements d'exercices étudiés,
(3) Sur le statut « outil » ou « objet » des notions engagées, et les contextes dans lesquelles elles sont mises en jeu (degré de généralité, présence de paramètres, questionnement du savoir ou simple application, champ d'investigation...etc)
(4) Sur les cadres de travail et les changements de cadres ou de points de vue nécessités pour la réalisation des différentes tâches sollicitées,
(5) Sur les registres sémiotiques présents dans l'énoncé des diverses tâches sollicitées, ou nécessaires à leur exécution.

[3] Depuis un certain nombre d'années, avec l'amplification du phénomène de massification de l'enseignement supérieur, il n'y a plus vraiment, en DEUG A, d'ouvrages « de référence » compatibles avec l'évolution du public d'étudiants et prenant en compte les problèmes de transition secondaire/supérieur actuels. En outre, le mode de fonctionnement des universités concourt à une diversification des pratiques et non à leur unification.
[4] Le nombre a été réduit à trois au moment de l'analyse des feuilles de travaux dirigés de DEUG Sciences, suite à des regroupements effectués notamment pour des raisons d'économie et de simplification (à l'expérience d'une première « mise à l'épreuve » sur les manuels de lycée).

Dans chaque tableau à double entrée on reporte :

- en horizontal, les rubriques utiles à décrire la dimension d'analyse considérée (par exemple, concernant le tableau des *« aides à la résolution »*, il s'agit des différents types d'aides repérés : indication technique au sein d'un exercice, réponse présente dans l'énoncé de la question, ...etc.)
- en vertical, les thèmes, liés à la notion de dérivée, sur lesquels se centre la tâche analysée (inégalité des accroissements finis, étude des variations...etc.)

La liste de ces *thèmes* se modifie d'un niveau de classe à l'autre en fonction des programmes, tandis que l'évolution des *rubriques* inhérentes à une dimension d'analyse donnée s'impose à nous dans la transition entre l'institution du lycée et celle de l'université au cours de notre travail d'analyse.

Dans la suite de cette thèse, nous commencerons par décrire avec précision la méthodologie particulière utilisée pour la construction de cette grille d'analyse multidimensionnelle (chapitre III). Puis nous ferons fonctionner cette grille sur les deux manuels de la collection « Déclic » de première et de terminale scientifiques, à partir d'une observation minutieuse de ces manuels[5], avant de répertorier de manière plus globale les similitudes et les différences essentielles présentées par les autres manuels du secondaire, en comparaison de ces deux ouvrages (chapitre IV). Cette mise en fonctionnement de la grille sera assortie d'une étude *préalable* de la structure générale des ouvrages (rubriques jalonnant les divers chapitres, ordre de ces rubriques), cette organisation étant forcément instructive en vue de saisir la culture propre à l'institution du lycée. Des extraits d'exercices et de problèmes tirés des manuels, voire des références au bulletin officiel (programmes) pourront illustrer notre propos. Dans ce même chapitre, nous procéderons à une rapide étude de la dérivée dans les exercices et problèmes des épreuves du Baccalauréat[6] de ces dernières années (1994, 1995 et 1996), avant de conclure sur l'environnement observé pour le lycée.

Au chapitre V, nous mènerons une analyse similaire sur les feuilles de travaux dirigés de DEUG A, après avoir précisé les évolutions que nous avons fait subir à cette fin à notre grille d'analyse. La nouvelle grille sera utilisée pour étudier en détail, d'un point de vue *qualitatif* et *quantitatif*, l'environnement d'exercices constitué par les feuilles de l'université de Marne-la-Vallée au sein desquelles la notion de dérivée est explicitement ou implicitement présente. Nous réaliserons ensuite, pour comparaison, une analyse *plus succincte et globale* des divers environnements d'exercices rencontrés dans d'autres universités. Nous nous focaliserons alors surtout sur les spécificités et les points communs de chacun de ces environnements.

Il ne nous est pas apparu pertinent, en revanche, de mener une étude détaillée du contenu des *sujets d'examens* de DEUG A, parce que les feuilles d'exercices utilisées en travaux dirigés nous semblent plus représentatives des pratiques réelles dans les différentes universités, que ne le sont les exercices des manuels de première et de terminale vis à vis du travail en classe au lycée. A cela, il y a selon nous deux raisons : d'une part, en terminale l'épreuve du Baccalauréat influence fortement le travail de l'année, alors que les problèmes d'Annales ne

[5] On pourra consulter en annexe de cette thèse les tableaux de résultats relatifs à l'ensemble de l'observation et de l'analyse effectuées.

[6] Cette étude plus succincte complète et affine notre analyse, en la recadrant sur les *exigences réelles* au niveau considéré, exigences influençant souvent de manière forte les pratiques en classe.

reflètent pas la diversité des exercices d'un manuel de terminale, et d'autre part, les enseignants ne peuvent pas traiter tous les exercices d'un manuel et doivent effectuer des choix. Le problème est différent avec les feuilles de travaux dirigés, conçues par les enseignants eux-mêmes, et a priori calibrées en fonction des *objectifs* qu'ils souhaitent (qualitativement) et peuvent (quantitativement) se fixer.

Une synthèse globale, réalisée à partir de la comparaison des résultats obtenus aux chapitres IV et V pour le lycée et l'université, clôturera notre étude institutionnelle, avec à la clef, pour chacune des deux institutions, un tableau récapitulatif de l'environnement de la dérivée et des relations qu'entretient ce concept avec d'autres notions.

C/ L'ETUDE DES RAPPORTS PERSONNELS A LA DERIVEE.

1°) Le dispositif choisi en rapport avec les objectifs visés.

Le dispositif défini pour cette étude des rapports effectifs, personnels, des étudiants à la dérivée dans la transition secondaire / supérieur, se constitue de deux parties distinctes :

i) L'analyse de tests écrits, auxquels sont soumis des étudiants de DEUG A, à leur *entrée* à l'université,
ii) L'expérimentation d'ateliers, *pendant* la première année de DEUG A, avec des étudiants travaillant en petits groupes.

Les tâches sollicitées dans les tests, théoriquement réalisables à partir des seuls contenus notionnels du lycée, ont été choisies pour leur caractère non routinier en terminale S. Elles se situent déjà, selon nous, *à la transition des cultures* des deux institutions, du fait de difficultés transversales, notamment liées aux *contextes* proposés (travail dans un monde fonctionnel inhabituel, sur des conjectures générales ou dans des situations mettant en jeu une formalisation particulière...). La finalité de ces tests écrits est donc d'observer le comportement et les possibilités d'adaptation des étudiants face à des tâches significatives de la complexité *réelle* des connaissances qu'ils auront à construire en début de DEUG A. Mais les tâches proposées dans ces tests demeurent *atypiques* du point de vue des deux institutions, puisque durant l'année universitaire, les difficultés transversales évoquées *se cumulent* aux difficultés d'apprentissage liées à l'introduction de définitions et d'énoncés nouveaux. Ces tâches sont donc susceptibles, selon nous, de mettre en relief un *hiatus* institutionnel qu'il nous faudra analyser de près à travers les productions des étudiants dans ces tests. L'étude de ces tests, constituée d'une analyse a priori suivie de l'analyse des résultats, figure au chapitre VI de cette thèse.

Les ateliers permettent de développer un travail *interactif* des étudiants en petits groupes sur des questions paradoxalement *peu* travaillées en général, mais recoupant cependant, là encore, des thèmes *emblématiques* de la transition institutionnelle (statut et rôle des définitions, rôle des conjectures et des contre-exemples, travail sur des classes de fonctions définies par des propriétés générales, ...etc.). La fonction de ces ateliers n'est, cette fois, pas seulement *diagnostique*, car il s'agit également ici, à partir des situations construites et testées, d'étudier les possibilités de gestion par l'enseignant des difficultés particulières liées aux principales ruptures préalablement identifiées.

Les objectifs visés par ces activités complexes, de nature à mettre en relief les valeurs culturelles, les relations et les normes institutionnelles différentes à l'université, sont donc multiples : analyser la *dévolution* des tâches et les *médiations* de l'enseignant, proposer des aides *locales* pour une adaptation aux problèmes posés, puis trouver des entrées pertinentes pour, à terme, concevoir enfin des ingénieries *locales* susceptibles de faire évoluer certaines composantes du rapport à la dérivée et plus généralement à l'Analyse (évolution ordinairement laissée à la charge de l'étudiant). La présentation de ces ateliers, avec leur analyse a priori, fait l'objet du chapitre VII de cette thèse, tandis que l'étude des résultats figure au chapitre VIII, juste avant la conclusion finale sur notre recherche (chapitre IX).

2°) Conditions expérimentales générales.

Les deux tests écrits ici analysés, d'une durée de deux heures, ont été soumis respectivement lors des rentrées universitaires de septembre 1995 et de septembre 1996, et les deux fois à une centaine d'étudiants entrant en DEUG Sciences (première année) à l'université de Marne-la-Vallée.

Les ateliers mis au point, au nombre de deux, ont été testés dans les universités de Marne-la-Vallée et d'Orléans pendant des séances de travaux dirigés ordinaires d'une durée de deux heures, ou en dehors de ces séances, avec des étudiants volontaires. Les petits groupes étaient constitués de quatre ou cinq étudiants et leur interventions orales étaient enregistrées au moyen de magnétophones ; un ou deux enseignants dirigeaient la séance, recadrant et aidant également le travail des étudiants des divers groupes.

CHAPITRE III : CONSTRUCTION DE LA GRILLE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE.

I/ CLASSIFICATION SELON LES TYPES DE SOUS-TACHES.

A/ INTRODUCTION. PRINCIPES GENERAUX DE FONCTIONNEMENT.

Le premier des cinq tableaux de classification (cf. annexes de cette thèse) composant notre grille d'analyse des exercices et problèmes des divers manuels concerne les sous-tâches d'une nature bien déterminée, assez simples, constitutives d'une tâche donnée correspondant à une question posée au sein d'un exercice ou d'un problème.

Il est envisageable que la sous-tâche en question s'identifie à la tâche elle-même, si cette tâche est suffisamment élémentaire, et d'une certaine nature (un calcul s'effectuant en une seule étape, par exemple). Rappelons cependant ici l'aspect très relatif du caractère « simple » ou « élémentaire » d'une tâche ; il dépend fortement du niveau de classe auquel nous nous situons, ce dont il faudra tenir compte ensuite dans notre analyse de ces tableaux de classification. Par exemple, pour des raisons d'économie évidentes (difficultés pour faire tenir dans un même tableau, au niveau du DEUG, toutes les sous-tâches qui sont élémentaires au niveau de la classe de première, problèmes de lisibilité), une sous-tâche répertoriée au sein du tableau de classification du niveau n ne se retrouvera peut être plus dans celui du niveau n+1, parce qu'elle sera alors incluse dans une sous-tâche plus vaste, de même nature, et désormais « compilée ».

Nous avons répertorié ainsi, comme différents types de sous-tâches, celles de nature *graphique*, les sous-tâches *de calcul*, celles du type *« Appliquer une définition »*, celles du type *« Appliquer un théorème »* et les sous-tâches *« liées au raisonnement »*. Nous reportons dans cinq colonnes bien distinctes de notre tableau ces cinq types de sous-tâches, et en ligne, nous indiquons les grands *« thèmes »* selon lesquels nous pouvons subdiviser les exercices et problèmes faisant intervenir la dérivée d'une façon ou d'une autre. Ces thèmes sont susceptibles d'évoluer avec le niveau de classe auquel l'apprentissage se situe. Certains apparaissent à l'occasion du passage d'une classe à une autre ; par exemple, « Equations différentielles » ou « Inégalités des accroissements finis » entre la première et la terminale, « Théorème de Rolle » ou « Formules de Taylor » entre la terminale et le DEUG A. D'autres peuvent disparaître, parce qu'ils correspondent à des notions qui ne sont plus reprises au même niveau (avancement du temps didactique, c'est le cas du thème « Nombre dérivé » entre la première et la terminale par exemple), voire à des notions ou des champs de problèmes qui ne sont plus repris du tout, pour des raisons alors écologiques (il en va ainsi du thème « Approximation affine » entre la première et la terminale, du thème « Optimisation » entre la terminale et le DEUG A).

A l'intérieur du tableau, nous mentionnons un certain nombre de renseignements qui sont à la fois d'ordre qualitatif et quantitatif. Nous utilisons naturellement un système de codage qui se veut le plus naturel possible (ND pour « nombre dérivé », FD pour « fonction dérivée », lim pour « limites », ...etc.). L'ensemble de ce codage est indiqué sur le tableau de classification lui-même.

Nous indiquons aussi en deuxième colonne, pour chaque thème, lorsqu'il y a lieu (manuels du lycée), les différentes *« sortes »* de questionnements présentes (Travaux Pratiques, QCM, Tests, Exercices et Problèmes...) et le nombre de questionnements de chaque sorte. En outre, nous avons tenté de distinguer à l'intérieur d'un même thème, et pour une même sorte de questionnements, des *« types »* de questionnements différents, c'est à dire des questionnements que nous considérons comme *« non répétitifs »* les uns par rapport aux autres du point de vue des tâches sollicitées. Nous allons tenter de développer et de préciser dans ce qui suit, l'idée de « proximité » entre questionnements, et quelles variantes nous pouvons accepter entre des questionnements qualifiés de « répétitifs ».

B/ REPRODUCTION ET SYSTEMATISATION DE TACHES : NOTION DE QUESTIONNEMENTS REPETITIFS.

Dans quatre des cinq tableaux d'analyse de l'environnement de questionnements concernant la dérivée, dont le tableau de classification décrit ici, relatif aux « types de sous-tâches », figurent donc pour chaque thème et chaque sorte de questionnement d'un même thème, le nombre total m de questionnements, et juste à côté, pour comparaison, le nombre n de types de questionnements « différents », correspondant à cette famille de m questionnements.
La question qui se pose ici est : *« Selon quels critères peut-on juger que deux exercices ou deux problèmes portant sur un même thème sont, ou non, de types différents du point de vue de la tâche sollicitée ? »*.

Précisons d'emblée, que quels que soient le nombre et la précision des critères sélectionnés, la méthode ici retenue pour classer des exercices ou des problèmes portant sur un même thème (méthode en 0/1, « même type » ou « pas même type ») est trop sommaire pour nous apporter entière satisfaction. Elle présente cependant l'avantage d'être aisément quantifiable et de fournir rapidement à l'observateur une information (certes assez grossière) sur le panel envisagé d'exercices ou de problèmes. Charge à nous de mener ensuite une analyse plus fine, plus locale et qualitative pour repérer les petites variations d'énoncés entre exercices ou problèmes qualifiés de « répétitifs ». Cependant il s'agit surtout ici, à travers cet outil un peu général, de mettre le doigt sur les éventuels phénomènes de répétition et de systématisation, par le biais d'exercices d'entraînement, de phases centrées sur un travail purement technique, et de quantifier ces phénomènes pour chaque niveau d'étude envisagé.

Pour répondre à la question posée, il nous a semblé tout d'abord que les critères permettant de juger de la répétitivité ne peuvent pas être les mêmes concernant des exercices (qui sont constitués d'assez peu de questions) et des problèmes (qui en comportent nécessairement un certain nombre).

On qualifiera de « répétitifs », notamment les exercices portant sur différentes fonctions usuelles particulières et posant à leur propos les mêmes questions, sous réserve que la nature des fonctions considérées ne modifie pas qualitativement la tâche à accomplir (techniques en jeu, définitions et théorèmes généraux utilisés, ...etc.). Plus largement, il s'agira d'exercices dont les questions induisent des connaissances similaires, mises en fonctionnement à un même niveau, le plus souvent le niveau technique, voire le niveau mobilisable, mais alors selon les mêmes modalités. Le contexte doit être le même, les cadres et registres en jeu également.

Des problèmes seront dits répétitifs s'ils mettent en scène les mêmes situations (par exemple : étude d'une fonction rationnelle, étude d'une suite récurrente, etc...) avec des canevas de questions similaires, mettant globalement en jeu les mêmes méthodes, les mêmes idées. Naturellement, il y a une certaine imprécision dans cette définition, due au fait que deux problèmes différents peuvent avoir en commun une certaine partie et pas le reste. Là, il faudra alors juger « au cas par cas » : si la partie qui leur est commune constitue une proportion importante de chacun d'eux, disons au moins les deux tiers de chaque problème, et si ce qui les différencie n'est pas très original par rapport à la gamme de problèmes étudiée, ni du point de vue des situations considérées, ni du point de vue des méthodes recquises, on pourra alors parler de problèmes répétitifs.

A partir de la donnée d'un couple (m,n) correspondant à un thème du cours et à une sorte de questionnement (TP, Tests, Exercices, Problèmes...) donnés, m désignant le nombre total de questionnements de cette sorte pour ce thème là, et n le nombre de types différents de questionnements (autrement dit « non répétitifs ») parmi ces m questionnements, on définit le « taux de répétitivité » de ce type de questionnements pour le thème considéré par la formule : $t = 1-(n/m)$. Plus n est proche de m, plus t est faible, puisque cela signifie qu'il y a d'autant moins de questionnements répétitifs dans ce cas. Pour $n = m$, on a : $t = 0$, car alors les questionnements sont tous de types différents. On a aussi : $t = 0$ pour $m = 1$, puisque alors : $n = m = 1$ (un seul questionnement donc aucune possibilité de répétition). La valeur maximale possible pour t est : $t_m = 1 - 1/m$, dans le cas où il n'y aurait qu'un seul type de questionnement original représenté, pour m questionnements. On voit que t peut s'approcher de la valeur 1 pour un nombre élevé de questionnements répétitifs, mais que t n'atteindra de toutes façons jamais la valeur 1. Naturellement, on peut aussi calculer le taux de répétitivité pour l'ensemble des questionnements d'une même sorte, tous thèmes confondus ; c'est d'ailleurs plutôt à ces taux de répétitivité là que nous nous intéresserons pour l'étude des manuels.

C/ METHODOLOGIE PROPRE A CHAQUE TYPE DE SOUS-TACHE.

Il nous a semblé, en première analyse (a priori), que l'environnement observé pourrait se révéler très évolutif entre le secondaire et le supérieur du point de vue des *« sous-tâches liées au raisonnement »*. En effet, le passage d'une analyse admise à une analyse démontrée risque de correspondre à une certaine augmentation de ce type de tâches en DEUG A, et la nature même de ces activités apparaît susceptible d'une certaine évolution.

C'est ainsi que ces activités se sont vues attribuée en cours d'étude l'appellation *« Autres sous-tâches minoritaires »* en ce qui concerne l'environnement du lycée, car on s'est aperçu que leur proportion restait assez faible dans cet environnement, et qu'elles constituaient une sorte de « patchwork » assez hétéroclite, comprenant notamment l'argumentation, la démonstration, la formalisation, l'interprétation ou la comparaison de résultats, la discussion selon un paramètre. En DEUG A, l'apparition dans les exercices, de propositions générales à établir ou à contredire (en exhibant un contre-exemple), resserre l'ensemble de ces sous-tâches liées au raisonnement autour de la démonstration.

Concernant les sous-tâches de nature graphique, il nous a semblé pouvoir les classer dans notre tableau de classification selon trois grands types :

- Les tracés de courbes et de droites (tangentes, asymptotes...), qui représentent un type de tâches à part, spécifique et fort développé autour des études de fonctions.

- Les interprétations de représentations graphiques fournies par l'énoncé ou obtenues à l'occasion d'une question antérieure. Il peut s'agir de lectures graphiques, de justifications de tracés, de traductions analytiques de tracés, d'associations de courbes deux à deux, ...etc. On précisera à chaque fois, dans le tableau de classification, la nature du graphique éventuel donné dans l'énoncé pour transmettre une information (graphique réalisé sur papier quadrillé, fourni par une calculatrice, ...).

- Les interprétations graphiques de données ou de problèmes, qui s'apparentent au passage inverse du résultat d'un calcul, de l'expression d'une formule, à la signification graphique qui lui correspond.

Il est important de noter ici que la catégorie *« sous-tâches graphiques »* recoupe (bien sûr, très partiellement) celle des sous-tâches *« liées au raisonnement »*. On ne s'étonnera donc pas du fait que certaines sous-tâches sont répertoriées à deux reprises dans le tableau de classification. Effectivement, certaines sous-tâches graphiques d'un type répertorié ci-dessus, par exemple : « Associer deux à deux, parmi des courbes données, celle d'une fonction et de sa dérivée », sont de l'ordre de l'argumentation (ainsi, pour cet exemple, il suffit de repérer un ou deux critères discriminants pour effectuer son choix). D'autres sont de l'ordre de la justification : par exemple, lorsqu'il s'agit de déduire d'une inégalité fonctionnelle la position relative courbe / tangente. Mais naturellement, nous pouvons aussi décrire et recenser des sous-tâches graphiques qui ne correspondent pas à la catégorie *« Sous-tâches liées au raisonnement »*. Par exemple, tracer une courbe après avoir dressé le tableau des variations de la fonction, tracer la tangente à cette courbe en un point donné ou repérer la valeur du nombre dérivé en un point d'une courbe fournie par l'énoncé (simple lecture graphique) sont des pratiques qui relèvent manifestement d'une « autre logique ».

Cependant, la frontière est parfois mince à définir entre les sous-tâches (graphiques ou non) que l'on va considérer comme *« liées au raisonnement »* et les autres. Est-ce que la résolution graphique d'une équation du type $f(x) = m$ (avec m paramètre réel) peut être considérée comme liée à un raisonnement, ou faut-il ne voir là qu'une simple lecture graphique ? De même, le fait d'avoir à identifier, à reconnaître, une propriété graphique à travers une expression algébrique constitue t'il une sous-tâche de l'ordre du raisonnement ? Sans doute cela est-il fonction, en partie, du caractère « routinier » ou « problématique » (au sens de Chevallard) de la situation (donc du niveau d'étude considéré), et de ce qui est plus spécifiquement en jeu (par exemple, présence ou non de points où la tangente est horizontale pour ce qui est de l'équation paramétrée $f(x) = m$).

L'expression *« Sous-tâches liées au raisonnement »* comporte elle-même une certaine part d'imprécision qui n'est pas fortuite : cette expression se veut adaptée à la diversité de tâches observées, notamment au niveau du lycée, qui demeurent difficiles à classer parce qu'elles ne correspondent ni à un calcul, ni à l'application d'une définition ou d'un théorème particuliers, sans toutefois s'identifier à une démonstration formelle. En tout état de cause, compte tenu de la complexité de la situation et d'un certain degré d'incertitude, il nous a semblé nécessaire de répertorier un maximum de tâches au sein de la rubrique concernée, surtout en ce qui concerne la classe de première où le caractère routinier de bon nombre de tâches n'est pas encore développé. En outre, cela était rendu possible au niveau du lycée du fait du caractère très minoritaire de ces sous-tâches, justement rebaptisées *« Autres sous-tâches minoritaires »*.

Concernant les sous-tâches *de calcul*, nous avons décidé d'indiquer pour chaque type de calcul répertorié, quel que soit le thème de l'exercice ou du problème au sein duquel ce calcul a été sollicité, si ce calcul est explicitement (E.S) ou implicitement (I.S) sollicité par l'énoncé. Cela permet d'obtenir un renseignement sur la proportion de tâches calculatoires simples et isolées, et de tâches plus complexes, où le calcul requiert plusieurs étapes ou est à coupler, par exemple, avec l'utilisation d'une technologie (théorème, propriété...). Plus la proportion de calculs (E.S) est importante par rapport à celle de calculs (I.S), plus les phases techniques isolées et élémentaires sont nombreuses par rapport aux tâches plus complexes. De même, les disproportions éventuelles entre *« Sous-tâches de calcul »* d'une part, et *« Application d'une définition ou d'un théorème »* d'autre part, peuvent être instructives aussi à ce niveau d'analyse. Enfin, il convient de tenir compte de l'intitulé même des sous-tâches quantifiées. Par exemple, un calcul de taux d'accroissement (E.S) correspond à une tâche technique plus élémentaire (qui préfigure à l'évaluation d'un nombre dérivé) qu'une étude des variations (E.S) qui nécessitera un calcul de dérivée (E.S ou I.S selon le cas), une étude du signe de cette dérivée (E.S ou I.S) et un tableau des variations avec les limites aux bornes...

Il est également nécessaire, dans le même ordre d'idée, de regarder en parallèle pour les exercices d'un même thème, les concomitances entre la rubrique *« Sous-tâches de calculs »* et la rubrique *« Technologies »*. Par exemple, au thème *« Bijections, équations »*, on peut s'attendre à voir conjointement beaucoup de calculs de dérivées (Rubrique *« Sous-tâches de calculs »*) et d'utilisation du théorème de monotonie (rubrique *« Application de théorèmes »*), sans que cela corresponde nécessairement à une grande diversité de tâches complexes (il s'agit plutôt là de la répétition d'une situation d'exercice assez courante).

Nous nous intéresserons aussi aux équilibres réalisés dans chaque environnement entre les calculs liés à la notions de dérivée et les autres calculs. Cette distinction ne sera d'ailleurs pas propre aux sous-tâches de calcul. On repérera de même pour les sous-tâches du type *« Appliquer une définition »* (resp. *« Appliquer un théorème »*) la part prise par les définitions (resp. théorèmes) qui sont propres à la dérivation et celle prise par les autres définitions (resp. théorèmes). A propos de ces deux dernières sous-tâches, nous indiquerons à chaque fois dans les colonnes concernées si les définitions (respectivement les théorèmes) rencontrés constituent des connaissances qui sont mises en fonctionnement dans les exercices ou problèmes étudiés, à un niveau *« technique »*, à un niveau *« mobilisable »* ou bien à un niveau *« disponible »*.

II/ CLASSIFICATION SELON LES AIDES A LA RESOLUTION.

Nous avons tenté de concevoir ici un tableau qui tienne compte de la diversité (notamment rencontrée dans les manuels du secondaire) des aides qui peuvent être apportées au sein d'un énoncé à un élève ou un étudiant en vue de répondre à une question donnée de l'exercice ou du problème considéré. On reporte dans les colonnes du tableau les différents types d'aide à la résolution possibles, en fonction des divers thèmes (indiqués sur les lignes du tableau) déjà mentionnés dans le tableau de classification par types de sous-tâches.

Il y a tout d'abord les canevas de questions intermédiaires (intitulés « Découpages en sous-questions » dans le tableau de classification), visant à faciliter la résolution d'une question unique, qui pourrait se suffire à elle-même d'un point de vue strictement mathématique. A l'intérieur du tableau, on mentionne ces canevas, à l'aide de « flèches », et le nombre de situations d'exercices ou de problèmes où l'on a rencontré chaque canevas. Donnons un exemple. *« Etudier la position relative de la courbe représentative d'une fonction usuelle f indéfiniment dérivable sur $]a,b[$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse x_0 de $]a,b[$ au voisinage de x_0 »* est une question qui peut se décomposer selon le canevas suivant de sous-questions : l'énoncé fait d'abord considérer une nouvelle fonction φ définie sur $]a,b[$ par $\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x-x_0)$, puis demande successivement de calculer φ' et φ'' sur $]a,b[$, d'étudier le signe de φ'' sur $]a,b[$, d'en déduire les variations de φ' et le signe de φ', d'en déduire les variations de φ et le signe de φ et de conclure.

Dans une autre colonne du tableau, on indique le nombre total q de questions posées, thème par thème et pour chaque sorte de questionnement, dans l'ensemble des questionnements rencontrés, et le nombre p de réponses fournies par les énoncés eux-mêmes (dans le libellé des questions). Cette observation, essentiellement quantitative, se traduit donc dans ce tableau par la donnée de couples (p/q) (p réponses fournies pour q questions posées). Il y a parfois lieu de distinguer les réponses fournies explicitement (notées par un E), implicitement (notées I), ou partiellement (notées P), et celles qui sont relatives ou non à la notion de dérivée. Indications techniques et rappels de cours constituent des aides à la résolution plus locales, qui peuvent aussi intervenir au sein d'un énoncé. Nous leur consacrons une colonne spéciale, en distinguant d'une part les indications techniques ou rappels de cours portant sur la dérivée (notés D) de ceux qui concernent d'autres notions (notés A), et d'autre part les indications techniques qui ont un certain caractère de généralité (notées G) de celles qui sont adaptées à la situation particulière envisagée (notées P).

La colonne suivante consacre les aides de nature méthodologique, qui cette fois peuvent se trouver, soit dans l'énoncé même de l'exercice ou du problème, soit à l'extérieur de cet énoncé s'il se situe au sein d'un manuel. Il est alors intéressant d'observer si cette aide a une portée assez générale lui conférant alors le statut de « méthode » (catégorie G = général), ou plutôt locale donc du côté des « recettes » (catégorie P = particulier), et de déterminer comment elle est mise en valeur par rapport à ce qui est demandé dans l'exercice, si elle se situe dans un voisinage suffisamment proche de cet exercice (même si elle est à l'extérieur de l'énoncé) pour que l'on puisse parler d'une aide explicite (catégorie E).

Au sein d'un manuel donné, on peut trouver des exercices corrigés qui se trouvent être similaires à des exercices qui sont posés aux élèves ou aux étudiants. Ces exercices corrigés peuvent avoir une portée générale (G), ou particulière (P), et être explicitement mis en rapport, dans le manuel, avec les exercices demandés (on les note alors E), ou pas.

Enfin, une dernière colonne nous sert à détailler certaines aides à la résolution particulières qui sont symptomatiques de l'environnement étudié, soit parce que nous les rencontrons de façon assez répétitive au sein de cet environnement, soit parce qu'elles caractérisent un premier rapport à la dérivée (en première) et que l'on ne les retrouvera sans doute plus à un niveau plus élevé, ou au contraire témoignent d'une certaine évolution de ce rapport (en terminale ou en DEUG A). Nous les appelons dans le tableau *« aides à la résolution les plus significatives »*. Il va de soi que nous pouvons retrouver dans cette colonne des éléments déjà mentionnés dans l'une des colonnes *« Découpages en sous-questions »* et *« Indications techniques et rappels de cours »*, mais le plus souvent avec des précisions en sus.

Notons que notre tableau s'enrichit, pour l'étude de l'environnement d'exercices en DEUG A, d'une autre colonne, intitulée *« Absences d'aides »*, où nous pourrons notamment répertorier certaines aides à la résolution rencontrées à un niveau moins avancé de l'apprentissage (respectivement en classe de première ou de terminale), assez systématiques à ce niveau, et qui ont disparu.

III/ CLASSIFICATION PAR TYPES D'OBJETS. STATUTS « OBJET » ET « OUTIL ».

Dans ce troisième tableau de classification, nous nous intéressons aux notions relatives à la dérivation à l'intérieur des différents environnements d'exercices et de problèmes, du point de vue des *« champs conceptuels »* (G.Vergnaud, 1990 – La théorie des champs conceptuels, RDM vol.10/2.3, La pensée sauvage, Grenoble, p.133-p.170) que ces environnements déterminent vis à vis d'elles, à un niveau donné d'enseignement. Autrement dit, nous tentons de caractériser et de comparer, d'un environnement d'exercices et de problèmes à l'autre, les organisations qui se constituent à partir de la façon dont les objets sont mis en jeu, à partir des relations qui se tissent entre ces objets, des théorèmes utilisés sur ces objets et des méthodes associées à ces théorèmes dans les divers questionnements présents.

Nous répertorions tout d'abord, pour les différentes notions relatives à la dérivation, qu'il s'agisse notamment d'objets définis en cours (nombre dérivé, fonction dérivée, vitesse...) ou bien de propriétés concernant ces objets (théorème de monotonie, inégalités des accroissements finis, formules de Taylor...), les situations où ces notions, sont mises en jeu dans leur statut « objet » et celles où elles sont impliquées dans leur statut « outil » (R. Douady) à l'occasion des divers exercices et problèmes. Compte tenu de la diversité des tâches étudiées et d'une probable variabilité dans les aides à la résolution fournies, il nous a semblé intéressant aussi, de préciser à chaque fois pour la notion utilisée, si cette notion apparaît à un niveau explicite (l'énoncé en suggère alors l'introduction) ou bien implicite (nécessité pour l'élève d'y faire référence tout seul).

Ainsi, quatre statuts sont possibles pour chacune des notions qui interviennent dans les exercices et problèmes qui ont été observés : le statut « d'objet explicite », celui « d'objet implicite », le statut « d'outil explicite » et celui « d'outil implicite ». Voici un exemple : Le nombre dérivé a un statut d'objet explicite dans un exercice où l'on demande à l'élève de l'évaluer, pour une fonction donnée, en un point donné. Il a un statut d'objet implicite quand la question porte sur la dérivabilité d'une fonction en un certain point et nécessite de repasser par la définition. Le nombre dérivé a un statut d'outil explicite dans un exercice de calcul de limite où l'on indique à l'élève qu'il doit reconnaître le nombre dérivé en un point d'une certaine fonction. Il a un statut d'outil implicite dans un exercice où l'on demande de déterminer une tangente (par son équation). Notons que la terminologie adoptée ici présente une certaine ambiguïté dont il convient d'être conscient, puisque la distinction entre « outil explicite » et « outil implicite » a déjà été faite par R.Douady (1984) pour désigner tout autre chose (mise en œuvre d'un objet intentionnellement ou outil utilisé en phase d'élaboration en cours d'un concept).

Ce type de classification nous paraît ici pertinent dans la mesure où il pourrait nous aider à caractériser le degré de conceptualisation sollicité chez l'élève par les divers exercices. Ainsi, le statut « objet implicite » nous semble être le plus susceptible, parmi les quatre statuts en présence, de correspondre à un niveau élevé de conceptualisation (même s'il faut croiser cette donnée avec d'autres, et notamment celle relative au degré de généralité de l'exercice). Si une notion est sollicitée en tant qu'objet et non en tant qu'outil, c'est que l'énoncé se centre sur cette notion ; cela peut consister simplement à faire appliquer une définition, celle de l'objet considéré, mais tout aussi bien à faire réfléchir sur cette notion en interaction avec d'autres notions. Par exemple, une question telle que : « Toute fonction dérivable en un point x_0 est-elle continue en x_0 ? » interroge la notion de dérivabilité et la met en jeu en tant qu'objet. Si le statut « objet » est implicite, cela ne peut que renforcer la difficulté de l'exercice. A l'inverse, le statut « d'outil explicite » correspond très grossièrement au niveau de difficulté le plus bas pour ce qui est d'investir une notion donnée au sein d'un exercice, puisqu'il s'agit, en suivant l'indication du texte, d'utiliser cette notion, de l'appliquer, et non de l'interroger. Nous sommes dans une perspective plus « pratique » que « théorique », même s'il faut nuancer notre propos du fait de l'existence d'autres composantes de l'activité à tenir en considération (notamment les difficultés techniques inhérentes à l'exercice), qui peuvent en modifier notablement le niveau de difficulté, indépendamment du fait que la notion est investie comme « outil explicite ».

Thème par thème (lignes du tableau de classification), chaque concept ou énoncé investi dans un exercice ou un problème est indiqué au moyen d'une abréviation (N.D pour « nombre dérivé », TG pour « équation de tangente », A.A pour « formule de l'approximation affine », TH pour « théorème »...), et on mentionne son statut, objet (OB) ou outil (OU), et le caractère explicite (EX) ou implicite (IM) de cette notion mise en jeu. On obtient ainsi en colonne les résultats quantitatifs concernant des triplets de données caractérisant les notions investies dans les divers questionnements (ainsi, par exemple, ND / OU / IM : 8 signifiera que le nombre dérivé est utilisé dans son statut d'outil implicite à huit reprises pour les exercices et problèmes portant sur le thème, indiqué en ligne, qui est concerné). Les répartitions en pourcentages pour les diverses notions, selon les différents statuts possibles, pourront alors être données, globalement et thème par thème, et faire l'objet d'une analyse. Cependant, il est évident que ces résultats statistiques bruts, concernant une répartition des différentes notions selon seulement quatre catégories distinctes (OB/OU à croiser avec EX/IM) devront immédiatement être nuancés à l'aide d'autres données (que nous allons préciser dans ce qui suit) présentes dans le tableau de classification, et notamment le degré de généralité auquel se situe la notion en jeu dans le problème posé.

Notre tableau de classification se constitue ensuite de quatre colonnes permettant de définir la cohérence selon laquelle s'organisent entre eux les concepts, les théorèmes et les méthodes sous-jacents aux questionnements rencontrés dans chaque environnement. Pour chaque thème indiqué en ligne (par exemple, « Approximation affine » ou « Inégalités des accroissements finis »), on liste dans une colonne, qui est intitulée « Connections effectuées », les notions liées à ce thème dans l'environnement de questionnements observé. Dans une autre colonne on répertorie les « champs (réels) d'investigation » correspondant à ce thème (par exemple, le type de fonctions sur lesquelles l'élève va travailler le thème en question dans les exercices et problèmes considérés). Une troisième colonne permet d'indiquer par comparaison les « champs qui sont peu ou pas explorés » au niveau d'enseignement considéré, et une quatrième, intitulée « Conséquences », tend à préciser un peu le type de rapport au savoir qui doit en découler, pouvant inclure notamment d'éventuels théorèmes en actes (G.Vergnaud), une vision algébrisée de l'Analyse, ...etc.

Nous nous intéressons, dans la colonne suivante de notre tableau de classification, à la présence éventuelle de paramètres intervenant dans les questionnements considérés. On distingue alors les cas où les paramètres interviennent à un niveau explicite (notation E dans le tableau), c'est à dire où ils figurent dans le texte de l'énoncé, et ceux où ils interviennent à un niveau implicite (notation I), par exemple du fait de la nécessité d'introduire une formalisation absente du libellé pour résoudre l'exercice. La présence de paramètre(s) implicite(s) dans l'exercice est naturellement une source de difficultés pour l'élève, puisqu'il doit la repérer de lui-même, et aussi parce qu'elle est synonyme d'un certain degré de généralité atteint par l'exercice. C'est notamment à ce titre que la distinction entre paramètres explicites et paramètres implicites nous intéresse. On distingue également les cas (notés dans le tableau à l'aide d'un F) où le paramètre intervient dans l'expression de la fonction considérée, de ceux (notés P) où il intervient au niveau des points (valeurs d'abscisses) envisagés. Il semble assez clair en effet, que la présence d'un paramètre aura généralement davantage de retentissement du point de vue de la nature de l'exercice (voire de sa difficulté technique) s'il intervient dans l'expression de la fonction, que s'il intervient dans la valeur d'un point. Il s'agit donc, là encore, d'une variable intéressante pour notre analyse.

Enfin, la présence de paramètres peut directement influencer la résolution du problème du point de vue des notions relatives à la dérivation (cas notés D). Par exemple, on peut avoir à discuter de l'existence (ou non), d'extrema pour une fonction paramétrée, en fonction de la valeur du paramètre. Mais elle peut aussi porter sur des aspects extérieurs à la dérivation (autres cas, notés à l'aide d'un A). Par exemple, en géométrie analytique, on peut considérer l'équation de la tangente à la parabole d'équation $Y=X^2$ au point d'abscisse x_0 (où x_0 est un réel quelconque non nul), pour établir ensuite une propriété caractéristique d'un point, appelé « foyer de la parabole ». Dans ce second cas, il est assez clair que la seule question relative à la dérivation (déterminer l'équation de la tangente à la parabole au point d'abscisse x_0) n'est guère influencée, dans sa nature et sa difficulté, par le fait que l'abscisse considérée, x_0, soit un paramètre plutôt qu'un réel bien précis.

Dans la colonne suivante de notre tableau de classification, nous répertorions les exercices et problèmes rencontrés en fonction de leur degré de généralité, selon trois catégories distinctes :

- Ceux qui ont un degré de généralité nul (notés N) : ils portent obligatoirement sur des fonctions particulières, il y a une absence totale de paramètre, aussi bien dans le libellé des questions que dans celui des solutions à apporter,

- Ceux qui ont un degré de généralité maximum (notés M) : ils portent au moins sur toute une classe de fonctions usuelles (par exemple, les fonctions polynômes) et mettent donc en valeur une propriété générale de cette classe de fonctions,

- Ceux qui ont un degré de généralité dit « intermédiaire » (notés I) : il y a présence de paramètre(s) dans l'exercice ou le problème, mais on s'attache tout de même à travailler sur une fonction particulière ou une fonction paramétrée d'un type encore assez particulier (les fonctions définies par une relation du type : $f(x) = x^3 + p.x + q$, par exemple). Lorsque le degré de généralisation sera non nul, on précisera dans le tableau de classification sur quoi il porte.

Certains exercices et problèmes constituent des utilisations, des « mises en pratique » (plus ou moins directes, plus ou moins complexes) de notions (définitions, théorèmes) du cours, quand d'autres tendent à apporter une réflexion, un point de vue nouveau sur le cours, voire à le prolonger. Les premiers vont être répertoriés dans une catégorie *« Applications »* et les seconds dans une autre catégorie, *« Questionnement »*, au sein d'une nouvelle colonne de notre tableau. La répartition quantitative des exercices et problèmes liés à la notion de dérivée entre ces deux catégories nous permettra alors d'affiner un peu plus notre perception de l'environnement analysé.

Enfin, une dernière colonne, portant sur les « notions non institutionnalisées en cours mais présentées en exercices », est destinée à compléter les éléments d'information déjà collectés sur les exercices et problèmes que l'on peut cataloguer sous la rubrique *« Questionnement »*. Elle sert à mentionner les notions éventuelles, liées ou non à la dérivation, qui viennent enrichir le champ conceptuel dans lequel on évolue...

IV/ CLASSIFICATIONS SELON LES CADRES ET LES SYSTEMES DE REPRESENTATION SEMIOTIQUE.

Dans deux tableaux de classification différents, on indique des données quantitatives et qualitatives concernant, d'une part les cadres (R.Douady, 1984) impliqués à travers divers questionnements rencontrés à un niveau de classe donné, et d'autre part les registres sémiotiques (R.Duval, 1995), voire plus généralement les représentations sémiotiques, induits par ces questionnements.

Dans la classification selon les cadres mis en jeu, on reporte dans une colonne les divers cadres de travail utilisés, en fonction des divers thèmes possibles des questionnements (indiqués en ligne, comme dans les autres tableaux), et le nombre de fois où chacun de ces cadres apparaît, par rapport au nombre total de questions posées. Les cadres envisagés sont les suivants : cadres algébrique, numérique, graphique, géométrique et enfin, le cadre de l'Analyse.

Dans une autre colonne du tableau, on rapporte à l'aide de simples flèches (→), les changements de cadres inhérents à la résolution des différentes questions, en mentionnant leur nature et leur nombre (par exemple, « Alg → Num : 7 » signifie qu'on rencontre sept passages du cadre algébrique au cadre numérique dans l'environnement étudié et pour le thème considéré). En outre, on précise si ces changements de cadres sont gérés par l'énoncé ou laissés à la charge de l'élève ou de l'étudiant. Une autre colonne permet de lister les éventuels changements de point de vue. Enfin, une dernière colonne est consacrée à des observations générales, de nature plus qualitative.

Pour ce qui est du tableau de classification selon les registres et représentations sémiotiques, nous présentons deux colonnes principales, l'une concernant ce qui est mis en jeu du côté des énoncés et l'autre ce qui est mis en jeu du côté des solutions. Chacune de ces deux colonnes est elle-même subdivisée en trois colonnes. Dans la première figurent des données plutôt quantitatives : quelles sont les fréquences, thème par thème, des différents registres concernés ? A quels niveaux interviennent-ils (et selon quelles proportions), autrement dit s'agit-il plutôt de registres dominants (RD), secondaires (RS) ou minoritaires (RM) ? Dans la deuxième colonne, on trouve des précisions de nature plus qualitative, relatives aux formes particulières introduites (côté énoncés) ou sollicitées (côté solutions). La troisième colonne porte sur les registres des réponses annoncées (côté énoncés) et les registres sollicités implicitement (côté solutions) ; il s'agit là encore de données quantitatives.

Une colonne supplémentaire permet quelques observations sur les registres rencontrés et ceux qui sont absents. Les différents registres sont indiqués à l'aide d'abréviations dont voici la liste :

F = texte en français

E.A = expression algébrique RG = représentation graphique

E.N = expression numérique F.G = figure géométrique

S = schéma I = illustration T = tableau

CHAPITRE IV : ANALYSE D'EXERCICES SITUES DANS L'ENVIRONNEMENT DE LA DERIVEE AU LYCEE.

I/ ANALYSE D'EXERCICES ET DE PROBLEMES DU MANUEL DE PREMIERE S DE LA COLLECTION « DECLIC ».

A/ PRESENTATION GENERALE.

1°) Structure générale des chapitres. Exemples significatifs.

Nous décrivons ici l'organisation, selon différentes rubriques, des chapitres de cet ouvrage (qu'ils portent ou non sur la dérivée), organisation que nous avons résumée par ailleurs, en annexe de cette thèse, à l'aide d'un schéma récapitulatif. Le mode de structuration interne aux divers chapitres, nécessairement lié au contenu proprement dit et à une certaine mise en perspective de ce contenu, constitue en effet un premier indice du rapport au savoir qui caractérise ce manuel, concernant en particulier la notion de dérivée ici étudiée.

Dans ce manuel, on trouve en amont du cours une rubrique « Tests préliminaires » et une autre « Activités préparatoires », et en aval, les rubriques « Utilisations », « Travaux pratiques », « Savoir-faire », « Tests », « Exercices » et « Problèmes ».

Certaines de ces rubriques servent clairement à mettre en relief des techniques ou résultats de cours très ciblés et en font l'enjeu principal du chapitre. Ainsi, les « Tests préliminaires », élémentaires, permettent-ils à l'élève de cerner rapidement l'outillage technique, préalable et minimal, dont il aura besoin au cours du chapitre pour effectuer les exercices les plus courants. Par exemple, les tests de la page 156 du chapitre « Dérivation » ont pour fonction de rappeler à l'élève les premiers gestes relatifs aux pratiques liées à cette notion : évaluer, graphiquement ou algébriquement, un coefficient directeur, factoriser et simplifier un taux d'accroissement, calculer sa limite, tout cela évidemment restreint aux cas élémentaires des fonctions polynômes, rationnelles ou irrationnelles. La rubrique « Utilisations » confirme cette démarche en présentant, au terme du cours, trois ou quatre exercices corrigés parmi les plus « standards », avec des encarts méthodologiques en plusieurs points précisant la démarche à adopter, les techniques (parfois très locales) et les théorèmes (du cours) à appliquer. Voici un exemple relatif à la dérivation (page 165) :

À l'aide de la définition, calculer le nombre dérivé en $a = 3$ de la fonction :

$f : x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$, définie sur $[-5 ; 5]$.

méthode

Pour obtenir le nombre dérivé de f en a :

- *On exprime le rapport* $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *en fonction de h.*
- *On simplifie par h l'expression obtenue.*
- *On détermine sa limite quand h tend vers zéro.*

De même, la présence des rubriques « Savoir-faire » et « Tests », présentées à proximité l'une de l'autre dans chaque chapitre, relèvent d'une logique similaire. La première de ces deux rubriques consiste en un tableau récapitulatif présentant diverses tâches très courantes à effectuer (ici, sur des fonctions usuelles : « Calculer un nombre dérivé », « Déterminer l'équation de la tangente en un point », « Déterminer le sens de variation d'une fonction », « Montrer qu'une fonction s'annule une seule fois sur un intervalle »), et en regard de ces tâches, les moyens correspondants (« techniques » ou « technologiques » au sens de Chevallard) pour les effectuer et les références de cours à consulter, relatives à ces moyens.

Juste en dessous (rubrique « Tests »), l'élève trouvera une liste de questions indépendantes lui permettant de vérifier sa bonne compréhension de la rubrique « Savoir-faire ». Un tel mode de présentation, au sein duquel chaque question du test nécessite de façon explicite, à propos de la dérivée, une des données (et rien d'autre !) de la rubrique « Savoir-faire », située à proximité immédiate, renforce les effets de contrat en focalisant l'intérêt du chapitre autour des quelques éléments du cours qui sont concernés. La situation de ces tests (en tête de la liste des exercices) abonde aussi dans ce sens.

Savoir-faire

SAVOIR	COMMENT	RÉFÉRENCES
Calculer le nombre dérivé d'une fonction en a	• utiliser la définition • utiliser le théorème sur l'approximation affine de f • calculer $f'(a)$ si l'on connaît la fonction dérivée	**Cours, p. 160** **Cours, p. 161** **Cours, p. 162** **Utilisation 1**
Montrer qu'une fonction est dérivable ou non en a	• utiliser la définition • utiliser le théorème sur l'approximation affine de f	**Cours, p. 160** **Cours, p. 161** **tp 1 et 5**
Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point d'abscisse a	• si f est dérivable en a, le coefficient directeur est $f'(a)$	**Cours, p. 160**
Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a	• si f est dérivable en a, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente dont une équation est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$	**Cours, p. 160** **Utilisation 1**

tests

Justifier les affirmations suivantes :

1° Le nombre dérivé de la fonction : $f : x \mapsto (x-1)(x^2+1)$ en 1 est 2.

2° Le nombre dérivé de la fonction : $f : x \mapsto (3x^2-1)^2$ en 0 est 0.

3° Le nombre dérivé de la fonction : $f : x \mapsto 3 + 2x + 4x^2 + 5x^3$ en 0 est 2.

4° Le nombre dérivé de la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{2x-1}$ en 2 est $f'(2) = -\dfrac{1}{9}$.

5° La fonction $f : x \mapsto 2 - 3x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ est dérivable en 0.

6° La fonction $f : x \mapsto 3 - 2(x-1) + 3(x-1)^2$ est dérivable en 1.

8° Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{3x-2}$ au point d'abscisse 1 est -1.

9° La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

10° La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto -1 + 3x + 4x^2 - 5x^3$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x - 1$.

11° La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto -2 + 3(x+1) - 5(x+1)^3$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 3x + 1$.

<u>Extrait tiré de la page 172 du manuel de première S :</u>

Naturellement, dans ce contexte, le cours proprement dit est en conformité avec cette architecture d'activités qui l'encadrent, c'est à dire qu'il est simplifié dans sa forme (occupant entre 15% et 20% seulement des pages consacrées à chaque chapitre, comportant peu de résultats généraux, mais dont les principaux sont toujours nettement mis en valeur à l'aide d'encadrés, de couleurs, ...), et succinct sur le fond (très peu de démonstrations, de discussions autour des hypothèses des théorèmes, de recherche de contre-exemples, mais présence assez forte en revanche de tableaux récapitulatifs ou autres, de schémas ou d'explicitations d'exemples préfigurant déjà aux exercices types des autres rubriques).

Notons cependant la présence d'une rubrique « Démonstrations de cours » au sein de la liste d'exercices, mais qui semble davantage participer d'une tentative pour renforcer la cohésion entre les quelques éléments essentiels du cours et les exercices situés en regard, que d'une volonté affichée de vraiment former l'élève à la démonstration. En effet, d'une part cette rubrique est toujours assez sommaire (notamment en ce qui concerne les chapitres sur la dérivation), et d'autre part, les thèmes abordés et/ou la façon dont est posé l'exercice engagent des procédures techniques ou la connaissance de théorèmes dont le cours fait lui-même déjà l'objet. C'est le cas dans les chapitres portant sur la dérivation, où les démonstrations de cours proposées en exercices portent d'une part sur la dérivation de l'inverse d'une fonction, du quotient de deux fonctions, de la fonction « racine carrée », et d'autre part sur la résolution des équations : $\cos(x) = a$ et $\sin(x) = a$. Dans le premier cas, l'exercice est suffisamment « décortiqué » pour se ramener dans chaque question à des techniques standards (mise sous forme canonique du taux d'accroissement entre x et a, cette forme étant fournie par l'énoncé, passage à la limite, puis déduction de la fonction dérivée). Dans le second cas, il s'agit d'appliquer sur des intervalles bien choisis (mais qui sont fournis par l'énoncé) le théorème concernant l'existence et l'unicité de la solution d'une équation (situé dans le paragraphe du cours intitulé « Dérivée et stricte monotonie »), de façon similaire à ce que l'élève doit réaliser dans bien d'autres exercices types ; la seule modification porte ici sur la présence du paramètre a.

2°) Position des chapitres sur la dérivée au sein du manuel.

Dans cet ouvrage de la collection « Déclic », nous n'avons trouvé d'exercices utilisant les notions relatives à la dérivation que dans les deux chapitres centrés sur ce thème, intitulés « Dérivation » et « Applications de la dérivation », qui sont les deux derniers chapitres d'Analyse (n°6 et n°7) portant sur les fonctions (les trois derniers chapitres du manuel ayant trait aux suites numériques et aux probabilités). Signalons pour mémoire, que les premiers chapitres portent sur l'Algèbre (systèmes linéaires, équations et inéquations du second degré), et en Analyse, sur les fonctions numériques en général (parité, périodicité, opérations...) et les fonctions polynômes et rationnelles en particulier, et la notion de limite d'une fonction. Naturellement, cette situation des chapitres de dérivation (plutôt en fin d'ouvrage) va correspondre en contrepartie à la présence, dans la plupart des exercices, d'une plus forte proportion de questions nécessitant d'autres connaissances que celles relatives à la dérivation ou portant même uniquement sur ces connaissances (réinvestissement de notions sur les équations et inéquations du second degré étudiées antérieurement dans l'année, et de notions sur les polynômes, la parité, les asymptotes, ...etc.).

Il sera alors instructif d'analyser dans ce qui suit, relativement à cet environnement d'exercices et de problèmes des deux chapitres concernés, l'agencement réalisé et les proportions observées au sein de ces exercices entre, d'une part, les notions (nouvelles) propres à la dérivation, et d'autre part, des connaissances plus anciennes. Les relations qui vont se tisser entre ces deux composantes de l'environnement à travers certains types de questionnement devraient nous permettre ainsi de caractériser de façon plus précise cet environnement.

B/ CLASSIFICATION PAR TYPES DE SOUS-TACHES.

1°) Répartition des différentes sortes de questionnement. Reproduction et systématisation de phases techniques.

A partir du remplissage, pour le manuel de première S de la collection « Déclic », de la grille qui a été construite, nous pouvons commencer à présent une analyse des diverses informations contenues par les cinq tableaux de classification (annexés à cette thèse) constituant cette grille pour le dit manuel, en commençant par le tableau qui concerne les « Types de sous-tâches ».

Nous tirons tout d'abord quelques informations de la deuxième colonne de ce tableau, qui nous indique l'importance prise par les différentes sortes de questionnement présentes et le degré de répétitivité de certains exercices ou problèmes inhérents à un même thème.

Nous avons comptabilisé sur les deux chapitres de dérivation du manuel, 94 exercices (dont 5 exercices portant sur des démonstrations de cours), pour 42 problèmes, 28 tests, et seulement 9 travaux pratiques. Comme on a déjà pu le signaler dans la présentation générale, les exercices de la rubrique « Démonstration de cours » occupent une faible place dans cet univers, bien délimitée et annoncée (début de liste d'exercices). Le nombre de travaux pratiques peut certes sembler aussi assez faible vis à vis du nombre d'exercices ou de problèmes, mais ces T.P, plus longs et couvrant (comparativement au moins) une plus grande diversité de thèmes que les exercices ou les problèmes, proposent aussi un approfondissement plus consistant et correspondent donc à une échelle de temps très différente. Ils se caractérisent par un taux de répétitivité ($t = 1- (n/m)$) nul, puisqu'ils présentent tous une originalité importante les uns par rapport aux autres. Les thèmes abordés dans les T.P de ce manuel sont en effet les suivants : « Etude de la dérivabilité d'une fonction en un point, à gauche, à droite ; interprétations graphiques » (fonctions à radicaux ou à valeurs absolues), « Approximation affine et erreur », « Horizon théorique d'une planète », « Propriétés des tangentes à la parabole » (notion de foyer), « Zéro d'une fonction et trigonométrie » (calcul approché des lignes trigonométriques de $\pi/9$ au moyen de l'étude d'une fonction, lien sollicité entre Algèbre et Analyse), « Etude de la fonction tangente », optimisation en économie, en géométrie. Pour comparaison avec ces travaux pratiques, notons que la majorité des problèmes posés s'attachent à quelques rubriques bien spécifiées (facilement observables grâce à la présence de titres intermédiaires à l'intérieur de la liste de problèmes). Ainsi,

« Etudes de fonctions », « Géométrie analytique », « Modélisation et optimisation » représentent 88% des problèmes posés.

Mais observons maintenant plus précisément les phénomènes de répétitions d'exercices ou de problèmes, à travers les données quantitatives dont nous disposons (comparaison du nombre m de questionnements et du nombre n de types de questionnements différents parmi eux, taux de répétitivité). La rubrique « Tests », déjà évoquée dans la présentation générale, permet en particulier le travail de premiers automatismes à travers quelques tâches bien ciblées, centrées sur les aspects techniques, et qu'il s'agit de rendre routinières pour l'élève (thème « nombre dérivé », on a : m=4 et n=1, thème « équation de tangente » : m=4 et n=1, thème « variations et extrema » : m=7 et n=2, ...etc.). Mais on constate aussi, en observant la première colonne du tableau d'analyse, la présence d'une répétitivité assez développée des exercices proposés (thème « étude de la dérivabilité », on a : m=7 et n=3, thème « équations de tangentes » : m=11 et n=5, thème « variations et extrema » : m=19 et n=9, thème « étude de fonctions » : m=8 et n=3). Concernant les problèmes, on constate que m=16 et n=5 pour le thème « études de fonctions », autrement dit, il n'y a que cinq canevas différents d'études de fonctions pour seize problèmes proposés (même s'il y a toujours de petites nuances d'un problème à l'autre, mais portant sur une ou deux questions seulement). Encore faut-il préciser que les différences entre ces cinq canevas découlent essentiellement du fait que l'on s'attache à étudier des types de fonctions différents (fonctions polynômes, rationnelles, et trigonométriques, pas de fonctions irrationnelles sous cette rubrique). Il y a alors des spécificités dans l'étude pour chacun de ces types, d'ailleurs souvent sans aucun rapport avec le problème de la dérivation (mise sous forme canonique et recherche d'asymptotes pour les fractions rationnelles, parité et centres ou axes de symétrie pour les fonctions trigonométriques, ...etc.), que les énoncés exploitent et mettent largement en évidence, et qui recoupent et conditionnent l'essentiel des différences entre les divers types de problèmes.

Il convient aussi de constater la présence de suites d'exercices similaires ou très proches, présentant entre eux des modifications parfois mineures d'énoncé, ces suites d'exercices étant destinées à permettre un apprentissage et une autonomie progressifs de la part de l'élève. Exemple : *« Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution sur I... »* (ex.31 p 206) *« Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x)=0... »* (ex.32 p 206)

31 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle I, et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel α.
a) $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, $I = [2 ; 3]$;
b) $f : x \mapsto x^5 - 2x^4 - 1$, $I = [2 ; 3]$;
c) $f : x \mapsto x^3 - 3x + 3$, $I = [-3 ; -2]$;
d) $f : x \mapsto x - 1 + \frac{4}{x^2}$, $I = [-2 ; -1]$.

32 ★ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de chacune des solutions.
a) $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 - 1$;
b) $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$;
c) $f : x \mapsto x^4 - 3x^3 - 1$;
d) $f : x \mapsto x^4 - 4x^2 + 4x + 2$.

Pour finir, précisons que le taux de répétitivité global des exercices est de 0,52 et que celui des problèmes est de 0,38. Il y a donc une répétitivité beaucoup plus élevée pour les exercices que pour les problèmes (ce qui était prévisible : il est plus facile d'effectuer un travail d'entraînement technique bien ciblé à travers des exercices que de le faire à travers des problèmes). Nous pourrons ultérieurement comparer ces valeurs avec celles des taux de répétitivité de l'environnement du « Déclic » de terminale.

2°) Répartition générale.

La première chose que l'on constate en observant, même de façon très superficielle, le tableau de classification par types de sous-tâches, c'est la part très grande prise par les tâches de calcul par rapport aux autres types de sous-tâches. Ainsi recense t'on, en tenant compte de l'environnement global d'exercices post cours non corrigés (comprenant : Travaux pratiques, Tests, Exercices et Problèmes), 1057 sous-tâches de calcul (explicites ou implicites) pour seulement 238 sous-tâches graphiques, 612 applications de théorèmes, 113 utilisations de définitions et 104 sous-tâches minoritaires non graphiques (liées au raisonnement).

Cela donne en pourcentages :

Sous-tâches de calcul :	49,76%
Sous-tâches graphiques :	11,21%
Applications de théorèmes :	28,81%
Utilisations de définitions :	5,32%
Sous-tâches minoritaires non graphiques :	4,90%

Total : 100%

3°) Analyse des sous-tâches de nature graphique.

Les questions rattachées à une tâche de nature graphique sont assez variées, mais avec une répartition très hétérogène, les tâches standards du style *« Tracer la courbe représentative d'une certaine fonction »* (27%), *« Tracer la tangente en un point donné de cette courbe »* (15%), *« Effectuer le tracé d'autres types de droites »* (7%) correspondant approximativement (49%) à la moitié de ce type de questions. Viennent ensuite les tâches de « lecture » à effectuer à partir d'une représentation graphique fournie par l'énoncé (28%), en général présentée dans ce manuel sur papier quadrillé (25%), plus rarement sur fond blanc (3%). Il peut s'agir de lire sur cette représentation graphique la dérivabilité ou le nombre dérivé en un point, l'équation de la tangente en un point, les variations ou la présence d'un extremum sur un intervalle, l'image d'un intervalle par une fonction ou le caractère bijectif d'une certaine application, ...etc.

Notons que les points à considérer sur ces représentations graphiques sont toujours à coordonnées entières et les pentes en ces points sont indiquées si et seulement si cela est utile pour répondre aux questions posées (il n'y a jamais d'informations superflues). Elles sont alors représentées par de longues flèches (souvent d'une couleur différente), pouvant suggérer à la fois l'idée de pente et celle de droite tangente, et passant là encore, par deux points à coordonnées entières (qui sont eux-mêmes parfois mis en évidence à l'aide d'une croix). Il s'agit donc là, très clairement, d'un type de tâche assez spécifique de l'institution scolaire du lycée, à la fois du fait de la nature de cette tâche (travailler à partir d'une représentation graphique qui est fournie) et des circonstances dans lesquelles l'élève est invité à s'y livrer (les caractéristiques de la représentation fournie l'orientent nettement sur le « bon chemin »).

Les autres sous-tâches de nature graphique (23% en tout), plus diversifiées, sont aussi assez disparates et minoritaires. Elles correspondent encore parfois à des tâches à réaliser à partir de représentations graphiques fournies par l'énoncé (8%), mais il faut cette fois associer deux à deux des courbes représentatives (la fonction et sa dérivée) ou, par exemple, traduire analytiquement différentes conditions (extremum, tangente, appartenance d'un point à la courbe), pour déduire de la représentation graphique donnée l'expression de la fonction. Quant aux autres tâches (correspondant à la différence, soit 15%, et généralement au passage inverse, du calcul au graphique), assez variées, elles concernent plus rarement la dérivation.

L'élève est le plus souvent (part de 11%) invité à interpréter graphiquement une donnée (parité, périodicité, inégalités fonctionnelles, ...etc.) ou un problème posé (équations ou inéquations, paramétrées ou non, par exemple *« résoudre graphiquement l'équation f(x)=m selon la valeur de m »*, équations trigonométriques très simples par utilisation du cercle trigonométrique, ...etc.) sans grand rapport avec la dérivation. Dans seulement 3% des situations, il doit interpréter graphiquement un fait concernant la dérivée : déduire de calculs de limites l'existence de demi tangentes à gauche et à droite en un point, déduire d'une formule une propriété (fameuse) pour la parabole définie par $f(x)=x^2$ (parallélisme d'une corde et de la tangente au point d'abscisse médiane), ou encore, interpréter vis à vis du graphique des expressions algébriques (des coefficients directeurs de tangentes ou de sécantes), pour en tirer des informations (mais en l'occurrence il s'agit de « Travaux pratiques »). Enfin, on peut solliciter de sa part (1% des cas) une *argumentation* à propos d'une représentation graphique (par exemple, fournir puis justifier tel tracé, identifier une tangente comme normale au rayon pour un demi-cercle, ...etc.).

Pour conclure, disons que les sous-tâches graphiques entretenant un certain rapport avec la dérivation restent majoritaires dans les chapitres étudiés (81% des cas), mais lorsqu'il s'agit d'interpréter des courbes fournies par l'énoncé, l'élève n'est généralement pas confronté à une tâche de production complexe. On lui demande, ici de donner la valeur du nombre dérivé en tel point, là de repérer variations et extrema de la courbe, ou encore d'associer des courbes entre elles, ...etc. De plus, on ne recense guère d'exercice « inversé », où l'élève doive ainsi, notamment, à partir de conditions prédéterminées sur la fonction dérivée (par ex, f '(0)=1, f ' est strictement croissante sur R, f ' tend vers 1 à l'infini, ...etc.), interpréter graphiquement ces conditions pour en déduire une situation de courbe « plausible » pour f. C'est cependant ce type de démarche auquel il faut être « rôdé » lorsque l'on recherche des exemples ou des contre-exemples pour une certaine propriété.

Enfin, mais ce point est sans doute caractéristique de l'installation d'un rapport initial à la dérivée, une observation globale des tâches dans ces deux chapitres d'exercices et de problèmes montre que les seules sous-tâches graphiques (liées à un problème concernant la dérivée), auxquelles l'élève aura à se livrer, dont nous venons de parler, sont toutes explicitement sollicitées par l'énoncé. En aucun cas, l'élève n'a ici à prendre lui-même la décision d'effectuer un schéma ou une représentation graphique qui ne lui serait pas demandé(e) ou fourni(e), alors qu'il (ou elle) se révèle indispensable à la compréhension ou à la résolution d'une question donnée engageant le concept de dérivée. Cela n'est évidemment pas le cas si la question porte sur d'autres notions, plus anciennes que la dérivée, correspondant aussi, en réalité, à d'autres situations, plus familières, prenant place dans le cadre algébrique). Par exemple, l'élève peut avoir à résoudre un problème de géométrie analytique au cours duquel la nécessité d'effectuer une figure va rapidement s'imposer, sans que cette figure lui soit demandée pour autant dans l'énoncé, une telle nécessité s'imposant ici d'elle-même plus aisément à l'élève compte tenu de son vécu.

4°) Analyse des sous-tâches de calcul.

Premier constat, qui peut surprendre, à l'intérieur de la rubrique « Sous-tâches de calcul », la part des calculs internes à la dérivation est seulement de 42,95%, décomposée en « calculs de nombres dérivés » (3,22%), « calculs de fonctions dérivées » (23,56%), « études (internes à l'étude des variations) du signe de la dérivée » (9,18%), « résolutions (internes à l'étude des extrema) d'équations du type f '(x)=0 » (1,32%), « calculs d'équations de tangentes » (3,78%), et « calculs d'approximations affines » (1,89%).

Une majorité écrasante des exercices proposés portant sur des fonctions usuelles particulières, le calcul formel de fonctions dérivées à l'aide des théorèmes généraux occupe naturellement une place de choix dans cette répartition des sous-tâches de calculs internes à la dérivation. Cela explique aussi la faible place prise (en comparaison) par le calcul de nombres dérivés, qui s'effectuent d'ailleurs eux-mêmes dans plusieurs exercices de début de chapitre par l'entremise des fonctions dérivées, et non à l'aide de la définition initiale (prise de relais).

La facilité, ici fréquente, à déterminer la fonction dérivée (ce qui offre la possibilité d'études globales), rejette dans une certaine mesure à l'arrière plan les tâches centrées sur le nombre dérivé en particulier. Par exemple, les cas où un calcul de limite du taux d'accroissement est rendu nécessaire par la situation pour étudier la dérivabilité en un point, et où la détermination du nombre dérivé éventuel présente donc un intérêt, restent ici assez marginaux. De même, la différence (assez importante) entre la part des calculs de fonctions dérivées (23,56%) et celle des études de signe liées à la détermination des variations d'une fonction (9, 18%) s'explique par la présence d'un certain nombre d'exercices d'entraînement au seul calcul de dérivées, ou d'usage de la dérivée à d'autres fins (calculs de vitesses instantanées, de limites, de coefficients directeurs de tangentes, ...etc.). Notons encore que les calculs d'approximations affines sont regroupés dans le seul chapitre « Dérivation » (on ne trouve rien sur ce sujet dans le chapitre « Applications de la dérivation »), ce qui pourrait correspondre à une marginalisation encore accrue dans la pratique réelle de la classe.

Cependant, l'observation principale à effectuer, concernant les sous-tâches de calcul, tient dans le fait que 57,05% d'entre elles sont externes à la dérivation (ou présentées de façon externe). Les résolutions (isolées) d'équations ou d'inéquations (premier ou second degré), de système d'équations, et les majorations et encadrements représentent 12,77%, les transformations algébriques (par exemple, factorisations de polynômes, calculs isolés, explicitement sollicités, de taux d'accroissement, ...etc.) 6,72%, les applications numériques (voir par exemple le calcul de valeurs approchées de solutions d'équations par dichotomie) représentent 7,47%.

A cela s'ajoutent les sous-tâches thématiques suivantes :

.Calculs de géométrie analytique (conditionnements sur des tangentes, recherches de points, d'équations de droites, calculs de distances...)	: 7,38%
.Calculs visant à déterminer des ensembles de définition	: 6,81%
.Calculs de limites	: 4,64%
.Calculs établissant parité, périodicité, présence d'un centre de symétrie, une expression algébrique nouvelle suite à un changement de repère...	: 3,40%
.Calculs trigonométriques	: 2,84%
.Calculs pour étudier la présence d'asymptotes (mise sous forme canonique d'une fraction, détermination de l'asymptote, étude de la position relative par rapport à la courbe)	: 2,18%
.Autres calculs (par exemple de modélisation)	: 2,84%

Ainsi donc, une part importante des exercices et des problèmes des deux chapitres du manuel est consacrée à situer la dérivation dans un contexte de connaissances plus anciennes sur les fonctions, à mettre en évidence la cohérence générale des études globales, et à cerner les apports de la notion de dérivée dans diverses situations mathématiques (géométrie analytique) ou non (optimisation en physique, en économie, lien avec la notion de vitesse, etc...).

En somme, les sous-tâches proposées mettent davantage en perspective les calculs faisant intervenir la notion de dérivée et donnent à voir à quoi ils peuvent servir, voire s'en servent comme relais à autre chose, qu'elles ne se centrent sur ces calculs. Ainsi, dans le chapitre « Applications de la dérivation », plusieurs exercices ayant pour thème la résolution des équations trigonométriques se traitent intégralement sans plus avoir à faire appel à la notion de dérivée. Le théorème de monotonie, puis celui sur l'existence et l'unicité de la solution d'une équation du type f(x)=0 (avec f dérivable et strictement monotone sur un intervalle I), ont engendré dans le cours un paragraphe spécialement consacré à la résolution des équations du type : cos(x) = a et sin(x) = a (où a est un paramètre réel). Ensuite, il n'y a plus qu'à se référer à ce paragraphe, qui représente une « excroissance » dans le cours sur la dérivation (application d'application), pour traiter les exercices posés concernant des équations trigonométriques du même type ou se ramenant à ce type (voir ci-dessous les exercices n°38 à 40 pages 206-207), selon des modalités indiquées par le texte. Il y a un théorème, autrement dit une technologie de référence, qui supprime la nécessité d'effectuer des calculs de dérivées, de déterminer le signe de ces dérivées, ...etc. et le cas échéant, remplace ce travail par des calculs algébriques élémentaires plus anciens (transformations, changements d'inconnue, résolution d'équations du second degré, ...etc.).

38 Résoudre chacune des deux équations par chacune des méthodes suivantes :

1° en utilisant la définition du sinus et du cosinus sur le cercle trigonométrique ;

2° en se ramenant à une égalité de la forme $\cos a = \cos b$:

a) $\cos x = \sin x$; b) $\cos x = -\sin x$.

39 Changement d'inconnue

Résoudre les équations suivantes en effectuant un changement d'inconnue ($X = \cos x$ ou $X = \sin x$).

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$;

b) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$;

c) $2\cos^3 x + (2+\sqrt{2})\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x = 0$.

40 ★ Même exercice.

a) $2\sin^3 x - \sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{3} = 0$;

b) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$;

c) $\cos 2x + \sin x = 0$; d) $\sin 2x + \cos x = 0$.

Voici à présent quelques résultats statistiques permettant d'affiner notre analyse des sous-tâches de calcul des chapitres de dérivation.

.Sous-tâches de calcul internes à la dérivation :		
Implicitement sollicitées	:	51,6 %
Explicitement sollicitées	:	42,2 %
Explicitement sollicitées + réponse fournie	:	6,2%
Taux de questions répétitives	:	24,2%
.Sous-tâches de calcul externes à la dérivation :		
Implicitement sollicitées	:	24,5%
Explicitement sollicitées	:	63,8%
Explicitement sollicitées + réponse fournie	:	11,7%
Taux de questions répétitives	:	17,8%

Ces résultats peuvent présenter à première vue un caractère paradoxal, dans la mesure où les sous-tâches de calcul internes à la dérivation sont majoritairement (51,6%) sollicitées implicitement, alors qu'elles sont nouvelles, tandis que les sous-tâches de calcul externes à la dérivation sont très majoritairement (63,8% + 11,7% = 75,5%) sollicitées explicitement, alors qu'elles sont anciennes. Ce phénomène tient en réalité à la faible variété des premières et à la grande variété des secondes. Tandis que d'un côté, l'essentiel des calculs à produire tourne « grosso modo », soit autour du calcul d'un nombre dérivé (détermination d'équation de tangente, d'approximation affine ou du nombre dérivé lui-même), soit autour du calcul d'une fonction dérivée (avec résolution éventuelle d'une inéquation pour avoir le signe de la dérivée), de l'autre côté, l'élève peut être confronté à des tâches très diverses, selon qu'on lui demande de majorer une expression, de déterminer une asymptote oblique ou d'effectuer un calcul de géométrie analytique. Les deux taux de questions répétitives (24,2% côté « avec dérivée », et seulement 17,8% côté « sans dérivée ») confirment cette analyse. Il est donc fort peu étonnant, que les sous-tâches de calcul qu'il va avoir à mener, soient plus souvent explicites à travers l'énoncé de l'exercice, dans le second cas que dans le premier.

En d'autres termes, ce qui apparaît à l'analyse, c'est que la diversité et la complexité des objectifs étant bien moindre pour les questions touchant au concept, nouveau, de dérivée, que pour des questions relevant exclusivement de notions plus anciennes, l'aide apportée par l'énoncé sous la forme d'une certaine proportion de sous-tâches explicitement sollicitées plutôt qu'implicitement sollicitées est aussi plus élevée dans le second que dans le premier cas. Cela est confirmé par le pourcentage de réponses fournies par l'énoncé (seulement 6,2% côté « avec dérivée », et 11,7% côté « sans dérivée »).

Notons la présence d'une assez forte proportion (globale) de sous-tâches de calcul du type E.S (explicitement sollicitées par l'énoncé) :

(48,4%	x 42,95%)	+	(75,5%	x 57,05%)	=	63,86%
(E.S)	(dérivée)		(E.S)	(hors dérivée)		

Ce pourcentage de 63,86% peut être considéré comme important, si l'on garde présent à l'esprit le fait que dans une tâche très standard telle que *« étudier les variations de la fonction »*, on comptabilise déjà deux calculs non explicites : celui de la dérivée et la résolution d'une inéquation. Le déséquilibre mentionné plus haut, entre les activités de calcul et les autres activités, considéré conjointement avec cette proportion élevée d'activités calculatoires E.S, et une proportion également respectable (12,77% + 6,72% + 7,47% = 26,96%) de sous-tâches calculatoires « de base », ne portant pas sur la dérivée (décrites plus haut : majorations simples, transformations algébriques élémentaires, applications numériques, ...etc.) penchent plutôt pour un environnement d'exercices correspondant à des tâches bien découpées, et plutôt simples que complexes.

5°) Sous-tâches du type « Appliquer une définition ».

Si l'on reprend les pourcentages par types de sous-tâches, fournis au paragraphe 2°) concernant la répartition générale, on constate que la part prise par les sous-tâches consistant à utiliser une définition, que cette définition soit propre aux chapitres de dérivation ou plus ancienne, est très faible (5,32%).

Cela nous amène à nous interroger sur le statut des définitions dans l'environnement d'exercices et de problèmes considérés, non seulement à l'intérieur du thème nouvellement abordé ici, de la dérivation, mais aussi, plus généralement, en Analyse. Il est clair, par exemple, comme nous l'avons déjà exprimé plus haut, que la définition du nombre dérivé par limite du taux d'accroissement est peu sollicitée ici, puisque le calcul formel des fonctions dérivées prend (avantageusement) le relais dans le cas de fonctions usuelles particulières (polynômes, fractions, fonctions trigonométriques, ...etc.), cas qui concerne la quasi totalité du champ d'étude ici. Cette définition est donc surtout utilisée dans quelques cas un peu problématiques (très rares) d'étude de la dérivabilité en un point. Par suite, c'est dans ces cas là, surtout la définition de la dérivabilité en un point qui est mise alors en valeur.

Pour ce qui est de la définition du nombre dérivé par approximation affine, on relève en outre que cette définition, là où elle est utilisée, est souvent (plus d'une fois sur deux) déjà suggérée par le texte, sous sa forme particulière ou générale. Le rôle de l'élève peut être alors, soit de la reconnaître (voir exercice 13 page 175 : donner, sans effectuer de calcul, le nombre dérivé en 0 de fonctions particulières déjà écrites sous la forme : $f(x) = a + b.x + x.h(x)$, où $h(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0), soit de l'utiliser (pour effectuer des majorations, des calculs approchés, ...etc.). L'application de cette définition dans un exercice ou une suite d'exercices est aussi suggérée parfois par un sous-titre donné à cet exercice ou à ce groupe d'exercices. D'autres fois encore, cette définition intervient seulement à un niveau implicite : elle est sous-jacente, par exemple à certains calculs d'approximation que l'élève doit effectuer, sans vraiment être pointée en tant qu'objet (voir plus loin à la section IV/ l'analyse selon les types d'objets).

La définition d'une fonction dérivée est elle-même rarement mise en exergue dans cet environnement d'exercices et de problèmes, puisque essentiellement, ce que fait ici l'élève, c'est dériver formellement des « expressions ». Seuls cas d'exception, les démonstrations de cours consistant à établir les formules des fonctions dérivées de la fonction « racine carrée », de l'inverse d'une fonction, du quotient de deux fonctions (page 173)...et l'exercice 6 page 174 (assez artificiel) où l'on demande de montrer, sans utiliser la notion de fonction dérivée, que pour tout réel a non nul, la fonction f : x →$1/x^2$ est dérivable en a, avec f '(a) = $-2/a^3$.

> **6** Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
> Sans utiliser la dérivée des fonctions usuelles, montrer que, pour tout réel $a \neq 0$, f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{2}{a^3}$.

Notons d'ailleurs que dans ces exercices, le choix de la notation « f '(a) » de préférence à la notation « f '(x) » est destiné à aider l'élève à considérer dans un premier temps a comme un réel donné. Quant à la définition de la vitesse instantanée (comme dérivée de la loi horaire du mouvement), elle est utilisée seulement dans trois problèmes, bien regroupés.

Notons encore que le chapitre « Applications de la dérivation » ne comprend, lui, aucune définition nouvelle, et se concentre donc sur la présentation des théorèmes nécessaires à l'étude globale des fonctions (aspect « Utilisation d'un théorème, d'une technologie » ; voir un peu plus loin, au paragraphe suivant, notre analyse). Par ailleurs, dans notre tableau de classification, nous avons classé la formule de l'équation d'une tangente du côté des propriétés, plutôt que du côté des définitions (ce qui explique que nous ne parlions pas ici de cette formule). En effet, la notion (implicite) de tangente a déjà été introduite bien avant la classe de première (voir le travail de C. Castela sur les différentes conceptions des élèves à propos de cette notion [ibid.]). Il faut d'ailleurs rappeler que la détermination d'équations de tangentes représente seulement 3,78% des sous-tâches de calcul, soit encore 1,89% de toutes les sous-tâches, donc la comptabiliser dans les « applications de définitions » ne modifierait pas notablement les proportions de notre répartition statistique.

Il nous reste à donner quelques chiffres assez éloquents concernant la sous-tâche « Application de définitions », qui viennent confirmer encore l'aspect très limité des enjeux autour de cette sous-tâche déjà fort minoritaire. Il y a une majorité (52,2% contre 47,8%) des définitions utilisées qui ne concernent pas la dérivation (définitions d'une fonction paire, impaire, périodique, d'une asymptote oblique, du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, ...etc.). Enfin, les connaissances utilisées sont plus souvent du côté des connaissances techniques (87,6%) que du côté des connaissances mobilisables (10,6%) ou disponibles (1,8%).

6°) Sous-tâches du type « Appliquer un théorème ou une propriété ».

Il s'agit, en l'occurrence, de 28,81% de l'ensemble des sous-tâches analysées dans notre tableau de classification, c'est à dire du deuxième type de sous-tâches le plus représentées, loin derrière les sous-tâches de calcul (49,76%), mais devançant largement les sous-tâches graphiques (11,21%) et surtout, plus symptomatiquement, les sous-tâches du type « Utiliser une définition » (5,32%). Autrement dit, les élèves travaillant à partir des exercices et des problèmes de ces deux chapitres de dérivation sont amenés à utiliser en moyenne au moins cinq fois plus souvent une propriété ou un théorème qu'une définition. Ce résultat, en soi, semble nous conforter dans l'idée que c'est davantage du côté des applications et d'une recherche d'opérationnalité qu'est tourné cet environnement d'exercices, que du côté des objets eux-mêmes et de leur approfondissement.

Cela étant, si on regarde à présent la répartition des théorèmes utilisés, on constate que dans 68,3% des cas, l'élève doit appliquer des théorèmes de dérivation des fonctions (40,8%) ou le théorème de (stricte) monotonie (27,5%), les utilisations de ces deux types de théorèmes se suivant d'ailleurs immédiatement dans 27,5% de cas ! Dans 6,4% des cas, il lui faudra en outre avoir recours au théorème sur l'existence d'un extremum, dans 4,4% des cas, au théorème sur l'existence et l'unicité d'une solution à une équation type f(x)=0, et dans 1,6% des cas au théorème sur les bijections, ces trois théorèmes n'apparaissant en réalité que comme les traductions en bonne et due forme de situations très intuitives graphiquement (immédiatement lisibles sur le tableau des variations). Les deux derniers résultats sont du reste intimement liés. Au total, on constate donc que seulement cinq (types de) théorèmes (il y a tout de même plusieurs théorèmes de dérivation !), dont certains s'appliquent à la suite les uns des autres, recoupent plus de 80% des cas d'utilisation d'une technologie (propriété ou théorème) dans cet univers d'exercices ou de problèmes (40,8% + 27,5% + 6,4% + 4,4% + 1,6% = 80,7%). A cela, il faut ajouter que le « scénario » d'application de chacun de ces théorèmes est mis en valeur sous la rubrique « Savoir-faire » (sauf celui du théorème sur les bijections), rubrique elle-même illustrée par la résolution d'exercices (en rubrique « Utilisations »). Les listes d'exercices sont jalonnées de sous-titres correspondants aux divers types de fonctions étudiées (fonctions polynômes, fonctions rationnelles et irrationnelles...). Le but est donc simplement de faire appliquer aux élèves, à grande échelle, ces cinq types de théorèmes, aux différentes sortes de fonctions usuelles qu'ils connaissent déjà.

L'aspect non algorithmique des théorèmes de dérivation (qui, eux, rappelons le, représentent 40,8% des « technologies » à faire fonctionner ici) est en revanche très nettement ignoré dans ces exercices (1% de cas d'utilisation). Par aspect non algorithmique des théorèmes de dérivation, nous voulons entendre : *« ce qui permet de justifier qu'une fonction est dérivable sur un certain intervalle en l'identifiant comme somme, produit, composée, etc... de fonctions dérivables sur cet intervalle... »*. Notons encore que, contrairement à ce qu'il en est avec l'application de définitions, les théorèmes ou propriétés à utiliser qui ne concernent pas la dérivation sont largement minoritaires (12,6%), ce qui ne fait que mettre encore davantage en avant l'application des cinq théorèmes précités comme l'objectif prioritaire de ces exercices.

Les théorèmes utilisés ont un statut de connaissances mises en fonctionnement au niveau technique dans 63,40% des cas, de connaissances mobilisables dans 35,13% des cas, et de connaissances disponibles dans seulement 1,47% des cas. On remarque ainsi une certaine différence avec les proportions observées pour les définitions utilisées : la part de connaissances disponibles reste insignifiante dans les deux cas (de l'ordre de 1%), mais la part de connaissances mobilisables est assez sensiblement plus élevée (même si elle reste très minoritaire) du côté des théorèmes que du côté des définitions.

7°) Sous-tâches minoritaires non graphiques.

Rappelons ici que nous avons répertorié, dans la dernière colonne de notre classification par types de sous-tâches, toutes celles se démarquant des calculs, de l'application stricto sensu d'un théorème, d'une propriété ou d'une définition, et d'une sous-tâche graphique « standard » du type « tracé d'une courbe ou d'une droite » ou « lectures (ponctuelles) de données à partir d'une courbe ». C'est ce répertoire de sous-tâches, toutes plus ou moins liées au raisonnement, que nous avons donc considéré sous le vocable « Sous-tâches minoritaires ». Parmi elles, nous retrouvons certaines sous-tâches de type graphique, déjà décrites plus haut, et d'autres, qui sont celles faisant dans ce paragraphe l'objet de notre attention, les sous-tâches minoritaires non graphiques.

Ces sous-tâches représentent 4,9% de toutes les sous-tâches, et on peut constater qu'elles ne touchent aux questions liées à la dérivation que dans 36,5% des cas. Dans 25% des cas, l'enjeu est la traduction analytique de certaines conditions, notamment sur des tangentes (mais en général, une fois l'équation de la tangente déterminée, la notion de dérivée n'est plus en jeu. Il s'agit de conditions de parallélisme, de perpendicularité, ...etc. concernant des droites dont on connaît les équations). Dans 22% des cas, on demande à l'élève une argumentation, ou bien de justifier un résultat annoncé (position relative entre courbe et tangente, approximation effectuée d'un taux d'accroissement par un nombre dérivé, ...etc.). Dans 16% des cas, il doit identifier un terme, une expression pour répondre à la question qui lui est posée (par exemple, identifier un coefficient directeur, l'équation d'un demi-cercle, un nombre dérivé dans un contexte un peu inhabituel). La démonstration n'occupe véritablement que 13% de cet espace (voir certaines situations géométriques, quelques rares exercices « étoilés », réputés plus délicats, où il faut introduire soi-même un objet, par exemple une fonction à étudier, ou encore mener une discussion, ...etc.). Il n'y a que 6% de cas où l'élève doive introduire lui-même une formalisation et l'utiliser pour effectuer une question. Par exemple, traduire : *« P est un polynôme de degré trois »* ou bien : *« f est périodique »*, pour montrer que tout polynôme de degré trois admet au moins une racine réelle (ex.33 p.206), ou établir que la dérivée d'une fonction périodique ne peut être que périodique, de même période (ex.20 p.176). Comparer des résultats (exemple : vérifier, expliquer la cohérence entre divers calculs de dérivées) représente 5% de ces sous-tâches minoritaires, donner un contre-exemple, moins de 1% (un seul cas rencontré, correspondant à la question : une fonction polynôme de degré pair possède elle nécessairement une racine réelle ?).

Comme on peut le constater, une certaine variété de sous-tâches s'exprime ici, mais dans un espace extrêmement réduit, une majorité écrasante de tâches tournant en réalité autour de quelques pratiques bien ciblées, identifiées dans les paragraphes précédant celui-ci.

8°) Conclusion.

Nous avons vu plus haut que la réalisation de calculs est nettement la sous-tâche la plus répandue parmi celles auxquelles doit se livrer l'élève pour effectuer les exercices et les problèmes de ces deux chapitres de dérivation.

Cependant, cette sous-tâche, bien que parfois isolée, est le plus souvent fortement imbriquée avec l'application de théorèmes, voire de définitions, au sein d'une tâche donnée. Compte tenu du fait que, pour l'essentiel, le travail à effectuer tourne autour de cinq types de théorèmes bien ciblés, applications de la notion de dérivation, la « variabilité » de bien des exercices porte surtout sur les calculs qui, eux, changent nécessairement, d'une situation à l 'autre, d'un type de fonction usuelle à un autre (d'où la présence de sous-titres). Par conséquent, au-delà même des pourcentages obtenus pour chaque type de sous-tâches, c'est bien ce fait là qui nous dévoile l'importance prépondérante des tâches calculatoires, par rapport à d'autres types de tâches, dans le paysage d'exercices analysé.

TABLEAUX RECAPITULATIFS DES PROPORTIONS PAR TYPES DE SOUS-TACHES :

.Sous-tâches de calcul :

Dérivée / E.S	10,37%
Dérivée / I.S	11%
Hors dérivée / E.S	21,43%
Hors dérivée / I.S	6,96%

Total : 49,76%

.Applications de technologies :

Dérivée / th.dérivation	11,75%
Dérivée / th.monotonie	7,92%
Dérivée / autres théor.	5,51%
Hors dérivée	3,63%

Total : 28,81%

.Applications de définitions :

Définitions / Dérivée	2,54%
Définitions / Hors dériv.	2,78%

Total : 5,32%

. Sous-tâches graphiques :

Tracés divers :	5,49%
Lecture de courbes :	3,14%
Tâches min.graphiques :	2,58%
Total :	11,21%

. Sous-tâches minoritaires non graphiques :

Dérivée :	1,79%
Hors dérivée :	3,11%

Total : 4,90%

(Sous-tâches minoritaires : 2,58% + 4,90% = 7,48%)

C/ CLASSIFICATION PAR AIDES A LA RESOLUTION.

1°) Découpages et répétitions de séquences : des scénarios bien préparés.

L'analyse précédente, par types de sous-tâches, des exercices et problèmes du manuel, a notamment mis en relief l'existence d'un certain nombre de tâches purement techniques, correspondant à des questions de nature calculatoire, bien isolées. Cet état de fait résulte le plus souvent du découpage de certaines questions plus complexes en plusieurs phases (techniques, technologiques...) en vue de rendre plus facile pour l'élève la résolution d'un problème posé au sein de l'exercice.

Disons tout de suite que ce type d'aide est, comme on aurait pu s'en douter, assez inégalement réparti sur le champ de situations abordées, sa présence dépendant d'abord de la nature du problème envisagé et des difficultés inhérentes. Ainsi, l'étude de la dérivabilité en un point à l'aide de la définition par la limite du taux d'accroissement, qu'il s'agisse de l'établissement d'une formule de dérivée (démonstrations de cours en exercices) ou bien de l'étude d'un cas particulier ayant une certaine spécificité (angulosité, demi tangente verticale), fait l'objet de façon assez systématique d'un canevas de sous-questions élémentaires (80% des cas). L'énoncé demande souvent de calculer un taux d'accroissement (précisé par sa formule), surtout quand des transformations algébriques de ce taux s'imposent manifestement, puis de déterminer la limite ad hoc (à droite, à gauche, si la distinction est de mise) de ce taux, et enfin, d'en déduire qu'il y a, ou non, dérivabilité (à droite, à gauche au point). La forme « utile » du taux peut être précisée dans certains cas par l'énoncé (lorsque, par exemple, les « quantités conjuguées » vont intervenir). Tout dépend de la situation étudiée ; l'énoncé peut aussi demander directement la (les) limite(s) du taux d'accroissement puis l'étude de la dérivabilité, ou bien d'abord l'expression du taux d'accroissement, selon les spécificités présentes (nécessité d'une transformation algébrique du taux et/ou nécessité de distinguer limites à gauche et à droite). Il y a cependant des exercices (« étoilés ») où l'on demande d'emblée, sans question(s) intermédiaire(s), d'étudier la dérivabilité en un certain point, mais ces exercices sont situés immédiatement à la suite ou au voisinage d'exercices du même genre où toutes les indications sont alors fournies (voir page 175, exercices 7 à 10).

7 ★ Soit la fonction $f : x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)}{x}$.
La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

8 ★ Soit la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ définie sur $[0 ; +\infty[$.
Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

9 ★ Soit la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par :
$$f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x-1}.$$
Étudier la dérivabilité de la fonction f en 1.

10 ★ ★ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f : x \mapsto |x^2 - 1|$$
et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Calculer :
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$
La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

2° En procédant de la même façon, étudier la dérivabilité de cette fonction f en -1.

3° Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
Comment peut-on interpréter graphiquement les résultats des questions 1° et 2°.

Notons que des interprétations graphiques (en termes de demi tangentes, de tangentes verticales, ...etc.) peuvent être sollicitées à l'issue des calculs précités, mais jamais de prime abord, sauf dans le problème n°58 page 184 où l'on demande de démontrer que *« les deux demi tangentes à droite et à gauche... »* en un point *« ...appartiennent à la même droite ».* Encore faut-il préciser que ce problème est le dernier du chapitre et que la formulation oriente malgré tout l'élève dans son travail, puisque implicitement il est dit qu'il faut regarder les limites à droite et à gauche, que ces limites existent et qu'elles vont être égales !

Dans les exercices portant sur la définition par approximation affine (de la dérivabilité et du nombre dérivé en un point), qui ne visent « in fine » que des calculs d'approximation numérique, on peut identifier également des canevas très répétitifs et directifs de questions nettement destinés à faciliter le travail de l'élève. Ce dernier peut avoir à identifier dans un cas particulier les éléments (coefficients, reste) intervenant dans la formule par approximation affine, qui est rappelée par l'énoncé dans le cas particulier étudié ou dans toute sa généralité. Suit alors l'expression standard de « l'erreur », qu'il doit éventuellement transformer, puis majorer, algébriquement, retrouvant là les expressions indiquées par le texte. Enfin, un ou plusieurs calculs numériques approchés lui sont proposés, avec contrôle de l'erreur. Mais dans certains cas où l'on ne travaille que sur des fonctions du type polynomial, par exemple dans les problèmes « concrets » d'approximation (liés à une situation physique, économique, etc.), ce canevas de questions peut être modifié (revu à la baisse). Il est en effet aisé, dans le cas polynomial, d'identifier une approximation -d'ordre 1- au voisinage de zéro sans recourir à la formule du cours. En revanche, ces problèmes « concrets » peuvent comporter alors un calcul de modélisation auquel succède, comme précédemment, transformations algébriques et majorations sollicitées par l'énoncé, puis applications numériques.

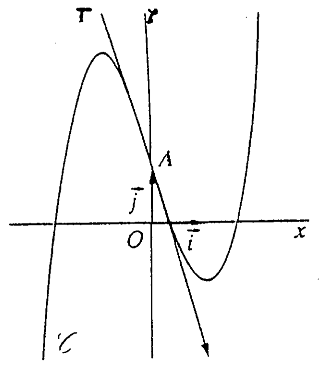
On peut donc ainsi repérer ce que l'on appellera des *« sillons »* dans les listes d'exercices et de problèmes ici analysés, c'est à dire des suites de questions élémentaires constituant un ensemble de consignes très directives et guidées, et se renouvelant d'un exercice à l'autre. Comme autre exemple de « sillon », cette fois sans lien avec la dérivation, citons les suites de questions relatives à la détermination d'asymptotes pour les fonctions rationnelles. Systématiquement, cela commence par la mise sous forme canonique de la fraction rationnelle ($f(x) = a.x + b + g(x)$, où $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini), et l'énoncé demande de déterminer les valeurs des différents coefficients de l'expression générale qu'il propose, à moins qu'il ne présente $f(x)$ sous cette forme dès le départ. Ensuite, suivant qu'il s'agit d'un des premiers problèmes de ce genre, ou non, on demande à l'élève, soit de prouver que telle droite dont on donne l'équation est asymptote à la courbe, soit de prouver qu'il existe une asymptote oblique (dont il faut déterminer l'équation) à la courbe, ou par exemple, trois asymptotes (en tout, sans précision) à déterminer. Enfin, on demande d'étudier la position relative de la courbe et de son (ou de ses) asymptote(s). Dans un cas, il s'agit de repérer une courbe asymptote, et là, l'énoncé fournit une aide encore plus précise : mise sous forme canonique de la fonction rationnelle étudiée, introduction de la parabole asymptote par le texte, calcul de limite puis interprétation du résultat sont demandés.

Si nous décrivons ici ce « sillon » dans tous ses détails, bien qu'il ne concerne pas la dérivation, c'est parce qu'il est assez représentatif de l'esprit général des exercices et problèmes des chapitres étudiés, et notamment de ceux relatifs aux études de fonctions. D'un exercice à l'autre on peut repérer de subtiles différences dans le questionnement, qui correspondent à une évolution très progressive des niveaux d'autonomie exigés de la part de l'élève, et pas seulement concernant les notions nouvelles relatives à la dérivation. Ainsi y a t'il, pour chaque gamme d'exercices, une évolution au fil de la liste d'exercices, du découpage des séquences, c'est à dire du scénario de questions proposé pour chaque exercice. Par exemple, à l'exercice n°12 de la page 175, le premier de ce style, on demande de déterminer l'équation de la tangente en un point donné de la courbe représentative d'une certaine fonction (la réponse correcte est : y = -3x+1), puis d'étudier le signe de f(x)-(-3x+1), et enfin d'en déduire la position relative de la courbe et de sa tangente et une représentation graphique livrant le résultat est même fournie par le texte ! Un peu plus loin (exercice n°21 page 176), pour le même type de problème (équation de tangente et position relative courbe/tangente à déterminer), la question indicative : *« étudier le signe de... »* a disparu, et il n'y a plus de représentation graphique donnant la réponse. En revanche, l'énoncé annonce que la courbe est toute entière située du même côté, par rapport à sa tangente. Enfin, dans les problèmes du chapitre suivant (« Applications de la dérivation »), déterminations d'équations de tangentes et études de la position relative courbe/tangente sont demandées sans plus d'indications.

12 définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$
et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1° Déterminer une équation de la tangente T au point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.

2° Étudier le signe de $f(x) - (-3x + 1)$.



Que peut-on en déduire quant à la position de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T ?

21 ★ Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1° Soit a un nombre réel ; déterminer une équation de la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

2° Justifier la proposition suivante :

« La courbe $\mathscr{C}$ est toujours située du même côté par rapport à ses tangentes. »

Il peut aussi arriver qu'une suite de questions proposées, correspondant à une tâche globale complexe, soit répétitive d'un exercice à l'autre, sans pour autant que les questions soient aussi élémentaires ou guidées que dans les exemples précédemment cités. Cependant, même dans ce cas, l'aspect répétitif d'une telle suite de questions peut alors constituer pour l'élève une aide à la résolution appréciable, en lui permettant de rattacher le travail qu'on lui demande à une structure d'exercice ou de problème déjà rencontrée auparavant. Par exemple, les études de fonctions (section 5 page 207) suivent toutes ici le même canevas préétabli de questions :

1) Détermination de l'ensemble de définition de la fonction.
2) Détermination des limites de la fonction aux bornes de cet ensemble.
3) Etude des variations et confection du tableau des variations de la fonction.
4) Tracé de la courbe représentative de la fonction.

Un tel canevas peut déjà aider l'élève à ne pas oublier de regarder où la fonction est bien définie, et à fournir un tableau de variations complet, incluant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Comme autre canevas de questions assez répétitif, mais plus « général », on citera celui repéré dans les problèmes d'optimisation : « modélisation / étude des variations d'une fonction / recherche d'un extremum / calcul de la valeur de la fonction en ce point ». Remarquons du reste que ce canevas est décrit explicitement par le manuel au sein de la rubrique « Utilisations » (page 196).

méthode

- *On choisit judicieusement une inconnue x et on détermine l'intervalle I dans lequel x varie.*
- *On exprime la grandeur V à optimiser en fonction de x.*
- *On étudie les variations de la fonction V sur I pour déterminer (s'il existe) l'extremum a, puis on calcule V(a).*

Il nous faut parler également de la présence de canevas de questions très locaux, visant aussi la facilitation du travail de l'élève en vue de la résolution de certains exercices. Par exemple, les discussions à effectuer à propos de la présence et du nombre d'extrema locaux pour une fonction paramétrée sont toujours bien orientées par une suite de questions « déroulant » les cas à envisager (voir l'exercice n°21 de la page 204 ou le problème n°53 de la page 209). Dans l'exercice n°20 page 204, l'énoncé demande d'une part de déterminer les valeurs d'annulation de la dérivée de la fonction f qui est définie par : $f(x) = x^3(1-x)$, et d'autre part de dire si f admet un extremum pour ces valeurs, ce qui met bien le doigt sur le seul point délicat du problème étudié.

21 ★ Soit la fonction :

$f : x \mapsto x^3 + ax^2 + ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$.

1° Expliquer pourquoi la fonction ne peut pas admettre d'extremum sur $\mathbb{R}$.

2° Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la fonction f admet deux extremum locaux.

3° La fonction f peut-elle admettre un seul extremum local ?

53 ★★On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - ax}{x^2 - 4x + 3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$.

1° Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la fonction :

a) n'admet ni maximum, ni minimum ?

b) admet un maximum M et un minimum m ? (Démontrer qu'alors $M \cdot m > 0$.)

c) admet seulement un minimum ?

2° Représenter, sur une même figure, les courbes correspondant à a égal à 2, 0 et 4.
Que se passe-t-il si a égal à 1 ou 3 ?

On peut relever aussi de tels canevas , locaux, dans les divers problèmes consacrés aux études de fonctions ; ils dépendent alors du type de fonction étudiée (fraction rationnelle ou fonction trigonométrique...). Par exemple, pour les fonctions trigonométriques, les changements de repère ad hoc, utilisant les symétries éventuelles de la courbe pour obtenir des expressions réduites de la fonction dans le nouveau repère, sont indiqués, ainsi que ces expressions réduites. L'élève n'a plus qu'à vérifier les affirmations du texte.

L'étude de la fonction f définie par : $f(x) = 2x + \cos(x)$ fait l'objet d'un problème en six questions (avec de nombreuses sous-questions), conçu selon le « scénario idéal » (pour étudier précisément ce type de fonction là) : étude du sens de variation, de la position relative de la courbe et des droites d'équations $y = 2x-1$ et $y = 2x+1$, puis par déduction, des limites à l'infini de f, détermination des points de contact entre la courbe et ces droites, puis vérification de la tangence en ces points, détermination (très guidée) des symétries de la courbe, et enfin, tracé de cette courbe.

Enfin, nous avons évoqué ci-dessus, à propos de difficultés réduites par un découpage minutieux en « sous-questions », les suites d'exercices sollicitant pas à pas une évolution de l'autonomie des élèves à travers de petites modifications de questionnement d'un exercice à un autre. Il est bon de rajouter ici que ces modifications peuvent également intervenir de façon plus discrète ou plus implicite dans le scénario des questionnements successifs. Ainsi demande t'on à l'élève, dans l'exercice n°31 page 206, de montrer qu'une certaine équation du type $f(x) = 0$ admet une unique solution sur un intervalle I (f et I étant précisés à l'avance), puis dans l'exercice n°32 de donner le nombre de solutions réelles d'une équation du type $f(x) = 0$ (f, fonction précisée), et enfin, dans l'exercice n°33, de montrer que tout polynôme du troisième degré admet au moins une racine réelle.

31 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle I, et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel α.

a) $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, $I = [2\ ;\ 3]$;
b) $f : x \mapsto x^5 - 2x^4 - 1$, $I = [2\ ;\ 3]$;
c) $f : x \mapsto x^3 - 3x + 3$, $I = [-3\ ;\ -2]$;
d) $f : x \mapsto x - 1 + \frac{4}{x^2}$, $I = [-2\ ;\ -1]$.

32 ★ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de chacune des solutions.

a) $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 - 1$;
b) $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$;
c) $f : x \mapsto x^4 - 3x^3 - 1$;
d) $f : x \mapsto x^4 - 4x^2 + 4x + 2$.

Il est clair que l'évolution du type de questionnement, constatée entre l'exercice 31 et l'exercice 33, vise successivement à permettre à l'élève d'appliquer deux technologies (le théorème de monotonie et celui sur les équations) dans un cas simple, puis à l'amener à utiliser ces technologies de façon plus autonome, plusieurs fois de suite, là où il faut, pour enfin être capable de concevoir par imitation un problème de résolution d'équation (paramétrée) sous l'angle de l'analyse (introduction d'une fonction), afin d'appliquer les technologies précitées. De même, dans les exercices 27 et 28 de la page 206, on demande de déterminer les images de certains intervalles par des fonctions données, puis aux exercices 29 et 30, de montrer qu'une certaine fonction f réalise une bijection entre deux intervalles I et J précisés par l'énoncé.

Il y a bien, dans cette succession d'exercices, une aide à la résolution de nature implicite, qui tient dans la familiarisation progressive, par paliers, à des standards d'exercices, puisque démontrer le caractère bijectif de l'application $f : I \to J$ passe nécessairement par la détermination de l'image f(I) de I, qui doit ici être égale à J.

2°) Répartition quantitative et qualitative des réponses données par le texte.

Il s'avère qu'il n'y a que 22,2% des questions posées qui portent explicitement en leur sein la réponse à obtenir par l'élève, 1,6% qui la donnent implicitement, et 4,5% de façon partielle (pour 71,7% de questions qui ne livrent aucune indication sur les résultats à obtenir).

Cependant, une analyse plus fine montre que ce type de proportions subit de fortes variations d'un thème à l'autre. On peut ainsi constater que sur certains thèmes un peu délicats tels que : « Etude de la dérivabilité en un point » ou « Approximations affines », l'énoncé apporte une aide à la résolution conséquente en suggérant bon nombre de résultats à obtenir. Et il y a en revanche des questions qui, du fait même de leur nature, sollicitant par exemple un tracé, une lecture graphique ou une application numérique, ne présentent pratiquement jamais à l'élève les réponses qu'il doit obtenir.

Voici quelques statistiques précisant cette hétérogénéité des résultats :

	Taux de réponses explicites :	Taux de réponses implicites :	Taux de réponses partielles :	Absence totale de réponses :
Nombre dérivé et dérivabilité :	39,1%	6,5%	8,7%	45,7%
Approximations affines :	51,9%	3,7%	14,8%	29,6%
Bijections et équations :	78,9%	0%	0%	21,1%
Géométrie :	43,2%	3,9%	0%	52,9%
Equations de tangentes :	12,2%	0%	0%	87,8%
Fonction dérivée, vitesse	19,8%	0%	0%	80,2%
Variations, extrema :	9,8%	3%	8,6%	78,6%
Equations trigo.	0%	0%	0%	100%
Applications numériques :	1,4%	0%	0%	98,6%
Lectures graphiques et tracés :	0%	0%	0%	100%

<u>Quelques remarques sur ces résultats</u> :

Le taux très élevé de réponses explicites au sein de la rubrique : « Bijections et équations » s'explique par le fait que la plupart des questions posées sur ce thème sont de la forme : *« Montrer que la fonction f définit une bijection de ... sur ... »*, ou : *« Montrer que l'équation f(x) = 0 possède une unique solution sur... »*. C'est donc bien la justification d'une propriété annoncée qui est ici attendue. Les activités graphiques portant sur ce thème et les équations trigonométriques, qui demandent une détermination explicite des solutions (et ne relèvent donc pas de la même « problématique ») ont été répertoriées à part. Si on comptabilisait ces deux types d'exercices au sein de la rubrique « Bijections et équations », cela ferait tomber le taux de réponses fournies à 46,1%.

C'est finalement le taux global de réponses fournies (explicites, implicites ou partielles), dans les questions portant sur le thème « Approximation affine », qui est le plus impressionnant, égal à 70,4% (la somme de 51,9%, de 3,7% et de 14,8%). En revanche, pour des calculs d'équations de tangentes ou de fonctions dérivées, ou pour la détermination des variations d'une fonction, autrement dit des tâches très rodées et codifiées (application directe d'une formule ou d'un théorème), les réponses sont rarement fournies par l'énoncé.

3°) Des rubriques d'ordre méthodologique résumant l'essentiel des pratiques.

Les deux rubriques du manuel, intitulées « Savoir-faire » et « Utilisations », qui correspondent, pour la première à une fiche méthodologique, et pour la seconde à un répertoire d'exercices corrigés agrémenté de « points-méthodes », résument à l'intérieur de ces deux chapitres de dérivation l'essentiel des pratiques auxquelles doit être familiarisé l'élève au terme de ces chapitres. L'existence de telles références, auxquelles l'élève pourra toujours se reporter, constitue en elle-même une aide à la résolution très appréciable, qui trace de façon assez stricte les contours du contrat didactique dans ces chapitres.

Disons immédiatement que ces rubriques « décollent » assez peu du cours, et que la rubrique « Savoir-faire » constitue autant un aide-mémoire qu'une véritable fiche méthodologique. L'élève peut ainsi se remémorer (page 172) le fait qu'un nombre dérivé se calcule, soit à l'aide de sa définition (par la limite du taux d'accroissement), soit au moyen de la formule par approximation affine (le manuel ne parle pas de définitions équivalentes, et d'ailleurs, les termes « définition » et « théorème » n'apparaissent pas dans le corps du cours), soit en utilisant la fonction dérivée si on la connaît. Il peut aussi retrouver (à la même page) la formule de l'équation de la tangente à une courbe représentative de fonction au point d'abscisse a (générique) ou la façon de tracer cette tangente : on lui rappelle qu'il s'agit de la droite de coefficient directeur égal au nombre dérivé f '(a). La formule de l'équation de la tangente est également rappelée à la page 167 (rubrique « Utilisations ») et un exemple d'application est alors donné.

Souvent, les rubriques « Utilisations » et « Savoir-faire » ne font que décrire le fonctionnement d'un théorème ; ainsi est-il expliqué, page 200, que *« pour montrer que la fonction f, dérivable en a... »* (le texte ne dit même pas autour de a) *« ...admet un extremum local en a, il faut montrer que la dérivée s'annule en changeant de signe au point a... »*. De même, le point-méthode (rubrique « Utilisations ») de la page 194 ne fait qu'exprimer le principe selon lequel, pour étudier les variations d'une certaine fonction, il convient simplement de calculer sa dérivée, d'en étudier le signe, puis de regarder sur quels intervalles celui-ci est constant, avant de conclure.

Parfois, ces rubriques dépassent tout de même un peu ce point de vue, pour aider l'élève dans son travail « en situation » : *« pour déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = a sur un intervalle I, décomposer cet intervalle en intervalles sur lesquels la fonction est dérivable et strictement monotone, puis appliquer le théorème »* (voir la rubrique « Savoir-faire », page 200) :

SAVOIR	COMMENT	REFERENCES
• Déterminer le sens de variation d'une fonction	• étudier le signe de la fonction dérivée	**Cours, p. 189** **Utilisation 1**
• Montrer que la fonction admet un extremum local en a	• si f est dérivable en a, montrer que la dérivée s'annule en a en changeant de signe	**Cours, p. 191** **Utilisation 3** **tp 4**
• Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ sur un intervalle I	• décomposer l'intervalle I en intervalles sur lesquels la fonction est dérivable et strictement monotone, puis appliquer le théorème	**Cours, p. 190** **tp 1**
• Montrer qu'une fonction f s'annule une seule fois sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$	• montrer que f est dérivable et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$ et que $f(a)f(b) < 0$	**Cours, p. 190** **Utilisation 2**

Enfin, l'aide apportée par l'une de ces rubriques peut aussi s'avérer très « locale » d'un point de vue théorique (tout en concernant tout de même bon nombre d'exercices). Une propriété utile pour effectuer certains des exercices proposés au sein du chapitre, mais non indispensable d'un point de vue théorique, conséquente, par exemple, d'un théorème plus important, peut très bien figurer dans ces rubriques. Ainsi, la rubrique « Savoir-faire » de la page 172 informe du fait que *« pour obtenir une valeur approchée de f(a+h) avec f dérivable en a et h petit, il faut utiliser l'approximation : $f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a)$ »*, alors que la formule de l'approximation affine (avec reste en $h.\varphi(h)$) dont découle cette approximation, beaucoup plus précise dans sa formulation, n'est pas rappelée. La rubrique « Utilisations » présente la même information à la page 167. Tout cela indique alors assez clairement quels types particuliers d'exercices vont être consacrés à cette question.

méthode

L'équation réduite de la tangente en A, d'abscisse a, à la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée par :

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

La fonction affine « tangente » donne une approximation de f au voisinage de a et :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h.$$

Les statistiques de notre classification (tableau annexé des aides à la résolution) nous indiquent d'ailleurs, pour les divers thèmes abordés, le nombre (important) de situations où un point-méthode d'une rubrique « Utilisations » ou l'un des éléments d'une fiche « Savoir-faire » est à appliquer tel quel pour effectuer une question. On constate au passage, que pour chaque thème d'exercices, mis à part les thèmes « Vitesses instantanées » et « Calculs de limites », correspond au moins un élément d'ordre méthodologique de l'une de ces deux rubriques. Les thèmes les plus importants (calcul de fonctions dérivées, théorème sur l'existence et l'unicité de solutions à des équations) sont évoqués une fois dans chacune de ces deux rubriques, en dépit des répétitions que cela peut créer (et que cela cause effectivement ici).

Les exercices de résolution d'équations trigonométriques ou les divers problèmes d'optimisation, qui sont à considérer comme « applications d'applications de la dérivation », puisqu'ils constituent en fait des sous-produits de certains théorèmes (équations, extrema...) du second chapitre de dérivation, trouvent eux aussi une place dans ces rubriques « Utilisations » et « Savoir-faire ». Il s'agit alors d'aides très particulières, spécifiques d'un type d'exercices et de problèmes bien précis. Ainsi, les équations trigonométriques dont il est question, page 200 (rubrique « Savoir-faire ») sont simplement du type : cos(x) = a ou du type : sin(x) = a.

• Résoudre les équations : $\cos x = a$ et $\sin x = a$ et celles s'y ramenant	• chercher la solution sur l'intervalle : $[0 ; \pi]$ pour $\cos x = a$; $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ pour $\sin x = a$ • en déduire les solutions sur $\mathbb{R}$, ou sur tout intervalle, en utilisant la parité et la périodicité	Cours, p. 193

D'autre part, on explique aux élèves (page 196 de la rubrique « Utilisations »), qu'un exercice d'optimisation (du type de celui proposé et corrigé en exemple) s'effectue en plusieurs étapes ainsi précisées :

méthode

• *On choisit judicieusement une inconnue x et on détermine l'intervalle I dans lequel x varie.*

• *On exprime la grandeur V à optimiser en fonction de x.*

• *On étudie les variations de la fonction V sur I pour déterminer (s'il existe) l'extremum a, puis on calcule V(a).*

4°) Les aides à la résolution plus ponctuelles : une certaine variété.

Il y a, en fait, fort peu de rappels de cours à l'intérieur même des exercices et problèmes analysés ici, ce qui n'est guère étonnant dans la mesure où les rubriques « Utilisations » et « Savoir-faire » décrites ci-dessus retracent déjà les éléments les plus essentiels du cours en les mettant en partie en scène, en situation, à travers des exercices corrigés ou ce que l'on peut appeler des « fiches pratiques ». Les quelques rappels de cours présents concernent rarement la dérivation, mais plutôt des connaissances plus anciennes, ayant trait par exemple au calcul de limites (le fait que sin(x)/x tende vers 1 pour x tendant vers 0...) ou à la géométrie élémentaire (volume d'un cône, d'une boule, aire d'un trapèze,... etc.) dans des problèmes dits « concrets » (modélisation, optimisation).

Les indications techniques sont nombreuses et variées. Il y a bien sûr les différentes formes (les plus utiles/pratiques) de taux d'accroissement, avec les notations en a, h ou bien x_0, x, selon le cas, qui sont fournies pour l'évaluation de nombres dérivés. Il y a aussi toutes les petites aides propres aux exercices ayant trait à la formule par approximation affine : l'énoncé donne une forme bien identifiable de cette formule dans le cas particulier concerné, une majoration du reste est fournie avec son domaine de validité, on demande à l'élève d'évaluer une quantité du type f(x+h)-f(x), ou encore de justifier une approximation du type : $f(a+h)-f(a) \approx h.f'(a)$, qui est ensuite utilisée, l'expression « approximation affine » est citée dans l'énoncé. Les exercices du type : *« Calculer une limite en identifiant un taux d'accroissement »* sont assortis d'une question préalable du style : *« Déterminer la dérivée de telle fonction ».*

Citons aussi les aides liées à la formalisation. L'exercice n°14 de la page 175 donne l'expression générale d'une fonction polynôme de degré n pour l'étude de sa dérivabilité en 0, l'exercice n°24 de la page 205 donne des notations, m et M, au minimum et au maximum locaux de la fonction f définie par : $f(x) = x^3 + p.x + q$ pour $p < 0$, et demande de montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois racines (réelles) distinctes si et seulement si le terme $4p^3+27q^2$ est strictement négatif, en faisant calculer selon p et q le produit m.M,... etc.

14 ★ ★ Soit la fonction polynôme P définie par :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$.
Justifier, sans aucun calcul, que la fonction P est dérivable en 0 et donner $P'(0)$.

24 ★ ★ Pour aller plus loin

1° Montrer que, si $p < 0$, la fonction $f : x \mapsto x^3 + px + q$ admet un maximum M et un minimum m.

2° Calculer le produit $M \cdot m$ en fonction de p et de q.

En déduire que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet trois racines distinctes si, et seulement si :

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

Les exercices de résolution d'équations trigonométriques sont guidés par des aides spécifiques : *« utiliser la définition du sinus et du cosinus sur le cercle trigonométrique »*, *« se ramener à une égalité du type : cos(a) = cos(b) »*, *« effectuer le changement de variable X = cos(x) ou X = sin(x) »*, etc...

Concernant les interprétations graphiques à effectuer à partir d'un calcul, d'une formule, et à exprimer par une phrase en français, il convient de souligner que les énoncés ne demandent presque jamais aux élèves de rédiger eux-mêmes cette phrase. Elle est généralement écrite dans le texte de l'exercice et l'élève doit alors seulement la justifier. Il doit ainsi déduire de la formule : $f(b)-f(a) = (b-a).f'((a+b)/2)$ obtenue pour la fonction f définie par : $f(x)=x^2$, le fait que *« si A et B sont deux points de la parabole (P) d'équation $Y=X^2$, il existe sur l'arc AB un point C et un seul où la tangente est parallèle à la droite (AB) »* (extrait de l'exercice n°43 page 179). Pour cette même fonction, il doit justifier, à partir du calcul préalable de l'équation de la tangente en a, la proposition : *« La courbe (parabole) est toujours située du même côté par rapport à ses tangentes »* (exercice n°21 page 176).

De plus, des schémas, des figures géométriques ou des représentations graphiques qui n'ont aucun caractère indispensable au sein de l'énoncé sont parfois fournis par lui à la seule fin d'aider l'élève dans son travail. Dans la plupart des cas, il s'agit seulement de lui permettre de visualiser rapidement la situation, mais certaines fois c'est pour lui fournir des précisions qui ne figurent pas explicitement dans l'énoncé. Ainsi indique t'on par exemple à l'élève, que tel triangle, dont l'un des côtés est le rayon d'un cercle, et un autre, un segment tangent à ce cercle, est rectangle au sommet constitué par ces deux côtés (TP n°4 de la page 170).

Enfin, les exercices et problèmes portant sur des situations dites « concrètes » (tirées de la physique, de l'économie,... etc.) font l'objet d'aides particulières : la modélisation est pilotée par le texte, au niveau de la formalisation, du choix de la (ou des) variable(s), des unités, du domaine de valeurs balayé par ces variables. Parfois, une notion nouvelle est définie, puis utilisée par le texte (notion d'erreur relative, formule du coût marginal,... etc.).

D/ CLASSIFICATION PAR TYPES D'OBJETS. STATUTS « OBJET » ET « OUTIL ».

1°) Répartition en statuts objet / outil, explicite / implicite.

La répartition des types de modalité d'intervention des notions selon les quatre statuts obtenus à partir de la distinction objet/outil et explicite/implicite est très inégale. C'est le statut « outil implicite » qui est le plus souvent rencontré, dans 75,5% des cas, suivi du statut « objet explicite » (14,64% des cas). Le statut « outil explicite » (8,41%) et surtout le statut « objet implicite » (1,40%) sont sous représentés.

En clair, cela signifie que les notions sont très peu considérées, dans ces exercices, dans leur statut « objet », mais quand c'est le cas, l'énoncé le met clairement en évidence. On ne peut cependant pas se contenter de ce premier indice. Il convient d'ajouter à cela que le statut « objet » est le plus souvent mis en jeu dans un contexte élémentaire consistant simplement à appliquer une définition pour un cas particulier de fonction numérique usuelle. Ainsi en va-t-il des thèmes pour lesquels le statut « objet » est le plus sollicité, qui sont les thèmes « Nombre dérivé » (51,35%), « Fonctions dérivées » (21,9%), « Vitesses » (100%) et « Equations de tangentes » (100%).

L'objet « bijection » est mis en jeu uniquement dans un contexte purement graphique très simple : il s'agit, parmi des courbes représentées sur papier quadrillé, continues dans cinq situations proposées sur six, d'identifier celles qui correspondent à une bijection entre deux intervalles donnés par le texte. Il n'y a donc pas vraiment lieu ici, pour l'élève, de verbaliser la définition d'une bijection ; il peut se contenter dans presque tous les cas d'identifier les intervalles de stricte monotonie de la fonction. Quant au « théorème sur les bijections », il a lui un statut « d'outil » (implicite) et ne met pas véritablement en jeu la notion de bijection, puisqu'il permet simplement d'affirmer sous certaines hypothèses (de stricte monotonie, notamment) le caractère bijectif d'une application.

La plupart des notions, et en particulier les théorèmes du cours, sont présentes à un niveau « outil », mais en général sans que l'énoncé ne fasse mention de leur nécessité pour répondre aux questions posées. Ils ont donc dans l'ensemble un statut « d'outil implicite ». Ainsi, le théorème de monotonie est-il considéré dans sa dimension « outil » dans tous les cas. Il en va de même du théorème sur l'existence d'un extremum ou de celui sur l'existence et l'unicité de la solution d'une équation du type f(x) = 0. Même la formule de l'approximation affine a plutôt un statut d'outil (89% des cas) qu'un statut d'objet (11% des cas) dans les exercices et problèmes du manuel. On s'en sert pour identifier un nombre dérivé en un point, pour obtenir une approximation numérique,... etc. Elle constitue très rarement un enjeu en elle-même.

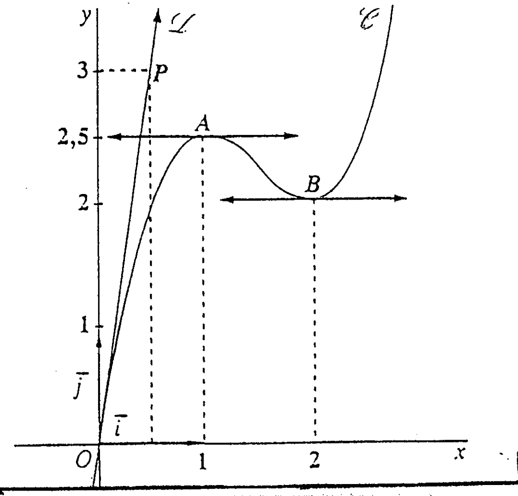
2°) Types d'objets en jeu, relations entre eux, rapports au savoir en découlant.

a) <u>Nombre dérivé, étude de la dérivabilité</u>.

Il faut tout d'abord souligner une certaine variété des situations mettant en scène le nombre dérivé et la définition de la dérivabilité, cette variété s'exprimant à travers les diverses mises en relation effectuées avec d'autres objets (fonctions dérivées, équations de tangentes, approximations affines,... etc.) au sein des exercices.

Dans certains exercices, il faut utiliser la définition par la limite du taux d'accroissement pour déterminer le nombre dérivé en un point ou une fonction dérivée (via le nombre dérivé en a, réel quelconque). Dans d'autres, il faut au contraire particulariser la fonction dérivée (connue) en un point, pour obtenir le nombre dérivé recherché, ou bien l'élève doit simplement identifier l'expression de la fonction avec la formule par approximation affine au point concerné, sans effectuer aucun calcul. On peut aussi lui demander, à partir d'une représentation graphique, donnée sur papier quadrillé et comprenant la courbe et sa tangente en un point (ou ses demi tangentes à gauche ou à droite), de dire si la fonction est dérivable en ce point et quelle est la valeur éventuelle, « lue », du nombre dérivé. La relation entre nombre dérivé en un point et coefficient directeur de la tangente en ce point (ou équation de la tangente), est également travaillée à travers des exercices qui mettent en jeu les divers « passages » possibles (par exemple, du nombre dérivé à l'équation de la tangente et inversement : voir l'exercice n°42 page 179 où l'on recherche analytiquement la dérivée f ' sachant que f est une fonction polynôme de degré deux, à partir de conditions sur les tangentes en divers points de la courbe représentative de f).

42 ★ La représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f est donnée par la figure ci-dessous :



1° On constate que :
la courbe passe par le point O, la tangente en O est la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $P\left(\frac{1}{2};3\right)$ et, qu'aux points d'abscisses respectives 1 et 2, les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses.

Traduire ces propriétés par des propriétés concernant la fonction f et sa dérivée f'.

2° On admet que f' est définie, pour tout réel x, par :
$f'(x) = ax^2 + bx + c$, avec a différent de 0.
Déterminer $f'(x)$.

Il y a donc ici toute une batterie d'exercices visant à permettre à l'élève de bien identifier les connexions entre les diverses notions étudiées, de voir comment elles s'agencent au sein d'un ensemble cohérent, les unes par rapport aux autres.

Cependant, il faut bien constater aussi que cet élève ne fait ici que travailler des « gammes », tout particulièrement au sein de la rubrique « Tests », les exercices portant systématiquement sur des fonctions particulières usuelles (voir plus haut) et des tâches qui sont assez répétitives. En outre, dans les cas où il faut utiliser la définition du nombre dérivé, il y a toujours une limite, au moins à gauche et à droite, pour le taux d'accroissement. Ainsi, le résultat obtenu lors de l'évaluation du(des) nombre(s) dérivé(s) se traduit toujours par une réalité graphique simple. On ne demande jamais, par exemple, d'étudier la dérivabilité en 0 d'une fonction telle que celle qui à tout x non nul associe x.sin(1/x) et à 0 associe 0. D'ailleurs, les fonctions dont on fait ici étudier le nombre dérivé en un point « délicat » par la définition sont toujours définies par une seule expression, et on se limite ainsi aux seuls cas de fonctions très simples, comportant un radical ou une valeur absolue. Ces cas correspondent d'ailleurs à des exercices « étoilés » (réputés plus difficiles). Compte tenu de la marginalité de ce type d'exercices et de la situation générale que l'on vient de décrire (en particulier d'un point de vue graphique), « moralement » il s'avère pour l'élève, que d'une part, globalement les fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition, et que d'autre part, toute courbe admet en tout point une tangente, ou tout au moins, deux demi tangentes.

Autre écueil évité, dans cet univers d'exercices : les situations où l'élève doit étudier la dérivabilité en faisant lui-même le choix, soit de recourir aux théorèmes généraux, soit de revenir à la définition. Puisque le second cas est marginalisé et fait l'objet d'indications spéciales du texte (voir III/ Classification selon les aides à la résolution), il n'y a pas la place dans cet environnement pour une réflexion sur les modalités d'utilisation de l'une ou de l'autre des deux méthodes.

b) <u>Dérivabilité et calculs de limites.</u>

Seuls deux exercices (n°35 et n°36 page 178) mettent en évidence le fait que l'on puisse évaluer certaines limites en reconnaissant des taux d'accroissement. Encore suggèrent-ils l'idée à l'élève en lui demandant préalablement de calculer la dérivée d'une certaine fonction... et par ailleurs, dans les exemples choisis (fonctions irrationnelles simples), une technique algébrique (quantités conjuguées) serait possible, ce qui sous-évalue l'utilité de cette méthode par identification d'un taux d'accroissement. Seules les fonctions trigonométriques peuvent, en réalité, au niveau de la classe de première S, rendre compte vraiment du caractère incontournable de cette méthode dans certains cas... puisque l'introduction des fonctions logarithme népérien et exponentielle est effectuée seulement en terminale. Cela peut expliquer dans une large mesure la marginalisation relative de ce type d'exercice ici... sans oublier naturellement que la dérivée est un objet second (et nouveau en première S) vis à vis de la notion de limite (qui constitue, elle aussi un objet nouveau).

35 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ définie sur $[1 ; +\infty[$.

Déterminer la fonction dérivée f' de f.

En déduire $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

36 ★ En procédant comme dans l'exercice précédent, déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3x+4}-2}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{3}}{x+1}$.

c) Equations de tangentes, coefficients directeurs de tangentes.

On peut reprendre, concernant les équations de tangentes, tout ce qui a été dit ci-dessus à propos d'une relative variété des interactions qui sont mises en évidence par les activités proposées, dans un certain cadre (fonctions usuelles particulières), entre cette notion et d'autres, concernant la dérivation. Ajoutons que certains exercices font aussi le lien entre équation de tangente et approximation affine (voir « tests » n°10 et n°11 page 172) : il s'agit d'identifier l'équation de la tangente en A(a,f(a)), à la courbe représentative d'une fonction polynomiale f déjà décomposée sous la forme ad hoc (selon les puissances de x-a). L'exercice n°11 page 175 fait aussi le lien entre l'objet « tangente » vu comme perpendiculaire au point de tangence au rayon du demi-cercle supérieur de centre O et de diamètre égal à 2 et l'équation de la tangente au point considéré pour la courbe représentative de la fonction $x \to (1-x^2)^{1/2}$.

(Justifier)

10° La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto -1 + 3x + 4x^2 - 5x^3$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x - 1$.

11° La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto -2 + 3(x+1) - 5(x+1)^3$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 3x + 1$.

11 ★ Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est le demi-cercle obtenu comme intersection du demi-plan d'équation $y \geqslant 0$ et du cercle de centre O et de rayon 1.

2° Déterminer, par un argument géométrique, l'équation de la tangente T à ce demi-cercle au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

En déduire que la fonction f est dérivable en $a = \frac{1}{2}$ et préciser $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Toutes les remarques effectuées précédemment sur les limitations imposées au panel d'exercices et de problèmes proposés (ne serait ce que celles qui sont inhérentes à la gamme très limitée de fonctions usuelles connues des élèves en première S) demeurent.

d) Approximations affines, cas des problèmes « concrets ».

Signalons en premier lieu que le thème de l'approximation affine fait implicitement l'objet, dans le cours, d'un théorème et non d'une définition, même si nous l'avons associé (fort naturellement) à une définition dans notre premier tableau de classification (selon les types d'activités).

Il est dit en effet (page 161) :

> *« S'il existe un nombre réel A et une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que :*
> *$f(a+h) = f(a) + A.h + h.\varphi(h)$ avec $\varphi(h) \to 0$ pour $h \to 0$, alors f est dérivable en a et $A = f'(a)$ »*

Cette proposition est d'ailleurs démontrée dans le cours, alors que sa réciproque, bien que vraie (mais dont la preuve est moins « naturelle », puisqu'elle demande d'introduire soi-même une fonction φ tendant vers 0 en 0) n'est même pas évoquée.

Les conséquences de cette situation, au niveau des exercices et des problèmes proposés, sont bien réelles mais parfois difficiles à percevoir. Tout d'abord, la formule de l'approximation affine est ici limitée aux seules fonctions polynômes, rationnelles et irrationnelles. Elle va donc pouvoir être établie en situation d'exercice de façon « autonome » à l'aide de simples transformations algébriques sur l'expression de la fonction, et grâce aux directives du texte, comme s'il s'agissait d'une formule quelconque (voir notamment l'exercice n°15 page 175).

> **15** Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$.
>
> 1° Soit h un réel.
> Exprimer $f(1+h)$ en fonction de h et vérifier qu'il existe des nombres réels a et b et une fonction ε tels que :
>
> $$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{et} \quad f(1+h) = b + ah + h\,\varepsilon(h).$$
>
> 2° Conclure directement à la dérivabilité de f en 1 ; quel est le nombre dérivé de f en 1 ?

L'énoncé peut alors demander d'*en déduire* la dérivabilité au point considéré et la valeur du nombre dérivé ; c'est donc uniquement un rapport d'*implication* qui est ici sollicité. L'équivalence entre la définition de la dérivabilité par la limite du taux d'accroissement et la formule de l'approximation affine n'est pas utilisée pour traiter les exercices proposés. Elle n'est donc pas évoquée et cette formule n'a pas ici un statut de définition, même si cela reste implicite, puisque la question n'a jamais l'occasion d'être posée. De telles considérations, de nature logique, ne sont d'ailleurs pas vraiment dans les objectifs du programme, bien que le B.O du 7 juillet 1994 entretienne sur ce point une certaine ambiguïté ; il y est dit en effet : *« On entraînera les élèves à la pratique des modes usuels de raisonnement, équivalence logique, implication, contraposition ...Tout exposé de logique mathématique est exclu »* (objectifs d'ensemble).

Cela peut signifier, que dans le contexte de la classe de première, l'évocation, *sous un angle général,* c'est à dire d'un point de vue *théorique* et non pas seulement *pratique,* de cette question (la formule de l'approximation affine, condition suffisante de dérivabilité en un point ou autre définition pour cette dérivabilité ?) n'est pas adaptée à l'environnement d'exercices concerné. Il semble pourtant important, même pour la résolution d'exercices élémentaires, de savoir que réciproquement, une fonction dérivable en un point vérifie la formule de l'approximation affine en ce point (notamment en vue de réaliser des approximations numériques). Et en l'occurrence, il apparaît surtout que c'est le mode de questionnement introduit qui permet l'évitement de ce type de question.

Bref, toujours est-il que cette formule de l'approximation affine est sollicitée essentiellement ici en tant que condition suffisante de dérivabilité en un point, et dans son statut « outil » (elle sert à obtenir le nombre dérivé). Il arrive cependant que l'on demande d'établir, à partir du calcul d'un nombre dérivé pour une fonction usuelle, la formule par approximation affine correspondante, mais c'est toujours dans un cas particulier et cette formule est alors fournie par le texte (voir TP n°3 pages 169-170, problème n°53 pages 181-182).

b) Calculer $\phi(x) = \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ et montrer que ϕ admet une limite en 1. En déduire que g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.	c) Justifier qu'il existe une fonction ε, qu'on ne cherchera pas à expliciter, telle que : $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $g(1+h) = 1 - \frac{1}{4}h + h\,\varepsilon(h)$ pour h appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,0]$.

Ainsi, la *« réciproque du théorème de l'approximation affine »* est établie sur des exemples, mais non institutionnalisée, ce qui donne un statut tout à fait original à cette formule. L'élève n'a pas la nécessité de l'introduire de lui-même, et donc de la mémoriser de façon précise ; elle lui est très systématiquement suggérée pour application, ou bien il lui faut la reconnaître, voire même l'établir, mais il est alors guidé dans cette tâche de façon très spécifique.

Corrélativement, cette formule de l'approximation affine en un point pour une fonction dérivable en ce point, rigoureusement équivalente à la dérivabilité de cette fonction en ce point, n'est alors pas inspectée, mise en perspective et exploitée dans toutes ses dimensions. Par exemple, les pratiques décrites ci-dessus relèvent d'une certaine initiation, mais n'amènent encore aucune observation sur le fait que le « reste » est du type $h.\varphi(h)$ au lieu de $\varphi(h)$ plus simplement. Ce problème a d'ailleurs déjà été évoqué par Marc Rogalski à l'Université de Lille ; lorsque l'on demande à des étudiants de première année de DEUG (donc deux ans après la classe de première), de dire quelle égalité conduit à l'approximation : $\sin(x) \approx x$ au voisinage de 0, beaucoup répondent que c'est l'égalité : $\sin(x) = x + \varphi(x)$, avec $\varphi(x) \to 0$ quand $x \to 0$, au lieu de l'égalité : $\sin(x) = x + x.\varphi(x)$. Le point de vue selon lequel la courbe « s'écrase » sur la tangente, puisque la différence d'ordonnée $(f(a+h)-f(a)-A.h)$ entre deux points de même abscisse, l'un sur la courbe et l'autre sur la tangente, devient très petite devant h quand on se rapproche du point de tangence (h tendant vers 0) n'est, par suite, ni développé, ni même préparé au moyen de la formule par approximation affine (il pourrait aussi être travaillé via la forme quotient, mais ce n'est pas non plus le cas ici).

Le point de vue « Analyse », lié à la notion de propriété locale : « localement, sur un certain intervalle ouvert centré en a, $f(a+h)$ et $f(a) + h.f'(a)$ sont très proches, mais on n'a pas, de façon générale, la maîtrise de l'amplitude de cet intervalle », n'est pas non plus effleuré (comme il pourrait l'être par l'étude en 0 d'exemples du type : $f(h) = h + h^2.10^{1000h}$).

Ce qui est d'abord visé, dans les exercices et problèmes de ce manuel, notamment à travers des problèmes de nature économique ou géométrique, ce sont des situations « réelles » d'approximation, cette approximation étant de nature numérique. La quantité du type $h.\varphi(h)$ va plutôt se présenter dans les énoncés comme la différence entre le terme $f(a+h)$ et la quantité : $f(a)+h.f'(a)$, différence qu'on appelle « l'erreur » commise dans l'approximation effectuée de $f(a+h)$ par le terme $f(a)+h.f'(a)$, erreur qu'il faut majorer (pour la maîtriser) selon les indications du texte (pilotage). L'attention se déplace ainsi sur d'autres centres d'intérêt : les processus de modélisation, la signification concrète (ou pseudo concrète) du problème... Des notions extra mathématiques intervenant dans la réalité du problème apparaissent (par exemple, la notion de « coût marginal » dans le problème n°54 page 182). Il se peut même, dans ce cas, que ce ne soit plus « l'erreur », égale à ce terme $h.\varphi(h)$, qui fasse l'objet d'une évaluation, mais ce qu'on appelle « l'erreur relative ». C'est notamment le cas dans l'exercice n°17 de la page 176 :

17 ★ Soit x un nombre réel positif.
Un article, d'un prix P, subit une première hausse de x %.
Son nouveau prix subit une seconde hausse de x %.
Le prix est alors P_1.

1° Dans les cas suivants, déterminer le pourcentage d'augmentation de P à P_1 et le comparer à une hausse de $2x$ % :

a) $x = 20$; b) $x = 5$; c) $x = 0{,}2$.

2° Montrer que $P_1 = P\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2$.

3° En déduire que $\frac{P_1 - P}{P} = \frac{2x}{100} + \frac{x^2}{100^2}$.

4° Déterminer l'ensemble des nombres réels positifs x pour lesquels l'erreur commise, lorsqu'on remplace $\frac{P_1 - P}{P}$ par $\frac{2x}{100}$, est inférieure à 0,01.

Dans bien des cas, la formule « exacte », $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varphi(h)$ où $\varphi(h) \to 0$ quand $h \to 0$, de l'approximation affine, ne constitue plus qu'une « toile de fond », son utilité pratique se dissolvant quelque peu. Le caractère « affine » de l'approximation effectuée peut même être aussi relégué à l'arrière plan.

Ainsi demande t'on à l'élève, dans l'exercice n°16 page 176, de contrôler directement (par des techniques algébriques élémentaires), dans un cas évidemment très particulier, l'approximation polynomiale qui lui est indiquée, et qui se trouve être une approximation de type « affine », pour en tirer ensuite des valeurs numériques approchées :

16 Justifier l'affirmation suivante :
$1 + 3h$ est une valeur approchée de $(1 + h)^3$ à $4h^2$ près lorsque $h \in [-1 ; 1]$.
En déduire une valeur approchée des nombres suivants en précisant un majorant de l'erreur commise :

$y_1 = 1{,}02^3$ et $y_2 = 0{,}95^3$.

Enfin, il arrive même que l'erreur ne soit plus évaluée du tout ; il se produit une sorte de « glissement », la quantité $h.\varphi(h)$ n'étant même plus contrôlée, mais directement négligée, au sens de *« laissée pour compte »*. La formule utilisée alors vise une approximation numérique valable pour h « petit », sans autre précision). Adaptée aux problèmes de nature « concrète » (ceux tirés de la physique, notamment), qui lui fournissent d'ailleurs ici son champ principal d'utilisation, elle est institutionnalisée dans ce manuel : $f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a)$.

Dans le test n°12 page 172, on demande aux étudiants de montrer les approximations suivantes : a) $1{,}003^3 \approx 1{,}009$ b) $4{,}002^{1/2} \approx 2{,}0005$ c) $1 / 0{,}998 \approx 1{,}002$. Dans le problème n°55 page 182, l'objectif est de trouver une approximation affine du volume de matière utilisée dans l'enveloppe extérieure d'un cône ou d'une boule, selon l'épaisseur e de cette enveloppe. Dans le même ordre d'idée, certains énoncés amènent à assimiler taux d'accroissement et nombre dérivé dans un problème concret d'approximation : le problème n°54 page 182 invite à assimiler le coût marginal $C(x+1)-C(x)$, autrement dit l'augmentation de coût correspondant à la fabrication de x+1 objets au lieu de x objets, avec $C'(x)$.

On voit donc que l'on a affaire ici à un environnement fort particulier, au sein duquel se développe un rapport très « typé » à l'objet mis en jeu : les fonctions souvent très simples sur lesquelles on travaille ici (polynomiales, parfois rationnelles ou irrationnelles, jamais trigonométriques) permettent des manipulations algébriques aisées qui rendent plus transparente la formule de l'approximation affine. En contrepoint, on cherche à dévoiler d'autres perspectives à l'élève, tirées du monde réel, qui doivent aider à justifier l'introduction de cette notion nouvelle, à lui donner sens.

Toutes ces composantes observées (simplicité des calculs effectifs, absence de situations un peu générales, ouverture sur d'autres domaines,... etc.) doivent être comprises comme caractéristiques d'un premier rapport à la dérivée. Elles résultent d'un choix délibéré et des contraintes écologiques du système, même si l'on peut parfois se demander si l'évidence de certaines approximations affines, dans un contexte purement algébrique (renforcé par le choix des fonctions) et numérique, ne va pas se dresser ultérieurement en obstacle à l'apprentissage de l'Analyse (difficile, par exemple, de bien aborder l'idée - très générale - de *« négligeabilité »* du reste en $h.\varphi(h)$ par l'intermédiaire de majorations très directives !)...

L'approximation numérique constitue un thème récurrent qui donne une finalité au travail algébrique imposé et trouve son sens dans la résolution de problèmes « concrets », de nature physique, économique ou géométrique. Mais le contrôle de l'erreur n'est pas systématique, ce qui fait perdre à la formule « exacte » d'approximation : $f(a+h) = f(a) + h.f\,'(a) + h.\varphi\,(h)$ avec $\varphi(h)\to 0$ quand $h\to 0$, une grande partie de son intérêt, au profit d'une formule plus « parlante » : $f(a+h) \approx f(a) + h.f\,'(a)$, valable pour h « petit ». De tels « glissements », qui assimilent le terme $h.\varphi(h)$ à un terme « négligeable » (mais au sens de la physique, c'est à dire « que l'on peut oublier ») ne sont pas sans risques et éloignent de toutes façons l'élève du point de vue de l'Analyse où la notion de « négligeabilité » (comme d'ailleurs l'idée de propriété « locale ») n'a pas la même signification. Dans le même ordre d'idée, l'approximation suggérée par certains énoncés entre taux d'accroissement et nombre dérivé (dans un certain cadre) est à signaler. Elle pourrait également entraîner des confusions entre ces termes dans des situations d'exercices où l'amalgame n'est pas acceptable.

e) Vitesses instantanées.

Cette notion donne lieu à très peu d'exercices, tous du même type, et assez frustes. A partir de l'expression, f(t), du déplacement d'un point mobile sur un axe, selon le temps t, on demande de calculer la vitesse instantanée à l'instant t, v(t), et l'on pose des questions du style : *« Déterminer l'instant t pour lequel on a : f(t) =... »*, *« Que vaut alors la vitesse à cet instant ? »*, etc... La situation physique de référence est celle de la bille qui tombe d'une hauteur h, son déplacement étant régi par la loi : $f(t) = 0{,}5gt^2$, où g est l'accélération de la pesanteur. L'expression f(t) qui est proposée est toujours polynomiale.

Vis à vis des notions relatives à la dérivation, ce type d'exercices requiert donc seulement de savoir dériver des fonctions très simples. Il n'y a aucune tentative dans ces exercices pour problématiser le concept de vitesse instantanée, qui est implicitement supposé connu, alors que des difficultés spécifiques liées à l'apprentissage de ce concept ont été identifiées (Schneider, 1992).

En outre, ce type d'exercices ne donne pas une image très fidèle du travail réel que l'on doit effectuer en cinématique ou en mécanique du point, où la connaissance de l'accélération précède celle de la vitesse qui précède elle-même celle du déplacement, et non pas le contraire. Mais bien sûr, vu l'état des connaissances de l'élève en première S (la notion de primitive n'étant pas au programme), il paraît délicat de poser d'autres types d'exercices sur ce thème de la vitesse instantanée.

La vitesse, vue comme grandeur vectorielle dans l'espace, n'est pas abordée, de même qu'une notion telle que celle de vitesse instantanée de rotation.

f) Fonctions dérivées.

Sur ce thème, on demande surtout, là encore, de dériver formellement des expressions, en l'absence de difficultés techniques particulières. Il s'agit simplement de faire en sorte que ce type de tâche, consistant pour l'essentiel à appliquer les théorèmes généraux de dérivation (opérations et fonctions usuelles) devienne assez routinier pour l'élève.

La démonstration de ces théorèmes fait l'objet de quelques exercices très guidés (section 1 page 173 : dérivée de la fonction « racine carrée », du quotient de deux fonctions, etc..., exercice n°19 page 176 : dérivées du sinus et du cosinus). Les divers liens existant entre « nombre dérivé » et « fonction dérivée » sont donc a priori assez bien mis en valeur, comme il a été vu plus haut : 1) *Obtention de l'expression d'une fonction dérivée à partir d'un calcul générique de nombre dérivé*, et : 2) *Inversement, utilisation de la fonction dérivée pour avoir un nombre dérivé particulier*. Cependant, le premier type de rapport entre les deux concepts, surtout présent au sein d'une rubrique qui marginalise (« Démonstrations de cours ») reste sans doute très peu travaillé au regard du second, qui lui, correspond à une pratique très sollicitée en exercices.

Il y a très peu d'exercices plus originaux, et en particulier fort peu d'exercices où c'est la dimension « objet » qui est travaillée. On peut cependant citer les exercices n°33 (recherche d'un polynôme P qui soit proportionnel au carré de sa dérivée) et n°34 page 178 (notion de racine double pour une fonction polynôme, lien avec la fonction dérivée), ainsi que l'exercice n°20 de la page 176 (étude de la parité de la dérivée d'une fonction paire ou impaire, et dérivable). Ces exercices se situent à un niveau de généralité plus élevé vis à vis des notions utilisées. Les quelques « avancées » dans un champ d'exercices plus vaste portent donc ici sur l'introduction nécessaire d'un certain degré de formalisation autonome, ou l'application de la formule de dérivation d'une fonction composée gof dans le cas où f est une fonction affine (formule d'ailleurs au programme), mais n'introduisent pas véritablement un *questionnement* particulier des concepts.

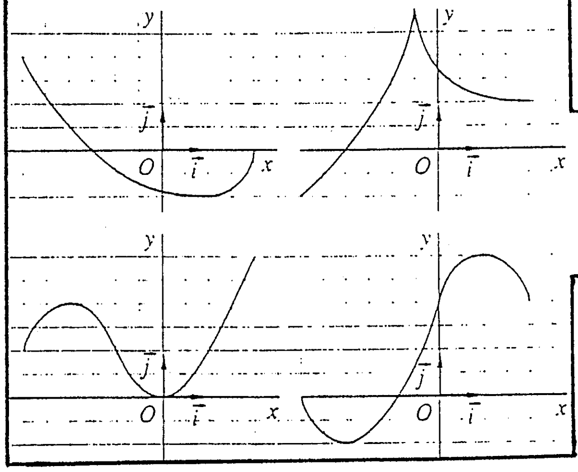
On aurait pu imaginer, par exemple, une tâche du style : *« Etude d'exemples mettant en exergue le fait que le nombre dérivé d'une fonction en un point et la limite de la fonction dérivée en ce point peuvent exister indépendamment l'un de l'autre (donc ne sont pas nécessairement égaux) »*. Mais une telle tâche, bien que compatible, techniquement parlant, avec les connaissances et les savoir-faire du programme de première S, ne semble guère viable à ce niveau d'apprentissage : un tel questionnement apparaît comme trop anticipé et peu compréhensible pour un élève se situant au stade de l'installation d'un premier rapport à la dérivée.

g) <u>Variations, extrema, optimisation, études de fonctions.</u>

Les exercices et les problèmes portant sur ces thèmes s'attachent toujours à des fonctions particulières, rarement paramétrées, et correspondant aux types de fonctions les plus simples. Ainsi, sur le thème « Variations et extrema », qui regroupe les premiers exercices nécessitant l'utilisation du théorème de monotonie, les seules fonctions mises en jeu sont du type « polynomial » ou « fraction rationnelle ». Dans le thème « Optimisation », il apparaît en outre quelques fonctions irrationnelles. Mais nous ne retrouvons vraiment tous les types de fonctions du programme de première S (c'est à dire ceux que nous venons de citer, auxquels nous devons ajouter les fonctions trigonométriques), que dans les exercices du thème « Etudes de fonctions ».

Concernant le théorème sur les extrema, on remarquera qu'il y a quelques exercices, parmi les premiers de la liste (sur ce thème), qui mettent bien en relief le caractère indispensable de la condition d'extremum en a : « f ' change de signe en a », et notamment les deux exercices où apparaissent des fonctions paramétrées. Ensuite, c'est à dire dans les problèmes du thème « Etudes de fonctions », et fort naturellement, dans ceux du thème « Optimisation », les occasions de revoir ce point « problématique » deviennent plus rares. En dépit d'un exercice de lecture graphique (n°17 page 204), mettant en évidence la possibilité d'avoir un extremum en des points où la dérivée ne s'annule pas (extrémités d'intervalles ou points anguleux), l'idée qui ressort clairement de l'ensemble des vingt-sept exercices et des vingt-huit problèmes posés ici reste que *« pour détecter la présence d'un extremum local, il faut surtout résoudre l'équation : f '(x) = 0 ».*

17 Les courbes suivantes sont représentatives d'une fonction définie sur l'intervalle [– 3 ; 2] et admettent un maximum en a.



Dans chaque cas :

a) quelle est la valeur de a ?

b) la fonction est-elle dérivable en a ?

c) la dérivée s'annule-t-elle en a en changeant en signe ?

Il n'y a aucun exercice ou problème, ici, qui fournisse l'occasion d'une discussion autour des hypothèses du théorème de stricte monotonie. Autrement dit, la question : *« Une fonction de dérivée positive ou nulle sur intervalle I peut-elle être strictement croissante sur I ? »*, qui constitue une problématique intéressante, est ici simplement éludée. Rappelons qu'il était possible, sur un exemple simple ($x \to x^3$), de constater en résolvant algébriquement une inéquation, la stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle où sa dérivée s'annule au moins une fois.

De même, dans les études de fonctions proposées, les comportements locaux et asymptotiques correspondant ici à une « zoologie » de fonctions très ordinaires sont le plus souvent non problématiques (il n'y a pas, notamment, de fonctions du type $x \to x.\sin(1/x)$). Cette zoologie crée donc implicitement des règles, auxquelles l'élève est susceptible de s'accoutumer, dans son travail d'entraînement visant une familiarisation à certaines pratiques.

Enfin, on ne trouve qu'un problème (n°47 page 208) où il est nécessaire de dériver deux fois de suite une même expression pour étudier les variations d'une certaine fonction. La notion de dérivée seconde et la notation f '' ne sont certes pas au programme de première S (ce qui n'empêche pas le problème cité de les introduire à titre exceptionnel), mais est-il vraiment nécessaire que soit institutionnalisée une telle notion pour effectuer des exercices de ce type ? L'énoncé peut toujours, au besoin, renommer g la dérivée f ' d'une fonction f, puis faire considérer à l'élève la dérivée g' de g, si l'on veut éviter d'introduire la notion de dérivée d'ordre deux. Corrélativement, il n'y a pas non plus d'exercice ou de problème qui propose d'étudier la position relative d'une courbe et de sa tangente en un point, sur un certain intervalle, *sauf* bien sûr dans la situation où le signe de la différence : $f(x) - f(a) - (x-a).f'(a)$ peut s'étudier *algébriquement*, ...ce qui est le cas pour les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à trois. L'exercice n°40 de la page 178 en donne un exemple :

> **40** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
> $$f(x) = x^3 - 6x^2 + 10$$
> et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
>
> 1° Déterminer une équ~~ation~~ de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.
>
> 2° Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T.
>
> 3° Au voisinage du point A de $\mathscr{C}$, donner l'allure de la tangente T et de la courbe $\mathscr{C}$.

Une telle tâche pourrait déboucher aussi, sur l'introduction d'une problématique plus générale (par exemple, étude d'une situation sous une hypothèse du style « f ' est croissante sur I »).

Au-delà de l'entraînement à certains standards d'exercices, ce qui est visé aussi par cet environnement d'exercices et de problèmes semble être de dévoiler à l'élève la grande fécondité du théorème de monotonie (utilisable, notamment, pour résoudre des problèmes « concrets » d'optimisation), même dans son application la plus élémentaire. C'est du reste l'objectif annoncé des programmes.

h) Dérivation, bijections et équations.

Ce thème correspond à une série d'exercices bien ciblés dans ce manuel (présence d'un sous-titre) au chapitre des « Applications de la dérivation » (page 205). Dans ces exercices, il s'agit pour l'essentiel de faire fonctionner deux théorèmes présentés conjointement dans le cours, car ayant deux *hypothèses* en commun :

1) *« f est dérivable sur un intervalle [a,b] »*
2) *« f est strictement monotone sur [a,b] ».*

Le premier de ces théorèmes annonce que sous ces deux hypothèses, f constitue une bijection de [a,b] sur [f(a),f(b)] ou [f(b),f(a)]. Le second affirme que si de plus f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors l'équation f(x) = 0 possède une unique solution sur [a,b].

Une remarque s'impose d'emblée, concernant ces énoncés, qui nous permet de mieux cerner les objectifs et les limites des exercices proposés ici, vis à vis de l'apprentissage, et les rapports aux objets qui en découlent : ces énoncés comportent une condition de dérivabilité sur f qui est superflue vis à vis de la conclusion visée. Il n'y a pas, en effet, la nécessité de supposer la fonction f dérivable, mais seulement continue sur [a,b] (et strictement monotone) pour obtenir les résultats annoncés. Ce qui crée cette nécessité, c'est le fait que la notion de continuité ne soit pas au programme de première S. D'un point de vue « fonctionnel », un tel énoncé se justifie pleinement pour traiter les exercices ici proposés à l'élève, puisque pratiquement toutes les fonctions usuelles du programme sont dérivables sur leur ensemble de définition, ce qui permet une étude de leurs variations grâce au théorème de (stricte) monotonie. Une certaine cohérence est donc respectée, qui permet aux exercices d'application directe (à des fonctions particulières) de ces énoncés, de « vivre » et « prospérer » dans la classe. Comme ce sont justement ces exercices là qui sont ici proposés aux élèves, il y a donc accord, globalement, entre le rapport aux énoncés induits par ces activités de familiarisation et les énoncés eux-mêmes.

Cependant, quelques exercices, par exemple de portée plus générale, trouvent plus difficilement leur place dans cet environnement. Ainsi, l'exercice n°33 page 206 *: « Montrer que tout polynôme du troisième degré admet au moins une racine (réelle) »*, ou mieux encore, l'exercice n°34 page 206 : *« Justifier que tout polynôme de degré n impair admet au moins une racine réelle »* deviennent plus difficiles à mettre en forme sans la notion de continuité. Dans le premier cas, il faut discuter le signe du trinôme correspondant à la dérivée de la fonction polynôme de degré trois (il y a alors 3 cas possibles : 1/ stricte croissance sur R de la fonction polynôme, 2/ stricte décroissance sur R de cette fonction, 3/ stricte monotonie sur trois intervalles dont la réunion est R, avec alternance du sens de variation…). Dans le second cas, il faut admettre que les fonctions polynômes de degré n sont strictement monotones sur les intervalles d'une certaine partition de R en un nombre fini d'intervalles, pour pouvoir appliquer le théorème du cours ! Naturellement, on ne peut que déplorer l'aspect totalement artificiel de telles démarches, puisque graphiquement, la continuité sur [a,b] (intuitive) est bien perçue par l'élève comme la raison fondamentale de l'existence d'une solution réelle à l'équation f(x) = 0, même s'il ne peut formuler ainsi sa vision de la situation, faute de posséder le langage approprié.

Dans le contexte étudié, où seule l'application directe des énoncés est visée, on ne trouve aucun exercice qui *« questionne »* les énoncés précités, en fasse un objet d'étude pour eux-mêmes. Mais bien sûr, la question qui se pose, là encore, est : *« Cela est-il écologiquement possible ? »…*

A cette question, nous répondons qu'il y aurait parfois la possibilité d'amener l'élève, à travers diverses tâches très simples (de nature graphique, par exemple), à certaines réflexions critiques, notamment concernant l'énoncé qui propose, sans rappel préalable de ce qu'est l'objet « bijection », une condition suffisante d'obtention du caractère bijectif d'une application. La stricte monotonie, par exemple, ne constitue en rien une nécessité pour avoir la bijectivité, mais a quelque chose à voir avec le fait que l'intervalle image de [a,b] va être du type [f(a),f(b)] ou [f(b),f(a)]. Faute de tels éclaircissements, qui pourraient faire l'objet dans certains exercices d'une problématisation ad hoc, la constitution de théorèmes en actes (du style : *« L'image d'un intervalle [a,b] par une application f est toujours du type [f(a),f(b)] ou bien [f(b),f(a)] »* ou : *« Toute bijection est dérivable et strictement monotone »* ou encore : *« Le fait de prendre un intervalle [a,b] plutôt qu'une partie quelconque de R est sans incidence sur le résultat »*) trouve sans doute là, selon nous, un terrain favorable.

Cependant, l'environnement d'exercices choisi ici répond naturellement à d'autres finalités : isoler et travailler certaines techniques, qui doivent permettre, à terme, l'automatisation chez l'élève de la preuve du caractère bijectif d'une application numérique ou de celle de l'existence et de l'unicité de la solution d'une certaine équation. Les énoncés font donc travailler sur le passage d'un problème de nature algébrique (existence et nombre de solutions pour une équation donnée) à un problème d'analyse (étudier la fonction polynomiale f correspondante et en déduire le nombre de « zéros » de cette fonction). Ils font travailler aussi sur des équations spécifiques, en l'occurrence trigonométriques, avec l'aide de nouveaux énoncés propres à automatiser la résolution de ces équations et donc à la faciliter (« $\cos(x)=a$ possède une unique solution sur $[0,\pi]$ si $a\in[-1,1]$ »).

i) <u>Géométrie analytique et dérivation</u>.

Il y a très peu de choses à dire sur ce thème, les seules questions ayant trait ici à la dérivation portant sur la détermination de l'équation de la tangente en un point donné pour la courbe représentative d'une certaine fonction. La fonction considérée est d'ailleurs souvent celle associée à l'hyperbole d'équation $Y = 1/X$ ou à la parabole d'équation $Y = X^2$, dont on fait étudier certaines propriétés géométriques, notamment au sein de travaux pratiques (foyer et directrice). De telles tâches restent cependant assez discrètes.

Les autres questions, très majoritaires, n'ont aucun rapport avec la dérivation et portent spécifiquement sur l'aspect « géométrie analytique » (conditions de parallélisme, calcul des coordonnées de certains points,… etc.).

3°) Quelques résultats statistiques complémentaires.

a) <u>Présence de paramètres</u>.

Nous relevons, en colonne 7 de notre tableau de classification par types d'objets, que 18,5% des exercices et problèmes proposés comportent des paramètres. Ils interviennent à un niveau explicite dans 85% des cas, et à un niveau implicite dans 15% des cas.

Concernant les cas d'intervention implicite, il faut noter qu'ils correspondent tous à des problèmes portant sur des polynômes, ce qui limite tout de même quelque peu la généralité des problèmes envisagés. Il s'agit de montrer qu'un polynôme de degré égal à trois possède au moins une racine réelle (n°33 page 206), de trouver un polynôme proportionnel au carré de sa dérivée (n°33 page 178), de déterminer une fonction polynôme du troisième degré qui admet 5/6 pour maximum en 1, un minimum en 2 et qui s'annule en 0 (n°23 page 205), etc...

Les paramètres portent presque aussi souvent sur les points que sur les fonctions (48,5% contre 51,5%) : étude de la dérivabilité d'une certaine fonction en un point d'abscisse paramétrée a, résolution d'équations paramétrées du type $f(x) = a$, équation de tangente au point variable d'abscisse a,... etc. Du côté des fonctions, on trouve la détermination du nombre de solutions d'une équation polynomiale paramétrée (à l'aide d'une étude des variations de la fonction correspondante, selon les valeurs du paramètre considéré), le calcul de paramètres a et b pour que la fonction f définie par $f(x) = \sin(ax+b)$ satisfasse à certaines conditions (liées à la dérivation), l'étude de l'approximation polynomiale d'ordre n quelconque, au voisinage de zéro, pour la fonction g définie par : $g(x)=1/(1-x)$,... etc.

D'autre part, 63,5% des paramètres présents font travailler l'élève en liaison avec la notion de dérivée (c'est le cas notamment des études de fonctions paramétrées), tandis que 36,5% (c'est beaucoup !) correspondent à d'autres enjeux (modélisation de situations concrètes, géométrie analytique,... etc.). Notons aussi que 25% des exercices à paramètres correspondent à la rubrique « Démonstrations de cours », qui, très probablement, n'est guère représentative des activités les plus courantes dans la réalité de la classe.

Enfin, la plupart des paramètres présents au niveau des fonctions se retrouvent dans des expressions polynomiales (voire rationnelles), comme nous l'avons déjà largement suggéré. Mais il convient d'ajouter à cela que ces paramètres se situent dans les coefficients multiplicatifs de l'expression polynomiale, et jamais en exposant (conformément au programme, du reste, puisque les fonctions puissances et exponentielles seront vues en classe de terminale). Il est clair que ce fait limite considérablement la variété de situations possibles et le niveau de difficulté présent dans ces exercices faisant intervenir des paramètres.

b) <u>Le degré de généralité</u>.

On rencontre 83,5% d'exercices et de problèmes correspondant à un degré de généralité nul, 6% à un degré de généralité maximum et 10,5% à un degré de généralité intermédiaire, ce qui constitue un résultat éloquent du point de vue de la caractérisation de cet environnement.

A cela, il faut d'ailleurs ajouter que la quasi totalité des exercices ayant un degré de généralité maximum sont issus de la rubrique « Démonstrations de cours », ce qui montre que ce type d'exercices n'a pas encore trouvé son espace naturel dans cet environnement. Sa présence y est à la fois faible et artificielle.

c) <u>Catégories « Applications » et « Questionnement »</u>.

Il y a 90,3% des exercices et problèmes étudiés qui sont à ranger dans la catégorie « Applications », contre 9,7% appartenant à la catégorie « Questionnement ». Parmi ces derniers, citons en vrac :

- Ceux (n°7 à 10 page 175) dépassant le cours « stricto sensu », qui introduisent les notions de dérivabilité et de demi tangentes à gauche et à droite en un point, ou celle de tangente verticale,

- Un exercice (n°21 page 204) qui permet de distinguer « extremum local » et « extremum global »,

- Les exercices (n°33, 34, 35 page 206) qui font le lien entre l'étude du nombre de solutions d'une équation algébrique et l'étude des variations de la fonction associée, grâce aux théorèmes généraux de l'Analyse (théorème de monotonie, théorème de la bijection),

- L'exercice n°11 page 175 sur la fonction f définie par $f(x) = (1-x^2)^{1/2}$, qui unit les points de vue géométrique (demi-cercle supérieur) et graphique (courbe de f) autour de l'équation de la tangente à Cf en un point d'abscisse a.

d) <u>Notions non institutionnalisées et présentées dans les énoncés</u>.

La dixième colonne de notre tableau de classification indique que les notions non institutionnalisées en cours et introduites dans les exercices ou les problèmes viennent enrichir le cours de multiples façons.

Certaines prolongent naturellement l'enseignement sur la dérivation (notion d'approximation d'ordre supérieur ou égal à deux au voisinage de zéro dans un cas particulier, racine double d'un polynôme,... etc.), quand d'autres lui sont extérieures (notion de parabole asymptote à une courbe, foyer et directrice d'une parabole), et d'autres, enfin, sont externes aux Mathématiques (notion de coût marginal, de coût moyen, de coût total, de recette marginale, de bénéfice,... etc.), même si elles représentent des applications très classiques (et importantes) de la notion de dérivée.

> **34** ★ Soit un polynôme P et P' son polynôme dérivé.
>
> α est une racine double d'un polynôme P, si P se factorise par $(x-\alpha)^2$.
>
> 1° Montrer que si P admet une racine double α, alors son polynôme dérivé P' admet α pour racine.
>
> 2° Montrer que si P et P' admettent pour racine α, alors α est une racine double de P.

> **Coût marginal**
>
> On appelle « coût marginal du rang x » la différence $C(x+1) - C(x)$, c'est-à-dire l'augmentation du coût correspondant à la fabrication d'un objet supplémentaire, sachant qu'on en a fabriqué x.

E/ CLASSIFICATION PAR CADRES ET REGISTRES.

1°) Classification par cadres mis en jeu.

Le cadre algébrique est le cadre mis en jeu le plus souvent dans cet environnement (part de 70,46%), suivi du cadre graphique (13,92%), du cadre numérique (6,9%) et du cadre géométrique (4,6%). En outre, il y a dans 4,12% des situations abordées une *mixité* de cadres (algébrique + graphique ou géométrique) qui est en jeu au sein même de la question posée (à ne pas confondre avec les cas où un *changement* de cadre, ou une *interaction* entre cadres différents est à faire intervenir pour résoudre un problème donné).

Les changements de cadres qui interviennent concernent dans 57,06% des cas le couple : cadre algébrique / cadre graphique, dans 23,31% des cas le couple : cadre algébrique / cadre géométrique, dans 15,34% des cas le couple : cadre algébrique / cadre numérique, dans 2,45% des cas le couple : cadre algébrique / cadre analytique, et enfin, dans 1,84% des cas le couple : cadre graphique / cadre numérique.

Le détail des changements de cadres entrant en jeu dans les exercices et problèmes proposés est indiqué dans le tableau suivant :

Changements de Cadres	Passage dans un sens (→)	Passage dans l'autre sens (←)	Totaux :
Algébrique / Graphique	Alg → Graph 52,76%	Graph → Alg 4,3%	57,06%
Algébrique / Géométrique	Alg → Géom 9,81%	Géom → Alg 13,5%	23,31%
Algébrique / Numérique	Alg → Num 14,73%	Num → Alg 0,61%	15,34%
Algébrique / Analytique	Alg → Analyse 2,45%	Analyse → Alg 0%	2,45%
Graphique / Numérique	Graph → Num 1,84%	Num → Graph 0%	1,84%
Totaux :	-	-	100%

Il est essentiel de noter que ces changements de cadres sont à la charge de l'élève dans seulement 5,4% des cas, le texte les sollicitant dans 94,6% des cas. Par exemple, on peut lire dans un énoncé : *« En utilisant la courbe et les valeurs de la fonction tangente, en déduire les solutions de l'équation... »*. Les conditions elles-mêmes d'un changement de cadre peuvent être facilitées par la présentation d'un schéma, d'une représentation graphique, d'un tableau de valeurs,... etc. au sein de l'énoncé. C'est notamment le cas dans des problèmes de géométrie analytique et d'optimisation (ce qui s'accompagne d'une description précise de la situation et d'un pilotage au niveau du choix des variables). Il y a aussi, le cas échéant, une prise en charge des phases d'aller-retour nécessaires entre deux cadres.

En outre, il faut remarquer que les changements de cadres ne sont pas sollicités, en général, comme moyen de réduire des difficultés particulières rencontrées dans le cadre d'origine en vue de résoudre un problème donné, mais plutôt pour *traduire* simplement un résultat déjà obtenu. Par exemple, l'élève doit savoir interpréter *graphiquement* une propriété qu'il vient d'établir dans le *cadre algébrique*, en termes de position relative courbe / tangente, courbe / asymptote, de point anguleux ou de tangente verticale, etc...et ces interprétations lui sont souvent en partie (voire en totalité) suggérées : *« Justifiez la proposition suivante... »*, *« En déduire... »*,... etc.

Dans les (rares) cas où les changements de cadres ne sont pas pilotés par l'énoncé, on remarque presque à chaque fois que l'exercice *duplique* une situation déjà pilotée lors d'un exercice précédent. Par exemple, la détermination du nombre de solutions d'une équation (cadre algébrique) par la mise en jeu d'une fonction que l'on étudie (cadre de l'Analyse algébrisée) fait l'objet d'un guidage au sein d'un exercice initial, et les élèves peuvent réitérer eux-mêmes ce type de démarche dans les exercices suivants.

Dans les exercices ayant trait à la définition de la dérivabilité en un point par approximation affine, nous avons vu que le cadre « Analyse »[1] n'est sollicité qu'en apparence. En fait, tout le travail sollicité est gérable et géré dans le cadre algébrique.

Nous n'avons décelé la nécessité d'un changement de point de vue qu'au sein d'un seul exercice, portant sur la fonction $x \to (1-x^2)^{1/2}$, qui doit être perçue dans le contexte proposé comme la représentation graphique du demi-cercle supérieur de centre O et de rayon égal à 1 dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O.

2°) Classification par registres et représentations sémiotiques mis en jeu.

Notre classification s'organise selon deux axes : d'une part, l'étude des registres (et des représentations) mis en jeu du côté des énoncés, avec une observation des formes particulières introduites, et d'autre part, l'étude des registres (et des représentations) qui doivent intervenir du côté des solutions à fournir, qui peuvent parfois être sollicitées sous une forme ou sous une autre.

Comme en général plusieurs registres ou représentations sémiotiques interviennent dans l'expression d'un énoncé ou d'une solution, nous les avons classés selon plusieurs groupes en fonction de l'*importance* qu'ils prennent dans l'énoncé ou la solution. Ces groupes, sont les suivants : *« registres dominants »*, *« registres secondaires »*, *« registres minoritaires »*. Par ailleurs, nous mentionnons, les registres ou représentations sémiotiques dans lesquels peuvent s'exprimer : d'une part, un complément d'énoncé facultatif pour la résolution du problème posé, et d'autre part, une réponse annoncée dans l'énoncé.

Comme l'indique le tableau suivant, le registre de la *langue naturelle* occupe la première place en tant que registre dominant au sein des énoncés (51,3%), suivi du registre des *expressions algébriques* (39,13%). Ces dernières sont prépondérantes en tant que registre

[1] Cette définition demandant une bonne appréhension des notions de « limite » et de « propriété locale ».

secondaire (58%) devant celui de la langue naturelle (29,5%). Elles sont aussi très présentes en tant que registre minoritaire au sein d'un énoncé (76,5%).

Cela laisse peu de place à d'autres types de registres, mais il faut toutefois noter que le registre graphique est dominant dans 7,82% des énoncés, et qu'il y a une certaine variété des registres ou représentations secondaires (expression numérique : 4,2%, illustration : 4,2%, figure géométrique : 2,1%, représentation graphique : 1%, schéma :1%).

Les réponses annoncées au sein des énoncés le sont dans 57,2% des cas sous forme d'une expression algébrique et dans 40,9% des cas dans la langue naturelle. Cela confirme le fait qu'en général, les réponses sont octroyées par l'énoncé plutôt lorsqu'elles concernent des tâches algorithmiques que lorsqu'elles concernent des tâches plus qualitatives.

Nous présentons l'ensemble des données statistiques, relatives aux registres utilisés au sein des énoncés, dans le tableau suivant :

	Registres dominants	Registres secondaires	Registres minoritaires	Registres én. Facultatif	Registres rép. fournies
Langue naturelle :	**51,3%**	29,5%	-	31,25%	40,9%
Expression algébrique :	39,13%	**58%**	**76,5%**	6,25%	**57,2%**
Représent. graphique :	7,82%	1%	-	37,5%	-
Expression numérique :	1,3%	4,2%	11,75%	-	1,9%
Figure géométrique	-	2,1%	-	18,75%	-
Schéma :	0,45%	1%	11,75%	6,25%	-
Illustration :	-	4,2%	-	-	-
Tableau :	-	-	-	-	-

Du côté des solutions attendues aux problèmes posés, la balance penche nettement du côté du registre des *expressions algébriques*, avec une part de 89,3% au niveau des registres dominants, contre 6,63% pour le registre de la langue naturelle et 3,57% pour celui des expressions numériques.

Même au niveau des registres et représentations sémiotiques secondaires et minoritaires au sein des solutions attendues, le registre de la langue naturelle n'occupe pas une place centrale. En effet, les représentations graphiques et les tableaux (de variations, en général) correspondent respectivement à une part de 45,1% et de 23,5% au niveau des registres et représentations sémiotiques secondaires (contre 19,6% pour la langue naturelle). Pour ce qui est des représentations et des registres sémiotiques minoritaires, les tableaux arrivent en tête avec une part de 36,4%, contre 30,3% pour les représentations graphiques et seulement 18,2% pour la langue naturelle. Les solutions attendues impliquent donc en général un assez faible travail de rédaction[2], ce qui ne fait en réalité que confirmer l'analyse effectuée précédemment, par types de sous-tâches.

Nous présentons l'ensemble des données statistiques, relatives aux registres à utiliser pour répondre aux questions posées, dans le tableau suivant :

	Registres dominants	Registres secondaires	Registres minoritaires	Registres implicit. soll
Langue naturelle :	6,63%	19,6%	18,2%	-
Expression algébrique :	**89,3%**	2%	3%	-
Représent. graphique :	0,5%	**45,1%**	**30,3%**	Oui
Expression numérique :	3,57%	9,8%	12,1%	-
Figure géométrique	-	-	-	-
Schéma :	-	-	-	-
Illustration :	-	-	-	-
Tableau :	-	**23,5%**	**36,4%**	Variations

Quelques observations sur les formes particulières introduites ou sollicitées :

L'écriture d'une fonction sous la forme *« approximation affine au voisinage d'un point »* est toujours bien mise en évidence dans les énoncés, qu'il s'agisse d'une donnée du texte ou d'une propriété à établir. On demandera par exemple d'exprimer f(1+h) selon h pour une fonction donnée f, et de vérifier qu'il existe deux réels a, b et une fonction ε satisfaisant à : $f(1+h) = b + ah + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

L'expression d'un taux d'accroissement est très souvent fournie et les énoncés privilégient la forme $(f(x_0+h)-f(x_0))/h$ par rapport à la forme $(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$... peut-être parce qu'elle met davantage en exergue, à travers le terme en h, l'aspect « *accroissement* » entre deux points. Des expressions telles que « C(x+1)-C(x) » ou « V(x+h)-V(x) » traduisant en l'espèce une augmentation de coût ou de volume sont généralement fournies par les énoncés.

Pour les recherches d'asymptotes obliques, une transformation de la fonction sous la forme canonique : $f(x) = ax+b+\varphi(x)$ avec $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ est systématiquement suggérée par l'énoncé. L'étude de la position relative de la courbe représentative d'une fonction f et de sa tangente d'équation $y = -3x+1$ (par exemple) en un point x_0 est guidée par une question du type : *« étudier le signe de l'expression f(x)-(-3x+1) »*. On voit donc que le registre algébrique est largement utilisé en vue de faciliter le travail des étudiants, en allégeant au maximum les conversions nécessaires entre langue naturelle et expression algébrique. En outre, à l'intérieur de ce registre, ce n'est pas *n'importe quelle* forme algébrique qui est donnée, suggérer l'étude

[2] En l'absence d'un formalisme très soutenu au niveau des définitions utilisées et des théorèmes appliqués, ce travail de rédaction doit nécessairement s'exprimer à travers la langue naturelle.

du signe de l'expression f(x)-(-3x+1) étant sans doute plus « parlant » vis à vis de l'étude de la position relative entre C(f) et la droite d'équation y = -3x+1 que suggérer l'étude du signe de f(x)+3x-1, par exemple.

S'agissant de démontrer la dérivabilité de la fonction sinus en tout point et de calculer sa dérivée (à partir du résultat admis : $\lim_{x\to 0}$ (sin(x))/x = 1), l'énoncé utilise des notations en a,h et fournit une transformation algébrique *« utile »*[3] du terme : (sin(a+h)-sin(a))/h. Lors de cette démonstration, la notation en a,h (plutôt qu'en x,h) suggère bien que l'on travaille sur un nombre dérivé et non sur une fonction dérivée, et le passage final (très délicat pour les élèves) du nombre dérivé à la fonction dérivée est facilité (mais rendu aussi moins perceptible) par la conservation d'une notation en a et la forme d'expression choisie : *« En déduire que, pour tout réel a, la fonction cosinus est dérivable en a et que* ***cos'a = -sin a*** *»*.

La présence, dans les expressions algébriques fournies au sein des énoncés, de formes factorisées lorsque cela peut faciliter le travail de l'élève, ou du symbole ≈ des physiciens pour donner sens aux approximations affines ($f(x_0+h)-f(x_0) \approx hf'(x_0)$ pour h « petit ») sont à relever, comme la présentation de courbes sur papier quadrillé. On ne peut que souligner, là encore, une utilisation spécifique des registres mis en jeu[4].

Inversement, il y a dans les divers registres utilisés, des formes, des expressions que l'on rencontre peu ou pas du tout ici. Il en va ainsi dans le registre de la langue naturelle d'expressions telles que *« fonction affine tangente »* ou *« pente de la courbe en un point »*, alors que l'expression de *« coefficient directeur de la tangente »*, ici, constitue au contraire la norme. En cinématique, les notations « surmontées d'un point », pour désigner la dérivée, ou encore du type dx/dt, sont absentes de cet ouvrage.

L'équation d'une tangente est formalisée à l'aide de notations en x,a ou en x,x_0, alors que la définition de la dérivabilité en un point x_0 par approximation affine l'est à l'aide de notations en x_0,h. Cela va de pair avec le fait que le lien entre ces deux notions, qui ont chacune un domaine d'utilisation bien précis, n'est pas réellement explicité[5]. Si la même notation, en x_0,h, est utilisée dans cet ouvrage pour formaliser des taux d'accroissement, de préférence à une notation en x,x_0, sans doute est-ce en partie aussi pour *homogénéiser* le formalisme utilisé dans deux définitions distinctes de la dérivabilité en un point qui, en revanche, sont à relier entre elles dans certains exercices ou problèmes.

---

[3] Permettant de séparer les parties en a et en h avant de passer à la limite pour h.
[4] On s'attendrait par exemple à ce que le symbole « ≈ » figure exclusivement dans des expressions numériques.
[5] Nous faisons allusion au lien entre la « négligeabilité » au voisinage de x_0 du reste en $(x-x_0)\varepsilon(x)$ de la définition par approximation affine et ce qui, graphiquement, caractérise la droite appelée « tangente en x_0 à la courbe », dont l'équation est : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, à savoir « l'aplatissement » de la courbe sur cette droite en x_0.

II/ <u>ANALYSE D'EXERCICES ET DE PROBLEMES DU MANUEL DE TERMINALE S DE LA COLLECTION « DECLIC » : CONSTANTES ET SIGNES D'EVOLUTION.</u>

A/ PRESENTATION GENERALE.

1°) Rubriques soutenant la structure d'ensemble.

Si l'on compare les structures générales des manuels de première S et de terminale S, annoncées au début de chaque ouvrage, on peut constater que les auteurs ont conservé, pour l'essentiel, la progression et les rubriques mises en place dans l'ouvrage de première.

Ainsi retrouve-t-on les rubriques *« Tests préliminaires »* et *« activités préparatoires »* en amont du cours, et les rubriques *« utilisations »* (exercices corrigés avec un encart méthodologique de portée plus ou moins générale, parfois très locale), *« Travaux Pratiques »* (problèmes assez directifs visant un approfondissement sur le cours ou ses applications), *« Exercices »* et *« Problèmes »* en aval.

Cependant, on relève que les deux rubriques « Savoir-faire » et « Tests » qui étaient toujours associées dans l'ouvrage de première S, et situées juste avant la liste des exercices et des problèmes afin de permettre à l'élève une toute première familiarisation à l'application des définitions ou des énoncés les plus importants du cours, et à l'utilisation de techniques très ciblées, ont été remplacées par une rubrique unique *« Evaluation »*. Il s'agit là d'une évolution remarquable, puisque rien ne se substitue donc plus, qualitativement, dans l'ouvrage de terminale S, à la rubrique « Savoir-faire » du manuel de première S, qui constituait en quelque sorte une fiche mémo, un mode d'emploi prêt à l'usage pour les « tests » justement conçus en fonction de cette mise à l'épreuve. La rubrique « Evaluation » est constituée, quant à elle, de tests en vrai/faux sur le contenu du cours, et de Q.C.M nettement plus délicats, souvent tirés de sujets de concours « niveau Bac » (concours Esiee, Eni...), qui ne peuvent, eux, en aucun cas, s'apparenter à des applications directes du cours.

Assortie aux *« Tests préliminaires »*, une courte approche historique est proposée dans l'ouvrage de terminale, ce qui n'est pas le cas dans celui de première.

On trouve <u>en annexe</u> de chaque ouvrage un additif à l'ensemble des chapitres, intitulé *« Techniques de base »*, et divisé en plusieurs sections. Ces sections sont constituées de quelques pages rappelant certaines notions, en liaison avec de petits exposés d'ordre méthodologique, et d'une liste d'exercices portant à chaque fois sur des connaissances et des savoir-faire relatifs au programme de l'année précédente. Les exercices sont corrigés en fin d'ouvrage. Or il se trouve que cet additif semble occuper une position plus « critique » dans l'ouvrage de terminale que dans celui de première. En effet, si l'on se fie aux auteurs des deux manuels, les « Techniques de base » de l'ouvrage de première S ont simplement pour fonction *« de rappeler les acquis de la classe de seconde »*, *« de répondre à un besoin précis et ponctuel »*, *de servir « d'auto-contrôle »*. A l'inverse, il est annoncé au début de l'ouvrage de terminale S que les « Techniques de base » proposées doivent être considérées comme le *« support d'un indispensable travail de remédiation autonome »*, et les exercices proposés sont d'ailleurs jalonnés de nombreux encadrés mettant l'accent sur des savoirs ou des savoir-faire particuliers, mise en relief que l'on ne retrouve pas dans l'ouvrage de première S.

L'observation des programmes permet de noter que bon nombre de chapitres d'Analyse (et les plus fondamentaux, concernant limites, dérivabilité, études de fonctions et suites numériques) sont déjà abordés en première et repris en terminale. Ce fait, conjugué à la présence de l'objectif « Baccalauréat », fait de la Terminale une classe où reprendre et consolider les acquis de l'année précédente occupe une part importante du travail, sans doute autant que d'apprendre de nouvelles notions (qu'il faut de toutes façons resituer par rapport aux anciennes). Dans ce contexte, le caractère plus « crucial » pris par l'additif « Techniques de base » dans l'ouvrages de terminale, et signalé par les auteurs, n'est guère étonnant.

2°) Zones d'intervention de la dérivée dans le manuel.

En dehors du chapitre 6, intitulé « Calcul différentiel », la dérivée est présente à de multiples endroits dans ce manuel :

- Avant, dans le chapitre 5 sur « Limites et continuité », au sein duquel est présenté (avec démonstration) le fameux théorème : *« Une fonction dérivable en un point a (resp. sur un intervalle I) est nécessairement continue en a (resp. sur I) »*

- Après, dans les chapitres 7 (« Fonction logarithme ») et 8 (« Fonctions exponentielle et puissance ») où elle est remise en perspective, à la fois en tant qu'objet (calculs de dérivées « pour elles-mêmes ») et (surtout) en tant qu'outil dans le contexte de ces nouvelles fonctions.

- Puis dans le dernier chapitre d'Analyse du manuel (11) : « Equations différentielles », et plus accessoirement dans les chapitres sur les suites numériques (voir la méthode du point fixe utilisant les inégalités des accroissements finis) et sur le calcul intégral (intégrations par parties, études de certaines fonctions avant un calcul d'aire...), où elle semble alors définitivement intégrée comme notion familière.

- Enfin, au terme de l'ouvrage, on la rencontre dans l'annexe « Techniques de base » en tant que notion déjà abordée en première. Elle figure dans la section « Fonctions et sens de variation » où elle est resituée (et relativisée) comme l'un des outils possibles (parmi d'autres, également présentés) pour étudier les variations d'une fonction, effectuer une majoration ou une minoration,... etc.

Ainsi, si la dérivée n'occupe véritablement la vedette que dans le chapitre 6, elle se trouve disséminée et prend alors souvent une place assez importante (surtout au niveau des exercices) dans bien des chapitres d'Analyse. Si l'on compare cette occupation de « l'espace » du manuel de terminale par la notion de dérivée avec ce qu'elle était dans le manuel de première, on peut donc affirmer que l'on est passé d'une structure plutôt *« compacte »* (la dérivée, objet nouveau, est centrée sur deux chapitres de fin de manuel en classe de première), à une structure plus *« étale »* (la dérivée, objet plus familier, est remise en jeu dans de nouveaux contextes en terminale).

3°) La notion de dérivée dans les divers chapitres : une organisation spécifique.

a) Structure du chapitre principal.

Le chapitre intitulé « Calcul différentiel » comporte certaines particularités dans sa structure. Le cours associe des rappels de première S (définition de la dérivabilité en un point, équation de la tangente en un point, notion de fonction dérivée et dérivées usuelles,... etc.) et la présentation des notions nouvelles relatives à la dérivation qui sont au programme de terminale : dérivée d'une composée, dérivées successives, inégalités des accroissements finis. Dans l'ensemble, les rappels de première font l'objet d'exercices au même titre que les notions nouvelles. Relevons cependant que la formule de l'approximation affine, qui est présente dans l'un des tests préliminaires précédant ce cours, et rappelée au sein du cours lui-même, est totalement absente des exercices et problèmes qui suivent, sauf dans l'exercice de la rubrique « Démonstrations de cours » où l'on fait établir la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions.

Autre particularité, la notion de primitive d'une fonction est déjà introduite dans ce chapitre et fait l'objet de nombreux exercices, au lieu d'être reportée au chapitre d'intégration. Sans doute faut-il y voir une volonté de « déblayer » bien avant ce chapitre les problèmes relatifs à la familiarisation à l'objet « primitive » et aux mécanismes de pensée afférents : s'habituer à lire et à utiliser les tableaux de dérivées usuelles « en sens inverse », être capable de justifier l'existence d'une primitive en invoquant la continuité de la fonction, avoir assimilé le problème de la non unicité d'une primitive, être rôdé à la recherche d'une primitive particulière,... etc.

La liste des exercices et des problèmes est jalonnée, comme elle l'était dans le manuel de première, de titres et de sous-titres indicatifs de leur contenu. On retrouve en début de liste les « Démonstrations de cours » (1), comme dans le manuel de première, puis les rubriques « Dérivation » (2), « Accroissements finis » (3), « Primitives » (4), pour ce qui est des titres de la liste d'exercices, et « Etudes de fonctions » (1), « Problèmes d'optimisation » (2) comme titres internes à la liste de problèmes. A l'intérieur de la rubrique « Dérivation » (2), on trouve six sous-titres : « Dérivabilité », « Fonctions dérivées et dérivées successives », « Applications de la dérivation », « Vitesse et accélération », « Fonctions rationnelles et irrationnelles », « Fonctions trigonométriques ».

Concernant les exercices portant sur des rappels de première, correspondant ici au titre « Dérivation » (2), on constate que leur répartition, livrée par les sous-titres précédents, a quelque peu changé par rapport à ce qu'elle était dans le manuel de première. Il y a certes toujours un travail spécifique sur les fonctions de première S (rationnelles, irrationnelles, trigonométriques), caractérisé par la présence de deux « sous-rubriques » correspondantes, et attestant de cette approche transversale, donc du caractère encore « multiforme » de la structure du répertoire des exercices et problèmes proposés. Les thèmes « Dérivabilité », « Fonctions dérivées », « Vitesses instantanées »(à laquelle se joint la notion d'accélération instantanée) conservent un sous-titre dans la liste d'exercices, ce qui implique nécessairement une place importante dans cet environnement. En revanche, les thèmes « Tangentes à une courbe », « Variations d'une fonction », « Extremum d'une fonction », « Bijections et équations », qui faisaient l'objet dans le manuel de première de titres et de sous-titres à l'intérieur de la liste d'exercices et de problèmes (parfois les deux, comme le thème « Tangentes ») ne donnent même plus lieu ici à des sous-titres.

Est-ce à dire que l'aspect « objet » va être beaucoup plus approfondi dans le travail effectué sur les notions anciennes que l'aspect « outil » ? Une telle supposition serait bien hâtive avant une analyse plus précise effectuée à l'aide de nos grilles de classification. En fait, il apparaît plutôt que les équations de tangentes, l'étude des variations et les extrema, même s'ils ne font plus guère l'objet d'exercices spécifiques (regroupement de ceux-ci sous la rubrique « Applications de la dérivation »), sont surtout amenés désormais à « rebondir » dans des problèmes plus généraux d'études de fonctions et d'optimisation.

Le thème « Bijections et équations » est, quant à lui, retravaillé à l'aide d'exercices spécifiques dans le chapitre précédent, « Continuités et limites », pour des raisons qui vont être élucidées dans ce qui suit.

b) <u>La dérivée dans le chapitre : « Continuité et limites »</u>.

Ce chapitre se situe avant celui de « Calcul différentiel » parce que la notion de limite permet « d'outiller » celle de dérivée. Cette disposition des chapitres est donc rationnelle, même si la notion de limite a déjà été introduite en première, ce qui aurait permis une inversion des chapitres. La possibilité de revoir certains résultats sur les limites et de retravailler des techniques de calcul avant d'aborder la dérivée abonde sans nul doute en faveur du choix effectué. A partir de là, la notion de continuité étant solidaire de celle de limite, elle se situe tout naturellement avant celle de dérivée dans l'ordre des chapitres.

Le choix effectué de situer le théorème faisant le lien entre « continuité » et « dérivabilité » à l'intérieur du chapitre *« Continuité et limites »*, plutôt que dans le chapitre de calcul différentiel, tient quant à lui au fait que ce théorème permet d'identifier immédiatement des classes de fonctions continues parmi les fonctions usuelles. C'est là sa fonction nécessaire, puisque la définition théorique de la continuité en un point n'est pas au programme de terminale ; ce théorème sert donc de « court-circuit », permettant ainsi d'assurer la continuité de nombreuses fonctions, là où l'on ne peut effectuer de démonstration autonome. Il aide également, ce faisant, à une certaine stabilisation du concept de continuité qui risque de rester assez « flou » dans l'esprit des élèves, faute justement d'un ancrage théorique suffisant.

Il peut nous sembler a priori « naturel » que figurent dans ce même chapitre *« Continuité et limites »* les résultats relatifs à l'existence et à l'unicité d'une solution à l'équation : $f(x) = 0$, (ou plus généralement, $f(x) = m$) sur un intervalle I, pour f continue et strictement monotone sur I, et au caractère bijectif de l'application f de I sur f(I). Mais souvenons-nous ici que des résultats similaires ont déjà été introduits dans le manuel de première S, pour une fonction f dérivable et strictement monotone sur un intervalle fermé borné [a,b]. En dehors du fait qu'aucun de ces résultats n'est, ou ne peut être, établi, ni en première, ni en terminale, il est important de souligner tout de même que le cours présenté dans ce manuel de terminale ne cherche pas spécialement à attirer ici l'attention de l'élève sur les généralisations effectuées (passage d'une hypothèse de dérivabilité à une hypothèse de continuité, d'un intervalle du type [a,b] à un intervalle I quelconque). Il n'y a pas présence, notamment, de remise en perspective a posteriori des énoncés de première S, utilisant justement le fait, qui vient d'être établi, que toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I . En revanche, on trouve une description détaillée de l'intervalle f(I) selon la nature de l'intervalle I, et selon qu'il y a stricte croissance ou stricte décroissance de f.

Ainsi peut-on dire que le cours du manuel de terminale, à la fois pour des raisons d'économie (il se doit d'être succinct), et d'écologie (la discussion du caractère nécessaire ou suffisant de certaines conditions n'étant pas dans l'esprit du programme), dévoile les spécificités amenées par la généralisation effectuée et glisse subrepticement sur cette généralisation elle-même, et ses circonstances.

Si les exercices proposés, concernant les thèmes : « Equation du type f(x)=m » et « Bijections », figurent dans ce chapitre « Limites et continuité » au lieu de se trouver sous la rubrique « Applications de la dérivation » de la liste d'exercices du chapitre de calcul différentiel, la raison profonde (c'est la notion de continuité qui est au cœur de ces énoncés) n'en est pas éclaircie pour autant. La généralisation effectuée, non problématique, n'est d'ailleurs pas susceptible de modifier fondamentalement la nature des exercices proposés, et (surtout) le travail technique de l'élève. Elle nécessite seulement une petite adaptation (passage d'un segment à un intervalle éventuellement ouvert et/ou non borné). Quant à la justification de la continuité des fonctions considérées par leur dérivabilité, elle risque de passer quelque peu inaperçue pour les raisons évoquées ci-dessus. Egalement parce que l'hypothèse de stricte monotonie à vérifier pour la fonction f fait immanquablement rentrer l'élève dans l'étude des variations de f, via le calcul de la dérivée, cycle désormais plus routinier pour lui depuis la classe de première, et qui procède d'une toute autre logique. On se situe là dans une optique essentiellement algorithmique, où le fait d'avoir aussi à fournir un argument (f dérivable donc continue) semble surtout procéder d'un effet de contrat, vu l'absence dans le cours d'une mise à jour véritable et explicite des énoncés de première S. Notons cependant que le manuel présente un exercice corrigé sur ce thème, dans lequel l'hypothèse de continuité du théorème utilisé est bien évoquée, et justifiée par la dérivabilité de la fonction considérée.

c) La dérivée dans les chapitres 7 et 8 (nouvelles fonctions).

La notion de dérivée est donc présente dans les chapitres 7 et 8 relatifs aux nouvelles fonctions (logarithme, exponentielle et puissances), avec des modes de répartition différents, dans les exercices et problèmes proposés, selon le thème concerné.

Ainsi trouve-t-on dans la liste d'exercices de chacun de ces deux chapitres, trois rubriques correspondant à un travail technique spécifique sur ces nouvelles fonctions, les rubriques *« Continuité et dérivabilité en un réel donné »*, *« Fonctions dérivées »*, et *« Recherche de primitives »*. Les deux dernières rubriques étaient déjà présentes dans le chapitre 6 de dérivation, et correspondent pour l'essentiel au calcul répétitif et isolé de fonctions dérivées et de primitives, voire à l'identification graphique ou au calcul de nombres dérivés. La rubrique « Continuité et dérivabilité en un réel donné » correspond, elle, à une spécification assez ciblée d'exercices, qui ne figurait pas encore dans les rubriques d'exercices présentées dans le chapitre de dérivation (où le thème qui était annoncé, « Dérivabilité », englobait une diversité d'exercices plus grande). Il s'agit ici d'étudier plus précisément encore la continuité et la dérivabilité d'une fonction définie par deux expressions au point de jonction de ces expressions.

On rencontre également deux rubriques : *« Utilisation de la fonction logarithme décimal »*, et *« Fonctions exponentielles dans d'autres domaines »* constituant en quelque sorte le pendant des rubriques « Vitesse et accélération » et « Problèmes concrets » du chapitre 6.

Les autres thèmes relatifs à la dérivation, en particulier ceux figurant en sous-titres des listes d'exercices du manuel de première S (tangentes, variations, extrema, bijections, équations), et le thème *« Accroissements finis »* du chapitre 6 de ce manuel de terminale ne font l'objet d'aucune rubrique particulière ici, mais sont repris dans les exercices et problèmes généraux d'études de fonctions (voir plus loin l'analyse des grilles). Cette absence s'explique aisément par le fait qu'il n'y a pas de spécificités techniques dans l'application aux fonctions logarithme et exponentielle des divers théorèmes liés à ces thèmes.

En dépit du fait que l'objet des exercices de ces chapitres 7 et 8 est précisément de resituer toutes les connaissances liées à la dérivation dans le cadre des nouvelles fonctions, on notera la présence d'une rubrique *« Fonctions puissances et exponentielles de base a »* dans la liste d'exercices du chapitre 8. Elle permet ainsi de bien identifier ces fonctions, en marge de la fonction exponentielle de base e qui « accapare » la plupart des exercices. Indépendamment de cela, on rencontre aussi de telles fonctions dans les rubriques destinées à un entraînement technique spécifique : *« Fonctions dérivées »* et *« Recherche de primitives »*.

On constate donc, comme dans le chapitre de calcul différentiel de cet ouvrage ou les chapitres de dérivation du manuel de première, que la répartition des exercices en rubriques et « sous-rubriques », est multiforme, réalisée à la fois par thèmes liés au concept (purement mathématiques ou extra-mathématiques : problèmes d'optimisation) et transversale (selon les types de fonctions mises en jeu).

d) <u>La dérivée dans les autres chapitres</u>.

Elle y est intégrée comme notion ancienne, avec laquelle on travaille désormais (de façon plus ou moins sporadique), mais ne fournit plus *en elle-même* l'objet des exercices et problèmes.

Savoir calculer des dérivées intervient de façon interne, côté « <u>objet</u> », dans les exercices et problèmes du chapitre *« Equations différentielles »*, où l'on demande de vérifier (ou de trouver, à partir d'une forme générale donnée) une solution particulière (notamment). Les notions relatives à la dérivation interviennent aussi, côté « <u>outil</u> », dans ceux du chapitre *« Calcul intégral »* où il faut faire une intégration par parties, et ceux du chapitre *« Suites numériques »* où l'étude d'une fonction précède celle de la suite récurrente associée, via un encadrement de la dérivée et les inégalités des accroissements finis appliquées au point fixe.

La dérivée est encore utilisée indirectement dans tout calcul d'intégrale via la détermination d'une primitive. Mais la dérivée est aussi en jeu, de façon externe par rapport aux notions nouvelles, dans les études de fonctions des chapitres « Equations différentielles » et « Calcul intégral » (voir les problèmes se terminant par un calcul d'aire relatif à la fonction étudiée).

B/ CLASSIFICATION PAR TYPES DE SOUS-TACHES.

1°) Introduction. Evolution de la gamme d'exercices et de problèmes.

Nous avons recensé ici 271 exercices (auxquels s'ajoutent 10 exercices portant sur des démonstrations de cours et 52 questions en vrai / faux), pour seulement 57 problèmes et 14 travaux pratiques, sur lesquels nous fondons l'analyse qui suit, selon les divers types de sous-tâches. On constate donc une évolution sensible, au sein du manuel de terminale, du poids respectif des exercices et des problèmes où des notions liées à la dérivation interviennent : il y a maintenant environ un problème pour cinq exercices, alors qu'on trouve à peine plus de deux exercices pour un problème dans l'ouvrage de première.

Sans doute cette évolution est-elle à rapprocher du fait que les exercices du manuel de terminale sont de nature et de longueur plus variable que ceux du manuel de première. On trouve à présent bon nombre d'exercices assez complets, presque des petits problèmes, faisant suite à des exercices plus élémentaires, d'entraînement, et notamment dans les chapitres portant sur le calcul différentiel, les fonctions logarithmes, les fonctions exponentielles, où de nombreuses études de fonctions sont proposées. Les problèmes posés dans l'ouvrage de terminale se présentent ainsi en grande majorité comme des problèmes de synthèse, alors qu'ils servaient d'abord, dans le manuel de première, à étudier des thèmes plus ou moins délaissés dans les exercices (problèmes concrets d'approximation ou d'optimisation, approches de la notion de vitesse instantanée, problèmes de géométrie analytique, etc...). Cette évolution est caractéristique du passage d'un niveau de classe où s'organise le premier contact avec la dérivée, à un autre où l'étudiant est déjà en partie familiarisé au concept considéré au moment où démarre l'enseignement.

Le taux de répétitivité des exercices (voir méthodologie), qui était de 0,52 dans le manuel de première, est à présent de 0,48 dans le manuel de terminale, tandis que le taux de répétitivité des problèmes évolue plus nettement de 0,38 à 0,18.

Ainsi retrouve-t-on en terminale, et presque autant qu'en première, les mêmes suites d'exercices tous centrés sur une technique isolée, visant à rendre routinières certaines tâches standards (calculs « à la chaîne » de fonctions dérivées, de primitives, dans le chapitre de calcul différentiel, puis ensuite dans ceux concernant les fonctions logarithmes et exponentielles, intégrations directes ou par parties, dans le chapitre de calcul intégral, résolutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, d'ordre un, d'ordre deux, sans ou avec conditions initiales,... etc.). Sans doute la très légère baisse du taux de répétitivité des exercices dans le manuel de terminale est-elle à imputer à la disparition (signalée plus haut, dans la présentation générale de cet ouvrage) de la rubrique « Tests », qui permettait aux élèves de première de mettre à l'épreuve certains automatismes décrits juste avant, sous une rubrique à caractère méthodologique intitulée « Savoir-faire » du manuel de première.

Les inégalités des accroissements finis (notion nouvelle du programme de terminale) font l'objet d'exercices répétitifs dans deux chapitres distincts : celui de calcul différentiel, mais aussi celui sur les suites récurrentes (études par la méthode implicite du point fixe, avec le même canevas de questions). Cependant, on relève que les exercices portant sur les accroissements finis au sein du chapitre de calcul différentiel se distinguent tous très légèrement les uns des autres, du fait d'une petite variation dans les données, susceptible de modifier quelque peu la tâche d'un exercice à l'autre. Cela semble nous indiquer que l'entraînement technique dans le but de rendre routinières certaines tâches pour l'élève est sans doute en train d'évoluer. Il ne passe plus forcément, au stade désormais atteint de l'apprentissage du concept de dérivée, par la répétition pure et simple de certaines tâches, et une dose de variabilité dans l'énoncé peut parfois être introduite dès le premier contact avec un objet nouveau.

2°) Répartition générale.

On répertorie dans l'environnement de la dérivée, au sein de sept chapitres d'analyse différents du manuel « Déclic », 2178 sous-tâches de calcul (explicites ou implicites) pour 363 sous-tâches graphiques, 1007 applications de théorèmes, 359 utilisations de définitions et 180 sous-tâches minoritaires non graphiques. Ces résultats demeurent dans l'ensemble assez proches, au niveau des proportions respectives par types de sous-tâches, de ceux obtenus pour le manuel de première S, même si on peut repérer quelques évolutions sensibles :

sous-tâches graphiques	8,88%
sous-tâches de calcul :	53,29%
Applications de théorèmes/propriétés :	24,64%
Utilisations de définitions :	8,79%
Sous-tâches minoritaires non graphiques :	4,40%

Total : 100%

Ainsi, la part des sous-tâches de nature graphique (11,21% en première) diminue-t-elle assez nettement (baisse de l'ordre de 2,3%), ce qui n'est pas vraiment très étonnant, puisque ce type de tâches est largement introduit dans le manuel de première pour l'installation d'un premier rapport à la dérivée (voir notamment les exercices de débuts de listes où il s'agit de lire les valeurs de nombres dérivés, les variations d'une fonction, la présence d'extrema… sur une représentation graphique fournie par le texte). Ce que l'on peut juste signaler ici, c'est une certaine carence de tâches graphiques susceptibles de prendre le relais, donc moins élémentaires, correspondant à un degré de familiarisation plus élevé avec les notions liées à la dérivée. Ajoutons que certaines sous-tâches graphiques recensées ici, comme dans le manuel de première, demeurent dans un voisinage assez lointain de la dérivée (exemples : tracés de courbes, calculs d'aires à réaliser à partir d'une représentation graphique donnée, et interprétations graphiques de certaines quantités en termes d'aires).

La part prise par l'application de théorèmes ou de propriétés subit aussi une diminution, de l'ordre de 4,2%, mais comparativement moins forte puisque l'on passe de 28,81% à 24,64%. Les « sous-tâches minoritaires non graphiques » sont en légère baisse, elles aussi. En contrepartie, ce sont donc les sous-tâches de calcul et proportionnellement surtout l'utilisation de définitions qui enregistrent une hausse (respectivement, de l'ordre de 3,5% et 4%).

L'augmentation de la part prise par les définitions s'explique en partie par un certain développement des questions portant sur l'étude de la dérivabilité d'une fonction en un point (ou à gauche, à droite), là où il y avait surtout en première des calculs de nombres dérivés à l'aide des formules générales sur les fonctions dérivées. Mais elle s'explique surtout, très largement, par l'introduction des concepts de primitive (au sein du chapitre de calcul différentiel) et d'intégrale (qui se définit à partir de la notion de primitive. Ces deux notions fournissent en effet à peu près les seules définitions nouvelles du programme de terminale dans l'environnement de la dérivée, avec celle de dérivées successives, mais cette dernière est assez peu sollicitée dans les exercices, comme on le verra plus loin.

Plus inattendue, peut-être, est la hausse de la proportion de sous-tâches de calcul, qui étaient déjà très représentées dans le manuel de première (49,76%), et qui dépassent ici le seuil symbolique des 50%. On aurait pu penser que ces sous-tâches de nature calculatoire seraient, en proportion, plus fréquentes au début de l'apprentissage de la notion de dérivée, mais il n'en est rien. S'il n'est guère étonnant que le taux de telles tâches soit élevé dans les chapitres spécifiques du programme de terminale (équations différentielles, calcul intégral...), où il est nécessaire « d'initialiser » certaines techniques de calcul, force est de constater aussi qu'il n'y a pas de réelle évolution, bien au contraire, des sous-tâches de calcul vers des sous-tâches de raisonnement, interrogeant davantage les concepts, dans le chapitre de calcul différentiel qui constitue pourtant en partie une reprise des notions de première.

3°) Analyse des sous-tâches graphiques.

a) Tracés dans l'environnement de la dérivée.

Les questions relatives à une sous-tâche standard du type « tracé de la courbe représentative d'une fonction » (28,1%), « tracé de la tangente en un point de cette courbe » (10,7%), et « autres tracés de droites » (12,7%), représentent globalement un peu plus de la moitié des sous-tâches graphiques proposées (51,5%), c'est-à-dire un peu plus qu'au sein du manuel de première (49%).

Cette situation est à mettre en parallèle avec la systématisation des études globales de fonctions, l'apprentissage des nouvelles fonctions (logarithme, exponentielle et puissances) contribuant largement à cet état de fait. Cependant, la part des tracés de courbes n'a que très légèrement augmenté au sein de cette répartition (elle était de 27% en première), sans doute pas autant que l'on aurait pu l'imaginer, ce type de tracé étant déjà très sollicité dans le manuel de première S. Les tracés de tangentes voient leur part diminuer (15% en première), ce qui peut s'expliquer par le fait que l'équation de la tangente en un point, si elle fait l'objet d'une reprise en terminale (et reste sollicitée, plus sporadiquement ensuite, dans certaines études de fonction), est initialement étudiée et constitue vraiment un enjeu central du cours de dérivation, en classe de première. C'est donc la progression des « autres tracés de droites » (et particulièrement des asymptotes) qui est la plus nette (12,7% au total, au lieu de 7%). En effet, l'étude de droites asymptotes acquiert d'autant plus d'importance que l'on effectue davantage d'études de fonctions, et que l'on étend ces études à des types nouveaux de fonctions. S'il y a bien dans le manuel de première un travail spécifique concernant la recherche d'asymptotes obliques pour des fonctions rationnelles (avec mise sous forme canonique préalable de ces fonctions), hors de cette recherche, le travail sur les autres fonctions étudiées (polynômes, irrationnelles ou trigonométriques élémentaires) n'aboutit presque jamais à une recherche de droite asymptote.

b) Interprétation de représentations graphiques.

Les tâches à réaliser à partir d'une représentation graphique fournie par l'énoncé (lectures graphiques, associations de courbes, justifications de tracés, traductions analytiques, etc...), qui occupent 36% des sous-tâches graphiques du manuel de première, n'ont plus qu'une part de 19,3% dans le manuel de terminale. Cependant, il y a en outre des tâches du même type, non rencontrées dans le manuel de première et qui se développent ici à hauteur de 4,4%, pour lesquelles c'est l'élève qui doit lui-même réaliser d'abord la représentation graphique en question (exemple : calculer l'aire d'un domaine défini par la courbe représentative d'une fonction donnée et certaines droites, ce domaine étant décrit par une phrase dans l'énoncé).

L'ensemble de ces interprétations de courbes, en nette diminution, a aussi évolué sur un plan qualitatif, certaines d'entre elles disparaissant même totalement. Ainsi, la lecture d'équations de tangentes ou de la présence d'un extremum, activités caractéristiques de l'installation d'un rapport initial à la dérivée, ne sont plus présentes dans le manuel de terminale. De la même façon, la lecture pour « elle-même » de coefficients directeurs de tangentes, de nombres dérivés en un point où la dérivabilité est affirmée par le texte se trouve être à présent très rare. Le plus souvent, ce type de tâche est inclus dans une tâche plus vaste : retrouver les coefficients d'une fonction paramétrée sur laquelle le graphique fournit des informations ou identifier des solutions particulières d'équations différentielles, par exemple. Ou bien il s'agit plutôt de percevoir des nombres dérivés (le plus souvent distincts), à gauche et à droite au point considéré, le caractère dérivable ou non de la fonction en ce point (activité déjà présente en première, mais alors très marginale). Le support lui-même évolue, en même temps que les tâches se complexifient. A partir d'une courbe tracée par la calculatrice graphique, l'élève est censé se prononcer sur la dérivabilité en un certain point, puis vérifier par le calcul son appréciation.

Signe d'évolution de ces exercices, on demande aussi à l'élève d'être capable, à présent, de lire sur la courbe représentative de la dérivée des informations sur la fonction d'origine. Cet exercice d'un type nouveau oblige l'élève à faire preuve d'une certaine réflexion, bien au-delà des automatismes travaillés en classe de première, et même d'une certaine manière en conflit avec eux. En effet, ce qui est d'abord perceptible sur le tracé d'une courbe, c'est la forme générale qui traduit les variations de la fonction associée. Or l'élève doit ici faire abstraction de ces variations pour repérer sur la courbe de la dérivée, tout au contraire, des particularités plus locales : points d'intersection avec l'axe horizontal (et changement de signe de la dérivée, ou non), valeurs particulières de cette dérivée,... etc. Si l'exercice est posé sous forme de Q.C.M (c'est le cas ici), on peut alors présenter à l'élève des propositions qui seraient vraies de façon évidente s'il était question de la courbe représentative de la fonction d'origine (déduites d'une observation un peu « globale » de la courbe), et qui ne le sont pas s'agissant de celle de sa dérivée. Il y a aussi une difficulté pour l'élève à prévoir dans ce type d'exercice les conséquences d'un théorème lié à la condition de stricte monotonie pour une fonction dont il ne « voit » pas la courbe, mais dont il peut connaître les variations via la courbe de la dérivée (ici, prévoir que f s'annulera au plus une fois en constatant que f ' est à valeurs strictement positives). Enfin, autre exemple de tâche complexe, dans l'un des items du même Q.C.M, on demande à l'élève de se prononcer sur la validité d'une proposition (un encadrement de la fonction), qui nécessite conjointement une lecture de la courbe de la dérivée (voir que cette dérivée est bornée) et l'utilisation d'une inégalité des accroissements finis.

Les autres tâches à effectuer à partir d'une représentation graphique sont très marginales et essentiellement situées dans l'additif « Techniques de base » à l'ouvrage, donc en dehors des chapitres courants, et correspondant à des rappels de première S. Elles restent d'ailleurs en marge des questions de dérivation, et sont ciblées sur l'étude des variations d'une fonction, indépendamment de la considération de sa dérivée. Ainsi, n'y a-t-il qu'un exercice du type « Association de données », présent dans cet additif, où l'on demande à l'élève, en l'occurrence, d'associer un tableau de variations avec l'une des trois courbes proposées. Dans un autre exercice de cette même annexe, l'élève doit découvrir l'expression de fonctions à partir de leur représentation graphique, sachant qu'elles se déduisent d'une fonction de référence, type hyperbolique, parabolique ou racine carrée, par composition avec une translation et/ou une homothétie. Enfin, un troisième exercice propose à l'élève, à partir des représentations graphiques de deux fonctions f et g, de déterminer les variations des fonctions (-f), 2g, (f+g), 1/f,… etc.

c) Résolutions graphiques. Interprétations graphiques de résultats.

La part de ces tâches, correspondant au passage inverse, d'une expression algébrique, d'une équation, du résultat d'un calcul à son interprétation graphique, qui était de 15% dans le manuel de première, est à présent de 24,8%. Cependant, il n'y a que 5,7% de tâches de ce type portant sur la dérivée, contre 3% dans le manuel de première. Il s'agit alors presque toujours de l'interprétation graphique de nombres dérivés à gauche ou à droite ou de celle d'inégalités dues aux accroissements finis.

En fait, ce type de tâches s'enrichit surtout d'interprétations concernant la position relative entre deux courbes, ou une courbe et une droite (asymptote, par exemple), à partir de l'étude du signe d'une différence f-g ou de sa limite à l'infini (10,4%). Il y a également une certaine part qui est laissée à la résolution graphique d'équations paramétrées ou non, notamment celles du type : f(x)=m ou f(x)=x+m, m étant donné ou inconnu (3,2%).

Le reste (5,5%) se répartit en interprétations graphiques diverses : solutions d'équation correspondant à des points d'intersection avec l'axe horizontal, familles de courbes passant par un même point, équations correspondant à la réunion de deux courbes symétriques par rapport à un axe, interprétation (parfois aidée par un tracé fourni par le texte) de certaines quantités en termes d'aires (définies par une courbe, des rectangles, …).

Tableau récapitulatif des résultats :

Tracés de courbes : Tracé de droites tangentes : Autres tracés de droites :	28,1% 10,7% 12,7%	 (total : 51,5%)
Interprétations de graphiques .donnés : .à trouver soi-même :	 19,3% 4,4%	 (total : 23,7%)
Interprétations graphiques de résultats / problèmes .à propos de la dérivée : .résolutions d'équations : .positions relatives : .autres :	 5,7% 3,2% 10,4% 5,5%	 (total : 24,8%)

Total : 100%

4°) Analyse des sous-tâches de calcul.

La première évolution, très nette, que l'on peut constater par rapport au manuel de première, concerne la part prise par les calculs liés à la dérivée, par rapport à d'autres calculs, à l'intérieur de cette rubrique des « Sous-tâches de calcul » de notre tableau d'analyse. Cette part, qui n'était que de 42,95% dans le manuel de première S, passe à 66,67% dans celui de terminale S, soit une augmentation de plus de 20% !

Les raisons de cette augmentation sont diverses, mais on peut recenser trois causes principales :

a) La multiplication d'études de fonctions, se limitant dans bon nombre de cas à la détermination du tableau de variations, dans les exercices et problèmes proposés de trois chapitres (calcul différentiel, fonction logarithme népérien, fonctions exponentielles et puissances). A cela s'ajoute une présence plus disparate dans d'autres chapitres tels que *« Limites et continuité »* (bien que ce chapitre se situe avant celui de calcul différentiel), ou *« Calcul intégral »*, voire même *« Suites numériques »* du fait de l'étude de suites récurrentes.

b) L'introduction du calcul explicite ou implicite de nombreuses primitives, aussi bien dans le chapitre de calcul différentiel que dans celui de calcul intégral.

c) La présence du chapitre *« Equations différentielles »*, qui fournit très naturellement un terrain d'application assez vaste à la notion de dérivée (résolution d'équations différentielles, vérification de l'appartenance de fonctions données à l'ensemble des solutions d'une certaine équation différentielle, détermination de l'équation différentielle satisfaite par une fonction donnée…).

Voici la répartition détaillée de ces sous-tâches de calcul liées à la dérivation :

.Calcul de nombres dérivés .Equations et coefficients directeurs de tangentes : .Etudes de la dérivabilité :	1,15% 2,20% 2,11%	 Total : 5,46%
.Calculs de fonctions dérivées : .Calculs de dérivées successives :	20,39% 1,47%	 Total : 21,86%
.Etudes des variations :		Total : 10,24%
Majorations, encadrements .Par accroissements finis : .Par l'étude des variations :	 1,52% 0,92%	 Total : 2,44%
.Calculs de primitives : .Calculs d'intégrales : .Aires et volumes : .Intégrations par parties :	13,13% 5,19% 1,74% 2,16%	 Total : 22,22%
.Résolution d'équations différentielles : .Vérification d'équations différentielles :	2,98% 1,47%	 Total : 4,45%
		Total : 66,67%

On constate tout d'abord que certaines sous-tâches, que l'on aurait pu imaginer en très net développement par rapport à la place qu'elles prenaient en première, n'ont guère évolué en proportion, voire même occupent une part plus faible des sous-tâches de calcul que dans le manuel de première. Ainsi, le calcul de dérivées, qui constituait 23,56% de ces sous-tâches en première, apporte à présent une part de 21,86% (9,47% concernant les nouvelles fonctions), et l'étude des variations passe de 9,18% en première à 10,24% en terminale (5,4% concernant les nouvelles fonctions). Cependant, si ces sous-tâches sont quelque peu en stagnation du point de vue des proportions concernées, il est essentiel de noter qu'elles ont, en revanche, nettement augmenté du point de vue de leur nombre, dans le manuel de terminale, puisque l'étude effectuée ici, qui porte sur sept chapitres différents (contre deux en première), concerne 2178 sous-tâches de calcul contre seulement 1057 en première.

La proportion de déterminations de dérivées successives, qui, elles, constituent une des rares nouveautés du chapitre de calcul différentiel, en terminale, par rapport au programme de première, reste très faible. Cela n'est guère surprenant, dans la mesure où les notions de convexité, concavité, point d'inflexion, qui sont les premières notions susceptibles de fournir un champ d'utilisation de la dérivée seconde, sont hors programme, même si elles sont introduites ici à l'occasion de « Travaux pratiques » (mais non réinvesties par la suite). De même, la formule de Leibniz, qui constitue un théorème de base à propos des dérivées successives, et aurait pu enrichir le panel d'exercices sur le sujet, n'est pas au programme de terminale.

En outre, il n'y a que très peu d'exercices et de problèmes (deux ou trois en tout) où l'on demande à l'élève de dériver deux fois une fonction pour l'étudier, même si cette idée est utilisée dans de nombreuses situations. De façon presque systématique, l'énoncé présente alors des fonctions distinctes, l'une étant en général la dérivée de l'autre (éventuellement à un facteur de signe constant, près), et fait procéder à deux études de variations à la suite, de sorte que la notion de dérivée seconde n'est, en réalité, pas mise en jeu explicitement. L'environnement d'exercices et de problèmes de ce manuel de terminale propose donc simplement une première approche de la notion de dérivées successives en en faisant calculer quelques unes pour des fonctions usuelles assez simples. Le calcul général d'une dérivée n-ième n'est sollicité qu'une fois, pour la seule fonction de référence : $x \to 1/x$.

L'étude de la dérivabilité en un point donné, et le calcul de nombres dérivés particuliers, se maintiennent autour de 3,25% des sous-tâches de calcul en terminale. Sur un plan qualitatif, le calcul de nombres dérivés à l'aide d'une fonction dérivée appliquée en un certain point, assez présent au début de la liste d'exercices du premier chapitre de dérivation du manuel de première a pratiquement disparu de l'ouvrage de terminale. Il s'agit donc essentiellement ici de calculs de nombres dérivés (éventuellement à gauche et/ou à droite) à l'aide de la définition par la limite du taux d'accroissement, mais ils concernent encore assez peu les nouvelles fonctions du programme, logarithme, exponentielle, puissances (part de 1% vis à vis de l'ensemble des sous-tâches de calcul).

La détermination d'équations de tangentes, qui constituait l'un des éléments importants du cours de première sur la dérivation, et des thèmes d'exercices posés à ce niveau de classe dans le manuel « Déclic », passe de 3,78% à 2,20%, ce qui constitue un tassement appréciable (corrélatif de la baisse de la proportion de tracés de tangentes, observée au-dessus, dans l'analyse des sous-tâches graphiques). Il n'y a plus que quatre exercices ciblés sur ce thème dans l'ouvrage de terminale, mais on demande assez régulièrement de déterminer l'équation d'une tangente particulière au sein des différentes études de fonctions proposées.

Les sous-tâches portant sur le calcul d'approximations affines (1,89% des sous-tâches de calcul dans le manuel de 1ère S) ont totalement disparu de l'environnement d'exercices et de problèmes du manuel de terminale, et la définition de la dérivabilité par approximation affine, tout de même rappelée dans le cours de terminale, est seulement utilisée en exercice pour démontrer la formule de dérivation d'une fonction composée.

Notons surtout l'importance de la part prise par les sous-tâches liées au calcul de primitives et à l'intégration en général (les plus représentées : 22,22%), et l'entrée, dans le tableau de ces statistiques concernant les sous-tâches de calcul liées à la dérivée, à la hauteur de 2,44%, d'une rubrique « Majorations et encadrements » (par une méthode propre à l'analyse : étude des variations ou inégalités des accroissements finis), là où il n'y avait en première que le recours à des méthodes algébriques d'encadrement (donc non liées à la dérivation).

Les sous-tâches de calcul externes à la dérivation, qui représentaient 57,05% des calculs sollicités dans le manuel de première, voient donc leur part tomber à 33,33% répartis comme suit :

.Calculs de limites :	9,04%
.Equations, inéquations et systèmes (isolés de l'étude des variations) :	6,93%
.Majorations, encadrements algébriques :	3,63%
.Calculs ou encadrements numériques, dichotomie :	4,04%
.Recherches d'asymptotes :	2,20%
.Transformations de nature algébrique, mises sous forme canonique :	2,89%
.Parité, périodicité, axes et centres de symétrie :	1,06%
.Calculs trigonométriques :	1,15%
.Calculs géométriques :	1,33%
.Autres (calculs de fonction composée, ensembles de définition, déterminations d'intervalles images…) :	1,06%
	Total : 33,33%

Ces pourcentages nous permettent de bien cerner les principales évolutions se produisant dans l'environnement de la dérivée, en dépassant le constat premier selon lequel les calculs qui ne concernent pas la dérivation deviennent très minoritaires dans le manuel de terminale.

Ainsi constate-t-on que les calculs géométriques et les recherches d'ensembles de définition sont les deux types de sous-tâches qui étaient très présents dans les exercices et problèmes du manuel de première, au sein des deux chapitres de dérivation (7,38% et 6,81% des calculs demandés dans ces chapitres), et qui deviennent assez marginaux dans le manuel de terminale. D'autres types de calculs enregistrent une baisse plus ou moins forte : les équations, inéquations, systèmes, majorations et encadrements, qui passent de 12,77% dans le manuel de première, à 10,56% (= 6,93% + 3,63%) dans celui de terminale, les calculs numériques (de 7,47% à 4,04%), les transformations algébriques (de 6,72% à 2,89%), les calculs liés à la réduction du domaine d'étude par parité, périodicité,… etc. (de 3,40% à 1,06%) et ceux liés à la trigonométrie (de 2,84% à 1,15%).

Cependant, certaines sous-tâches de calcul « hors dérivation » stagnent ou augmentent quand l'ensemble des sous-tâches de ce type décline. Ainsi, les calculs de limites sont beaucoup plus présents dans les exercices du manuel de terminale où interviennent les notions relatives à la dérivation (part de 9,04%, contre 4,64% en première). Les calculs liés à la recherche d'asymptotes se maintiennent (2,20% contre 2,18% en première), ce que confirme le développement de la part des tracés d'asymptotes relevé dans l'analyse effectuée ci-dessus des sous-tâches graphiques. Le développement de ces recherches d'asymptotes est surtout perceptible au niveau de ces sous-tâches, puisque la proportion globale, et encore bien davantage la diversité et le nombre, de sous-tâches de calcul, ont nettement augmenté dans le manuel de terminale.

Tous ces résultats tracent bien les grandes lignes d'une évolution sensible de l'environnement de la dérivée dans les exercices et problèmes :

a) Les éclairages numériques et géométriques, caractéristiques de l'installation d'un premier rapport à la dérivée, et très présents dans le manuel de première, se raréfient dans celui de terminale.

b) Les transformations algébriques explicitement sollicitées, qui correspondaient à des tâches transitoires élémentaires (voir par exemple le calcul et la simplification de l'expression d'un taux d'accroissement avant celui du nombre dérivé), sont aussi moins nombreuses au fur et à mesure que les tâches se complexifient.

c) Les réductions de domaines d'étude (par parité, périodicité...) et (parallèlement) les calculs trigonométriques, qui constituent des temps forts du programme de première apparaissent de façon plus sporadique en terminale, souvent au détour d'une étude de fonction.

d) En revanche, les équations, inéquations, systèmes,... etc. (isolés d'une étude des variations ou de la recherche d'un extremum, par exemple) ont une part qui diminue assez peu dans le manuel de terminale, car ils retrouvent dans certains chapitres propres au programme de nouveaux champs d'exercice. Ainsi, les fonctions logarithme et exponentielle fournissent matière à la résolution de nouvelles équations que l'on va retrouver au voisinage de la dérivée dans des études de fonctions (notamment) via, par exemple, la recherche des points d'intersection avec les axes. De même, la recherche de la solution d'une équation différentielle correspondant à des conditions initiales particulières donne lieu à la résolution d'une équation du premier degré si l'équation différentielle est linéaire d'ordre un à coefficients constants, et à la résolution d'un système d'équations du premier degré si l'équation différentielle est linéaire d'ordre deux à coefficients constants.

e) Enfin, la généralisation des études globales amène une certaine augmentation de la proportion de calculs relatifs à la recherche de limites et d'asymptotes dans l'environnement de questions liées à la dérivation (étude des variations), chose que l'on pouvait prévoir.

Voici à présent quelques précisions concernant encore la répartition des sous-tâches de calcul qui viennent d'être analysées :

<u>Sous-tâches de calcul internes à la dérivation :</u>

Implicitement sollicitées	: 32,57%
Explicitement sollicitées	: 53,16%
Explicitement sollicitées + réponse fournie	: 14,27%
Taux de questions répétitives	: 20,92%

Sous-tâches de calcul externes à la dérivation :

Implicitement sollicitées	: 25,94%
Explicitement sollicitées	: 53,40%
Explicitement sollicitées + réponse fournie	: 20,66%
Taux de questions répétitives	: 6,52%

Nous constatons, au vu de ces résultats, que la proportion de sous-tâches de calcul internes à la dérivation explicitement sollicitées a fort augmenté (53,16% + 14,27% = 67,43%) par rapport à ce qu'elle était dans le manuel de première (42,2% + 6,2% = 48,4%), ce qui peut apparaître de prime abord comme un phénomène paradoxal. Cette répartition en sous-tâches explicitement et implicitement sollicitées reste dans le même temps à peu près constante en ce qui concerne les sous-tâches qui sont externes à la dérivation (E.S = 75% et IS = 25% environ).

Dans le détail, on constate que les sous-tâches de calcul liées à la dérivation et implicitement sollicitées se rencontrent essentiellement dans les questions portant sur l'étude des variations d'une fonction ou bien encore à l'occasion d'intégrations par parties : dans ces deux cas, il y a la nécessité préalable d'un calcul (implicite) de fonctions dérivées. Ces sous-tâches de calcul implicites sont donc en outre assez peu variées.

En revanche, on rencontre très peu de sous-tâches de calcul liées à la dérivation qui soient implicitement sollicitées au sein de chapitres tels que « Suites numériques » et « Equations différentielles », et les énoncés rencontrés dans ces deux chapitres font donc nettement pencher la balance du côté des sous-tâches de calcul explicitement sollicitées. En effet, les exercices et problèmes utilisant la notion de dérivée et qui se situent dans le chapitre « Suites numériques » portent pratiquement tous sur l'étude d'une suite récurrente par le théorème du point fixe selon un canevas bien rôdé de questions, où les inégalités intermédiaires (sur la dérivée et sur la fonction de départ) et la nécessité d'avoir recours aux accroissements finis sont indiquées. Du reste, à chaque fois qu'il est nécessaire d'avoir recours aux inégalités des accroissements finis dans un exercice ou un problème (quel qu'il soit), cela est explicitement indiqué par le texte.

De même, les exercices du chapitre « Equations différentielles » sont assez directifs, ce qui est à l'origine d'une forte proportion d'activités E.S :

a) La résolution des équations différentielles proposées, qui sont presque toutes de deux types (linéaires à coefficients constants, d'ordre un ou deux), réfère à des tâches bien ciblées, et la résolution de l'équation sans second membre est isolée dans l'énoncé.

b) Les recherches de solutions particulières sont toujours très pilotées au niveau de la sous-tâche sollicitée (une expression peut être donnée et il faut vérifier qu'elle satisfait à une équation différentielle, ou bien il convient de trouver la valeur de coefficients indéterminés).

c) Le théorème selon lequel la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation homogène n'est jamais à utiliser tel quel par l'élève. On lui fait retrouver et utiliser explicitement cette propriété pour l'exemple étudié.

Enfin, c'est sans doute parce que les études de fonctions proposées sont plus délicates que celles du manuel de première (qu'il s'agisse ou non de fonctions logarithmes ou exponentielles) que la part de sous-tâches explicites est en nette augmentation pour tout ce qui concerne la dérivée. Par exemple, lorsqu'il y a nécessité d'étudier les variations de la dérivée pour obtenir son signe, afin, par la suite, d'en tirer les variations et le signe de la fonction de départ, la décomposition du travail en ces tâches successives est presque systématiquement effectuée dans le questionnement. Il convient aussi de souligner, dans les résultats précédents, à la fois :

a) L'augmentation des réponses fournies par l'énoncé, tant en ce qui concerne les sous-tâches de calcul internes à la dérivation (6,2% en première contre 14,27% ici) que pour les sous-tâches externes à la dérivation (11,7% en première contre 20,66% ici). Ces pourcentages sont parfois très élevés pour certains types d'exercices : 56% pour les exercices sur les suites récurrentes et 100% pour les démonstrations de cours du chapitre sur les équations différentielles !

b) La diminution du taux de questions répétitives (à ne pas confondre avec les exercices répétitifs dont la fréquence a été étudiée plus haut : voir §1°), qui passe de 24,2% dans le manuel de première à 20,92% dans celui de terminale pour ce qui est des questions relatives à la dérivation, et de 17,8% en première à 6,52% en terminale pour les autres types de questions.

Ainsi semble-t-il y avoir (proportionnellement) moins de questions à l'intérieur des exercices posés, visant par la répétition le travail d'une technique très ciblée, que dans l'ouvrage de première où s'effectue le premier contact avec la dérivée (ce qui va dans le sens du bilan rapporté ci-dessus sur les exercices répétitifs : voir §1° évolution de la gamme d'exercices et de problèmes), mais davantage de questions portant en elles-mêmes la réponse à obtenir par l'élève. Ce dernier fait peut s'expliquer par la plus grande variété et le caractère plus technique des questions posées, que dans le manuel de première, notamment du fait de l'apprentissage parallèle de nouvelles fonctions, logarithmes et exponentielles, qui occasionne un important travail de réinvestissement de connaissances anciennes sur la dérivée.

5°) Sous-tâches du type : « Appliquer une définition ».

La part de ce type de sous-tâches, qui passe de 5,32% dans le manuel de première, à 8,79% dans celui de terminale, demeure cependant encore assez faible.

L'évolution la plus importante concerne la répartition de ces sous-tâches entre «définitions ayant trait à la dérivée » et « autres définitions », qui évolue au profit des premières (78,09% contre 47,8% dans le manuel de première S), qui deviennent majoritaires sur les secondes (21,91% contre 52,2% en 1èreS). Encore doit-on nuancer notre propos concernant cette évolution, en rappelant qu'elle tient essentiellement à l'introduction des notions de

« primitive », « d'intégrale » et de « valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle » (58,31% des définitions utilisées en exercices), l'intégrale d'une fonction entre deux bornes étant ici définie comme la différence des valeurs d'une primitive de cette fonction entre ces bornes. Celle de la dérivabilité en un point (à gauche, à droite) par limite du taux d'accroissement occupe aussi, à présent, une place assez importante (12,57% des définitions employées), tandis que les autres définitions relatives à la dérivée sont d'une utilisation beaucoup plus marginale :

Définition du nombre dérivé	:	2,67%
Définitions liées à la physique (vitesse, accélération, intensité...)	:	2,67%
Définition de la fonction dérivée	:	1,07%
Définition par approximation affine	:	0,80%
Total	:	7,21%

Concernant à présent les définitions ne touchant pas la dérivation (21,91% des définitions utilisées), ce sont les diverses définitions de droites asymptotes (horizontales, verticales, et obliques) qui sont le plus sollicitées (12,14%), ce qui est symptomatique de la généralisation des études globales de fonctions en terminale, et d'une certaine prise en compte des comportements asymptotiques (même si elle demeure incomplète puisque, par exemple, les situations faisant intervenir la notion de «branche parabolique» ne sont pas étudiées).

La définition de la continuité en un point correspond, elle, à 4,39% des définitions utilisées, les définitions de la parité, de la périodicité, d'un centre ou d'un axe de symétrie, à 2,68%, puis viennent les définitions de la croissance ou de la décroissance (large ou stricte) d'une fonction (1,88%), et enfin, la définition de la composée de deux fonctions (0,82%). Notons la faible part prise par cette définition en dépit de l'introduction de la formule de dérivation d'une fonction composée dans le cours de terminale. Cela est dû au fait que la plupart des calculs de dérivées sollicités dans les exercices s'effectuent à partir de « formules relais » en découlant, mais qui ont acquis avec la pratique une existence autonome, et qui suffisent à l'élève pour traiter les situations qu'on lui présente (formule de la dérivée de exp(f), ln(f), $\sqrt{f}$, notamment).

La rubrique sur l'étude des variations d'une fonction, contenue dans l'annexe à l'ouvrage intitulée « Techniques de base » fournit, avec quelques exercices ici et là des différents chapitres, l'occasion à l'élève de déterminer les variations d'une fonction par les définitions de la « croissance » et de la « décroissance », sans avoir recours à la dérivée.

A l'instar de ce que l'on a pu observer dans le manuel de première, la très grande majorité des définitions utilisées (91,7%) le sont en tant que connaissances mises en fonctionnement à un niveau technique (terminologie due à A. Robert). C'est notamment le cas des définitions nouvelles de « primitive » et « d'intégrale ». On peut juste signaler que certaines définitions (part de 7,2%), principalement celle (à présent ancienne) de la dérivabilité en un point, jouent le rôle de « connaissances mobilisables » dans quelques situations d'exercices. C'est ainsi le cas lorsqu'il faut distinguer *seul* la nécessité de regarder « à gauche et à droite au point » pour l'étude de la dérivabilité en un point (méthode non indiquée), et où les diverses étapes du calcul (par exemple, simplification préalable d'une expression comportant des valeurs absolues, passage à la limite,... etc.) ne sont pas fournies par l'énoncé. Les définitions mises en fonctionnement comme connaissances disponibles sont quasiment inexistantes (1,1%).

6°) Sous-tâches du type : « Appliquer un théorème ».

La part de ces sous-tâches au sein de l'ensemble des types de sous-tâches répertoriés reste à peu près ce qu'elle était dans le manuel de première (27,88% au lieu de 24,64%), mais la façon dont se décomposent les sous-tâches du type « Appliquer un théorème » évolue sensiblement dans le manuel de terminale.

Comme en première, ce sont les formules de dérivation et le théorème de monotonie qui constituent l'essentiel des technologies utilisées (63,93% contre 68,3% en première), mais la part des formules de dérivation augmente (45,09% au lieu de 40,8% en première), tandis que celle du théorème de monotonie diminue (18,84% au lieu de 27,5%). Ce phénomène tient au fait que le calcul de fonctions dérivées trouve en terminale un plus large éventail de cas d'utilisation qu'en première (équations différentielles, inégalités des accroissements finis, intégrations par parties,... etc. auxquels s'ajoutent les applications déjà étudiées en première). Et cet enrichissement des situations où un calcul de fonction dérivée est rendu nécessaire, coïncidant avec l'introduction de nouveaux théorèmes dans l'environnement du manuel de terminale, entraîne une baisse relative de la part prise par l'application du théorème de monotonie. Ce dernier garde cependant une place très importante liée à la part prise par les études de fonction dans le manuel de terminale (mais précisément, cette part était déjà grande dans celui de première).

La partie non algorithmique des théorèmes généraux de dérivation (justification de la dérivabilité d'une fonction sur son ensemble de définition par identification de cette fonction avec une somme, un produit,... etc. de fonctions classiquement dérivables) est explicitement sollicitée de façon très sporadique, même si on relève un certain développement de ce type de questions, par rapport à la place qu'il occupait dans le manuel de première (2,92%, au lieu de 1%, des théorèmes utilisés). En première S, l'élève doit surtout repérer, et dans quelques exercices seulement (d'entraînement au calcul de dérivées, notamment), sur quel ensemble de nombres réels il y a dérivabilité (il s'agit alors, le plus souvent, de l'ensemble de définition de la fonction, exception faite des fonctions irrationnelles), mais il doit très rarement donner une justification. Ce qui est étrange, en l'occurrence, dans le léger développement de ce type de question au sein du manuel de terminale, c'est que rien de nouveau, dans le cours proprement dit, du chapitre « Calcul différentiel », ne laisse prévoir une telle évolution.

Si donc, comme on vient de le constater, les grands équilibres rencontrés dans le manuel de première, caractérisés par la prédominance de l'utilisation des théorèmes de dérivation et du théorème de monotonie (45,09% + 2,92% + 18,84% = 66,85%) sur le reste, ont peu varié, il y a une certaine diversification, en revanche, des théorèmes utilisés dans une moindre mesure (part de 33,15%). Ainsi trouve-t-on, parmi eux, les quelques théorèmes liés à la dérivée qui sont spécifiques du cours de terminale ; ils représentent 21,04% (seulement) des théorèmes utilisés dans les exercices de ce manuel. Dans le même temps, les autres théorèmes minoritaires du programme de première S, sur ce thème de la dérivée, sont également encore sollicités par les énoncés du manuel de terminale, mais certains de ces théorèmes voient leur part diminuer sensiblement.

Théorèmes anciens (dérivée) :		Théorèmes nouveaux (dérivée) :	
Equations/tangente	2,23%	Inégalité.Acc.finis	3,51%
Extrema	1,52%	Lien av. continuité	1,00%
Existence/unicité de la solution d'équation f(x)=0	4,35%	Primitives, intégration/parties, Aires et volumes	9,92%
Bijections	0,61%	Equa. diff.	6,61%
Total :	8,71%	Total :	21,04%

On constate ainsi que la part prise par le théorème sur l'existence d'un extremum est passée de 6,4%, dans le manuel de première, à 1,52% dans celui de terminale ; ce théorème est surtout utilisé dans le manuel de terminale à l'occasion des quelques problèmes d'optimisation proposés. Naturellement, ce pourcentage ne tient pas compte des situations où il y a présence implicite d'un extremum, lisible sur le tableau de variations de la fonction et mis en évidence lors du tracé de la courbe, lorsque l'énoncé ne demande pas d'établir l'existence de cet extremum.

La part du théorème sur le caractère bijectif d'applications strictement monotones diminue également (0,61% en terminale contre 1,6% en première), tandis que le théorème précisant les conditions d'existence et d'unicité de la valeur d'annulation d'une fonction, s'il a un peu évolué dans sa forme (l'hypothèse de dérivabilité sur la fonction est maintenant remplacée par une hypothèse de continuité), se maintient à peu près au même niveau dans son utilisation à l'occasion des exercices et problèmes (4,35% des théorèmes utilisés contre 4,4% dans le manuel de première). Ce théorème confirme sa position en terminale dans l'environnement des exercices et problèmes proposés, très probablement du fait de l'introduction, à ce niveau de classe, d'études de suites récurrentes par la méthode du point fixe : la possibilité de calculer une valeur approchée de la limite de telles suites (solution d'une équation du type « f(x) = x ») par dichotomie lui confère une certaine légitimité dans cet environnement. Mais bien sûr, il y a aussi bon nombre de calculs par dichotomie de valeurs approchées de solutions d'équations du type « f(x) = 0 », et c'est donc en tout état de cause cette méthode pratique, et pour tout dire algorithmique, de la dichotomie, qui est à la base de l'utilisation répétée de ce théorème dans les situations d'exercices et de problèmes du manuel de terminale.

Il convient aussi de signaler la très faible présence de théorèmes non liés à la dérivée dans cet environnement (3,4% des théorèmes utilisés en terminale, contre 12,6% en première). Ce résultat est évidemment à rapprocher de ceux concernant les sous-tâches de calcul et les sous-tâches du type « Appliquer une définition » pour lesquelles la proportion entre « sous-tâches liées à la dérivée » et « sous-tâches non liées à la dérivée » évolue en faveur des premières.

Enfin, notons que les théorèmes utilisés dans le manuel de terminale correspondent en nette majorité à des connaissances mises en fonctionnement à un niveau technique (72,6%), plutôt qu'en tant que connaissances mobilisables (25,4%) ou disponibles (2%). Encore faut il signaler que le théorème de monotonie a été comptabilisé systématiquement ici comme connaissance mobilisable (car la méthode d'utilisation est non indiquée dans les exercices, et il y a plusieurs étapes : calcul de la dérivée, étude de son signe, variations), alors que ce théorème (vu en classe de première) devient à présent très routinier en terminale.

Tableau récapitulatif des proportions de théorèmes utilisés :

Théorèmes généraux de dérivation :	45,09%+2,92% = 48,01%
Théorème de monotonie :	18,84%
Théorèmes minoritaires anciens (liés à la dérivée) :	8,71%
Théorèmes minoritaires nouveaux (liés à la dérivée) :	21,04%
Théorèmes (minoritaires) non liés à la dérivée :	3,40%

Total : 100%

7°) Sous-tâches minoritaires non graphiques.

Il est surtout important de relever, concernant ces sous-tâches minoritaires, qu'elles sont beaucoup plus souvent centrées sur la dérivée (54,44% des cas), que dans le manuel de première (36,5% des cas). C'est là l'évolution la plus significative : déjà observée pour les autres types de sous-tâches, elle se révèle cependant moins profonde pour ces sous-tâches minoritaires (augmentation de l'ordre de 18%), que pour les sous-tâches de calcul (+23,72%), ou mieux encore, que pour les applications de définitions (+30,29%).

Sans doute ce phénomène est-il assez révélateur d'un changement de rapport à la dérivée entre la classe de première et celle de terminale, puisque ces sous-tâches dites « minoritaires » sont aussi les plus variables, donc les moins stéréotypées, voire les plus difficiles à cerner. Elles correspondent parfois à des tâches complexes. Dans l'environnement des exercices et problèmes du manuel de première, où s'ébauche un premier rapport à la dérivée, il n'est pas très étonnant que ce type de sous-tâches (au sein même des chapitres de dérivation) concerne essentiellement des notions ne touchant pas au concept de dérivée, et que cela ne soit plus le cas en terminale.

C'est cependant une sous-tâche minoritaire ne concernant pas la dérivée : *« Identifier le sens de variation d'une fonction sans calculer sa dérivée »*, qui est la plus répandue (19,56% des sous-tâches minoritaires), mais elle n'est certes située qu'indirectement au voisinage de la dérivée au sein du manuel (voir l'annexe sur : « Fonctions et sens de variation », et les études de fonctions des chapitres : « Fonction logarithme » et « Fonction exponentielle »). Les sous-tâches du type « Identifier… » (deux courbes symétriques vérifiant une même équation, une équation différentielle satisfaite par la fonction fournie,… etc.) représentent d'ailleurs la part la plus élevée (48,04%), de ces « sous-tâches minoritaires non graphiques » (contre 16% en première).

Viennent ensuite les sous-tâches du type *« Etudier… »* (l'existence d'un extremum, la position relative courbe / tangente,… etc.), qui correspondent à une part de 22,54%. Signe d'évolution, ces sous-tâches du type *« Etudier... »* semblent s'être substituées aux sous-tâches du type *« Justifier un résultat »* (non réductibles à un simple calcul), qui constituaient 22% des sous-tâches minoritaires non graphiques du manuel de première (part de 3,88% à présent).

Les sous-tâches du type : *« traduire analytiquement des conditions, concernant par exemple une dérivée, une droite tangente, l'existence d'un extremum... »* sont en nette régression (part de 8,33%, contre 25% dans le manuel de première), mais sont à présent presque toutes liées à la dérivation. Les sous-tâches du type : *« Comparer des résultats, des méthodes »* (exemple : effectuer une tâche concourant à calculer une primitive de fonction de deux façons différentes, puis expliquer la concordance des résultats) restent à peu près stables (varie de 5% à 7,22%). Surprise : la part des démonstrations (tâche complexe non réductible à un calcul du type *« vérification d'une formule »*) est plus faible parmi ces sous-tâches (déjà) minoritaires que dans le manuel de première, de l'ordre de 6,66% (contre 13% en première). Parmi elles, on peut cependant citer la démonstration du fait que *« toute tangente à l'origine pour la courbe représentative d 'une fonction impaire et dérivable sur R traverse cette courbe en ce point »* ou celle du fait que *« toute fonction dérivable en un point possède une dérivée symétrique en ce point, la réciproque étant fausse »*. Ce pourcentage comprend aussi quelques démonstrations par récurrence. De même, il n'y a, parmi ces sous-tâches minoritaires, que 3,33% d'entre elles qui correspondent à un travail de formalisation (6% en première) ; on les retrouve toutes au chapitre « calcul différentiel », dans les quelques problèmes d'optimisation du manuel.

Ces quelques résultats montrent que si ce type de sous-tâches, comme les autres types qui ont été analysés, est davantage centré sur la dérivée qu'en classe de première, aucune évolution de nature qualitative ne se détache vraiment ici, entre les deux niveaux d'étude.

Tableau récapitulatif (sous-tâches minoritaires non graphiques) :

Identifier :	48,04%
Etudier :	22,54%
Justifier :	3,88%
Comparer :	7,22%
Traduct. Analytique :	8,33%
Démontrer :	6,66%
Formaliser :	3,33%
Total :	100%

C/ CLASSIFICATION PAR AIDES A LA RESOLUTION

1°) Découpages et répétitions de séquences : une évolution toute en nuances.

Il faut tout d'abord rappeler ici, que la situation de l'élève vis à vis des notions et des pratiques liées au concept de dérivée n'est plus du tout la même en terminale, niveau de classe où le thème de la dérivation n'est pas neuf, qu'en première, où a lieu l'approche initiale de ce thème, et souligner l'influence de ce fait sur la nature des aides à la résolution en général, et sur les découpages en sous-questions et les répétitions de phases techniques bien isolées en particulier. Ainsi convient-il notamment, du point de vue de ces aides, de distinguer dans le chapitre 6 intitulé « calcul différentiel », les exercices de reprise de notions anciennes (définition du nombre dérivé, formules de dérivation, théorème de monotonie, etc..), de ceux portant sur des thèmes vraiment nouveaux et propres au programme de terminale (dérivées successives, inégalités des accroissements finis,… etc.).

L'étude de la dérivabilité (à gauche, à droite) d'une fonction en un point particulier, par exemple, ne fait plus guère l'objet de questions intermédiaires (calcul, simplification du taux d'accroissement, passage à la limite), et notamment dans le cas déjà abordé en classe de première d'une fonction définie par une seule expression très simple, comportant un radical ou des valeurs absolues (voir ci-après la page 152 du manuel de terminale). On peut juste relever, dans les exercices répétitifs concernant ce cas, le fait que l'étude de la dérivabilité au point considéré et l'interprétation graphique correspondante font l'objet de deux étapes distinctes, bien mises en valeur par l'énoncé.

Notons cependant que le premier exercice de la liste portant sur ce thème, très différent des suivants dans sa nature (lecture graphique), livre l'expression sous forme de limites, des nombres dérivés à gauche et à droite en un point, et suggère, à travers le questionnement proposé, la nécessité d'évaluer (ici, graphiquement) les valeurs de ces nombres dérivés à gauche et à droite pour pouvoir conclure sur la dérivabilité au point considéré. Ce faisant, il fournit non seulement une aide explicite pour l'exercice concerné, mais aussi une aide implicite pour les suivants. Signalons en outre que ces exercices, qui font l'objet ici d'un sujet de « Travaux pratiques » et d'un exercice corrigé (rubrique « Utilisations »), sont donc présentés dans cet ouvrage de terminale comme « typiques » au niveau de classe concerné, même s'ils figuraient déjà, mais en moins grand nombre et dans un contexte d'aides à la résolution beaucoup plus développées, au sein du manuel de première. Leur changement de statut dans l'environnement du manuel de terminale procède alors d'un double phénomène : d'une part, leur répétition dans le champ d'exercices proposés, et d'autre part, la disparition d'un découpage (nécessairement artificiel) pour ces exercices en sous-questions élémentaires d'ordre technique.

L'étude de la dérivabilité d'une fonction définie par deux expressions au point de jonction de ces expressions, présente de façon très sporadique dans certains problèmes, constitue un nouveau type de tâche en terminale, qui ne fait pourtant, ni l'objet d'un découpage systématique en questions intermédiaires, ni l'objet de répétitions d'exercices d'entraînement (on en trouve seulement deux dans chacun des chapitres : « Calcul différentiel », « Fonction logarithme », et « Fonctions exponentielles »). Il y a dans cette absence comme un « saut », qui se justifie probablement à la fois par la plus grande familiarisation des élèves au concept de dérivée qu'en classe de première, et par le fait que l'étude de la dérivabilité à gauche et à droite en un point est théorisée dans l'encart associé à un sujet de « Travaux pratiques » du chapitre de calcul différentiel (bien que le bulletin officiel du 07/07/1994 spécifie que l'étude des singularités n'est pas un objectif du programme).

2. Dérivation

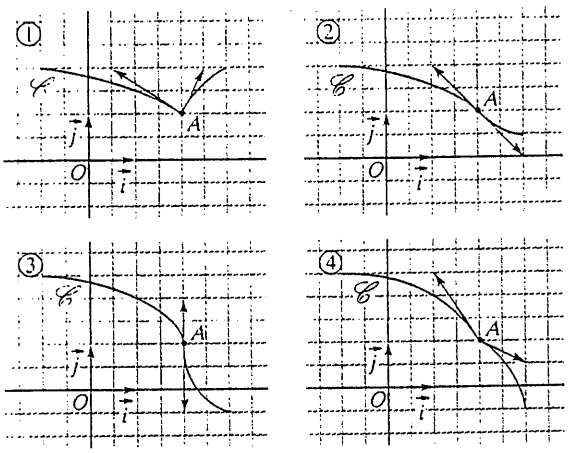
1. Dérivabilité

1 Chacune des courbes suivantes est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1\ ;3]$.
Répondre dans chacun des cas aux questions suivantes :

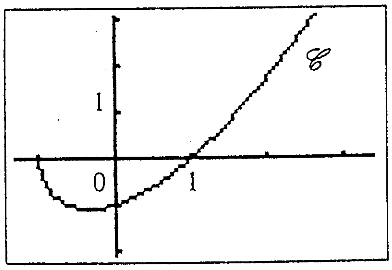
a) déterminer graphiquement :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}\ ;$$

b) la fonction f est-elle dérivable en 2 ?



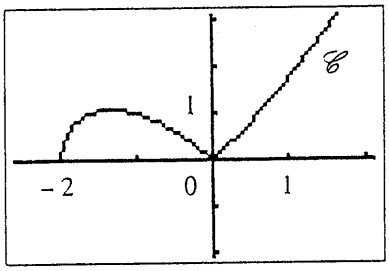
2 La courbe ci-dessous est celle obtenue à l'aide d'une calculatrice graphique pour la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x+1}$.
La fonction paraît-elle dérivable en -1 ?
Vérifier la réponse par le calcul.



3 La courbe ci-après est celle, obtenue à l'aide de la calculatrice graphique de la fonction f définie sur $[-2\ ;+\infty]$ par :

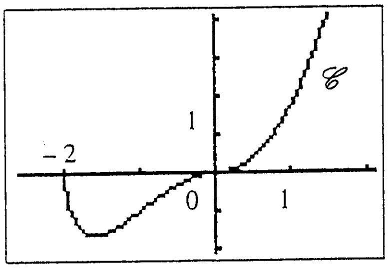
$$f(x)=\sqrt{x^2(x+2)}\,.$$

La fonction paraît-elle dérivable en -2 ? en 0 ?
Vérifier la réponse par le calcul.



4 ★ Même exercice avec :

$$f(x)=x\sqrt{x^2(x+2)}\,.$$



5 Étudier la dérivabilité en 0 et 1 de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

a) $f : x \mapsto (x-1)\,|x^2-x|$;

b) $f : x \mapsto x^2\,|x^2-x|$; c) $f : x \mapsto x\,|x-x^2|$;

d) $f : x \mapsto (x^2-x)\,|x^2-x|$.

Quelle est la conséquence graphique de chacun des résultats trouvés ?

L'étude, par le théorème de monotonie, d'équations du type f(x) = 0, et du caractère bijectif d'applications numériques, fait l'objet dans le manuel de première S d'exercices élémentaires d'entraînement, bien séparés, assez répétitifs et progressifs, structure qu'on ne retrouve plus dans le manuel de terminale (chapitre 5 : « Limites et continuité ») à propos de ce thème.

En première S, rappelons le, on fait d'abord travailler à l'élève la détermination de l'image d'un intervalle donné par une certaine application spécifiée (dix cas fournis répartis sur deux exercices). Puis on lui demande d'établir, dans les deux exercices qui leur font suite, la bijectivité de certaines applications, d'un intervalle donné sur un autre, lui aussi indiqué par le texte (huit cas soumis à l'élève). De même, on lui demande dans trois exercices distincts, d'abord de montrer qu'une équation f(x) = 0 admet une solution unique sur un intervalle spécifié (quatre cas à étudier), ensuite de déterminer le nombre de solutions réelles d'une équation du type f(x) = 0 (encore quatre cas), et enfin (troisième exercice) de montrer que toute fonction polynôme de degré trois admet au moins une solution réelle.

En terminale S (chapitre 5), après deux exercices du type : *« déterminer si f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J, donnés »* (cinq exemples à examiner avec généralisation au cas d'intervalles I et J quelconques, par rapport aux situations étudiées en première), on passe directement à des exercices constitués de plusieurs questions, mélangeant démonstrations d'existence et d'unicité de solutions et justifications du caractère bijectif de certaines applications, avec un canevas qui se modifie d'un exercice à l'autre. On ne demande plus à l'élève des tâches aussi ciblées, découpées et répétitives que dans le manuel de première, et il n'y a plus non plus de progression aussi linéaire, d'un exercice à l'autre, de la tâche la plus simple à la plus complexe. Une relative « flexibilité » devient ainsi l'enjeu du passage d'un exercice à l'autre, même si ces exercices d'entraînement peuvent nous sembler encore assez « standards ». Ici on demande explicitement de déterminer l'image d'un certain intervalle par une application, et là cette détermination est implicitement sollicitée, mais on demande à l'élève les limites de la fonction aux bornes de cet intervalle. Ici il faut établir la stricte monotonie d'une application f sur un intervalle sans calculer sa dérivée, là on laisse le choix de la méthode à l'élève pour étudier les variations de f. Ici, la continuité est explicitement suggérée pour l'argumentation, là elle ne l'est pas. Ici, l'énoncé parle de l'équation f(x) = a, et là, c'est une autre équation, qui lui est équivalente, qui figure dans le texte de l'exercice,... etc.

Si l'on tente à présent d'observer à travers quelles suites et répétitions d'exercices, et quels découpages en questions élémentaires, se construit un premier rapport à des notions nouvelles concernant la dérivée, on constate une certaine variété dans le scénario.

Il y a des sujets tels que le calcul de dérivées successives, de primitives (concernant ou non les nouvelles fonctions) ou l'intégration par parties, par exemple, qui font l'objet de suites d'exercices d'entraînement, très répétitifs, destinés à bien isoler la technique concernée, mais où l'on observe que très rarement un découpage en questions élémentaires (comme exception, citons la décomposition de fractions rationnelles en éléments simples, selon les indications précises du texte, avant le calcul d'une primitive). En revanche, on trouve aussi des thèmes tels que l'étude de suites récurrentes par la méthode du point fixe, via les inégalités des accroissements finis, ou bien la résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre, dans lesquels un même canevas de questions intermédiaires se retrouve d'un exercice à l'autre. Par exemple, pour ces équations différentielles les étapes sont : la résolution de l'équation homogène, la vérification d'une solution particulière ou sa détermination à partir d'une forme générale fournie (polynomiale, par exemple), et l'établissement du fait que la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène, avant la conclusion. Cependant, il s'agit là de tâches fort complexes pour lesquelles le découpage décrit, en questions intermédiaires, ne se situe plus du tout au même niveau que les découpages observés dans les standards d'exercices du manuel de première. Ce n'est donc pas tant la présence d'un découpage qu'il faut relever ici, que sa répétition mot pour mot d'un exercice à l'autre.

Comme dans le manuel de première S, on rencontre parfois aussi, concernant les notions nouvelles relatives à la dérivation, des suites d'exercices classiques, éventuellement agrémentées de sous-titres, amenant une évolution progressive, du plus simple au plus complexe, d'un exercice à l'autre : équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients constants, sans second membre, puis sans second membre mais avec une condition initiale, puis avec second membre,... etc., calculs d'aires avec représentation graphique fournie par le texte, puis sans. Cependant, même pour des notions nouvelles, on n'observe plus, dans l'ensemble, autant que dans le manuel de première, des progressions aussi linéaires. Il y a maintenant davantage de variabilité dans les données et l'objectif à atteindre : on ajoute ceci, on retire cela, on introduit des paramètres... ce qui oblige l'élève à une plus grande adaptabilité d'un exercice à l'autre.

Ainsi, lorsque l'on observe (page 157, présentée ci-après) la liste des premiers exercices proposés dans le chapitre 6 de calcul différentiel sur le thème « Accroissements finis », ce n'est pas une augmentation croissante de la difficulté correspondant simplement, d'un exercice à l'autre, à la suppression d'une question intermédiaire pour l'établissement d'un encadrement donné, que l'on constate, mais plutôt une évolution assez profonde du questionnement, voire de la nature même de ces exercices.

Les deux premiers exercices (n°41 et n°42) évoquent une fonction f, dérivable sur un intervalle [a,b], donnent les valeurs de f(a) et f(b), un encadrement de sa dérivée sur [a,b] et demandent directement d'en déduire une information sur le domaine du plan auquel appartient la courbe représentative de f (étude d'une situation générale et changement de cadre). Les suivants sollicitent un encadrement pour une fonction particulière, définie par son expression analytique, et demandent seulement ensuite une interprétation graphique de cet encadrement (en contrepartie, ils nécessitent d'établir préalablement un encadrement de la dérivée). Tantôt l'élève bénéficie d'une question intermédiaire portant sur un encadrement de la dérivée qu'il lui est demandé d'établir (exercice n°43), tantôt il n'en bénéficie pas, mais l'énoncé peut alors en revanche lui indiquer explicitement qu'il doit appliquer les inégalités des accroissements finis sur tel ou tel intervalle pour obtenir l'encadrement recherché de la fonction étudiée (exercice n°44).

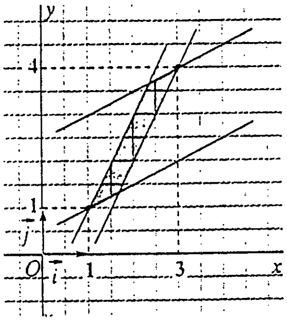
Dans l'exercice n°45 (fonction f définie par f(x) = sin(x)+cos(x)), l'énoncé sollicite directement l'interprétation graphique via une inégalité des accroissements finis sous une forme (alors nouvelle) comportant des valeurs absolues ; en contrepartie il fournit cette interprétation graphique à établir.

3. Accroissements finis

41 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[1 ; 3]$ telle que :

$f(1) = 1$, $f(3) = 4$
et, pour tout x de $[1 ; 3]$:

$$\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 2 .$$



Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f se situe à l'intérieur du parallélogramme ci-contre.

42 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ telle que :

$$f(-1) = 1 , \quad f(1) = -2$$

et, pour tout x de $[-1 ; 1]$, $-2 \leqslant f'(x) \leqslant -1$.
Dans quel domaine limité du plan la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f se trouve-t-elle ?
Illustrer graphiquement le résultat.

43 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ définie sur $]-1 ; +\infty[$.
Montrer que, pour tout réel x positif, on a :

$$-1 \leqslant f'(x) \leqslant 0 .$$

En déduire que, pour tout réel x positif :

$$-x + 1 \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1 .$$

Illustrer graphiquement le résultat.

44 ★ Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ définie sur $[-2 ; +\infty[$.
Montrer, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[-1 ; 2]$, que, pour tout x de $[-1 ; 2]$:

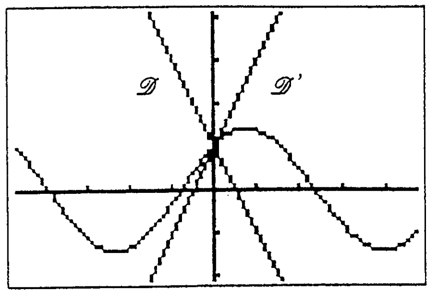
$$\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \leqslant \sqrt{x+2} \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} .$$

Illustrer graphiquement le résultat.

45 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \sin x + \cos x .$$

Montrer que, pour tout réel x , $|f'(x)| \leqslant 2$.
En déduire que la courbe représentative de la fonction f est située entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $y = -2x + 1$ et $y = 2x + 1$.



46 Montrer que, pour tout x de $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\tan x \geqslant x .$$

47 En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur un intervalle à préciser, déterminer un encadrement des nombres réels suivants :

a) $\sqrt{1{,}000\,4}$; b) $\dfrac{1}{10\,001}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{9\,996}}$;

d) $\sin 0{,}52$.

48 Soit la fonction $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{2}x + \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

1° Étudier les variations de la fonction f sur $[0 ; \pi]$.

2° Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

3° Montrer que, pour tout x de $[0 ; \pi]$:

$$f'(x) \geqslant -\frac{3}{2} .$$

4° Montrer que, pour tout x de $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$:

$$f(x) \geqslant -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

et, pour tout x de $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) \leqslant -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

5° En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T , puis tracer $\mathscr{C}$ et T sur $[0 ; \pi]$.

Il n'y a donc pas systématiquement ici une augmentation graduelle de la difficulté des exercices, mais plutôt une confrontation avec des situations variées, présentant des difficultés de diverses natures et dissociées d'un exercice à l'autre. Cette configuration n'empêche nullement les auteurs de présenter aussi, en fin de liste, deux exercices cumulant les difficultés (très peu directifs), où l'on demande, dans l'un d'établir une inégalité fonctionnelle, et dans l'autre des encadrements numériques, sans autre indication que le fait que ces exercices se situent dans la liste *« accroissements finis »*.

Signalons à présent un canevas de questions, constituant une aide à la résolution spécifique du manuel de terminale, et assez fréquent dans ce manuel. Ce canevas se rencontre dans divers exercices et problèmes portant sur des études de fonctions, qu'il s'agisse de celles du chapitre 6 de calcul différentiel ou de celles des chapitres 7 et 8 consacrés aux fonctions logarithme et exponentielle. Il s'agit de l'étude des variations d'une fonction à l'aide d'une fonction dite auxiliaire, tâche parfois annoncée au début de l'exercice au moyen d'un sous-titre.

L'énoncé commence par introduire cette fonction (auxiliaire) g, souvent très simple, demande d'en étudier les variations et d'en déduire le signe sur l'intervalle considéré, puis il présente une fonction f dont il demande de déterminer les variations à partir du résultat obtenu concernant g. La dérivée de f se trouvant être la fonction g ou pouvant s'exprimer simplement en fonction de g, sous la forme : $f' = g.h$, où h est une fonction de signe connu (généralement positive), l'élève peut ainsi conclure aisément sur les variations de f. Un tel type de questionnement ne se rencontre pas dans le manuel de première, car toutes les fonctions alors étudiées ont une dérivée dont le signe peut se déduire aisément de façon algébrique en résolvant une inéquation.

Ce canevas général s'enrichit naturellement de quelques variantes spécifiques d'un exercice à l'autre, qui conduisent dans presque toutes les situations rencontrées à un pilotage très directif, donc il constitue en fin de compte une aide à la résolution dont l'élève a fort peu l'occasion, ici, de s'affranchir progressivement comme c'était le cas d'autres aides précédemment décrites. Parmi les variantes, notons par exemple que dans le cas où il y a présence d'un extremum en un point d'abscisse α pour la fonction g, le calcul de la valeur de $g(\alpha)$ se trouvant être alors décisif pour la détermination du signe de g, l'énoncé demande explicitement ce calcul. Si c'est le calcul des limites aux bornes du domaine d'étude qui est en jeu, l'énoncé le sollicite aussi, le plus souvent. Et si la fonction g change de signe en un certain point, dont il est impossible d'avoir la valeur exacte, ce point réel est alors introduit dans le texte de l'exercice, fait l'objet d'une notation, et on demande d'en rechercher (par dichotomie) une valeur approchée. Très souvent, l'expression de la dérivée de f en fonction de g (notamment sous la forme : $f' = g.h$) est fournie par l'énoncé, ce qui permet à l'élève un contrôle de son travail en cours.

Il n'y a que fort peu de situations permettant ici d'envisager avec un peu plus de recul la méthode d'étude qui est en jeu. Ainsi, le cas simple où la dérivée de f est exactement égale à la fonction, dite auxiliaire, g (dont on peut étudier directement les variations et le signe) n'est guère exploité. Dans ce cas là, une exploration plus autonome venant de l'élève pourrait être travaillée à travers une suite d'exercices de niveau progressif, en systématisant l'idée du calcul des (deux ?) premières dérivées de la fonction f , idée qui permet de faire l'économie de celle d'une fonction auxiliaire (nécessairement plus difficile à gérer puisque cette fonction auxiliaire est différente pour chaque exercice). Il n'y a que deux exercices dans tout le manuel qui mettent en jeu la dérivée seconde d'une fonction pour étudier ses variations. Et on ne peut pas dire qu'il y a dans chacun des trois chapitres (6,7 et 8) où l'on trouve des études de variations utilisant une fonction auxiliaire, un travail technique répétitif, bien isolé et circonscrit, concernant cette question ; elle ne fait qu'apparaître, avec des variantes, au détour d'études de fonctions qui constituent l'enjeu véritable (et plus général) des exercices et problèmes proposés.

De même, l'idée, essentielle en Analyse, d'étudier la fonction différence de deux termes pour en déduire une inégalité entre ces termes sur un certain intervalle, ou d'étudier une fonction pour pouvoir en effectuer une majoration ou une minoration, n'est présente que très ponctuellement et n'est pas mise en relief au moyen d'un scénario adapté d'exercices successifs amenant l'élève à une autonomie progressive (comme c'était le cas, par exemple, des premiers exercices de familiarisation aux inégalités des accroissements finis, qui, eux, étaient bien centrés sur ce thème). Une question visant à faire réaliser par l'élève de tels encadrements selon cette idée, mais noyée dans une étude de fonction plus vaste, ne peut être comparée à un tel scénario, ici manquant.

Il est important d'observer aussi comment évoluent en terminale certains canevas de questions rencontrés dans les exercices du manuel de première et portant sur des notions n'ayant pas nécessairement trait à la dérivée. La conservation, la simplification ou la disparition en terminale de tels découpages et répétitions de séquences, typiques du manuel de première, peut en effet permettre d'affiner le panorama des enjeux véritables de la transition première/terminale, et ce faisant, de relativiser aussi la part d'évolution concernant spécifiquement la dérivée.

On peut constater ainsi que la part de modélisation, qui intervient dans les différents problèmes d'optimisation situés à la fin du chapitre de calcul différentiel, est beaucoup moins guidée que dans le manuel de première. Dans quatre problèmes sur sept, c'est à l'élève qu'incombe la charge d'introduire, d'évaluer et d'étudier la fonction modélisant la grandeur à optimiser, et même la variable du problème n'est pointée avec précision par l'énoncé (désignation, notation…) que dans deux de ces quatre problèmes. Le découpage habituellement rencontré dans le manuel de première (vérification d'une expression fournie par le texte pour la grandeur étudiée, calcul de dérivée, détermination des variations, étude de l'existence d'un extremum, calcul de la valeur de la fonction en ce point, …) a disparu, et le problème (de nature concrète) revêt à présent un aspect moins artificiel en se résumant à une seule question.

A l'inverse, on retrouve, concernant la détermination d'asymptotes obliques au sein de diverses études de fonctions, des séquences tout à fait similaires à celles rencontrées dans le manuel de première : mise sous forme canonique de l'expression de la fonction étudiée, visant à mettre en évidence l'équation de l'asymptote (à défaut de cela, sollicitation par le texte d'un calcul de limite), détermination de cette asymptote (son équation pouvant être, ou non, fournie par le texte), puis étude de la position relative courbe/asymptote. La seule évolution ici décelable réside dans le fait que les fonctions étudiées peuvent être d'un type nouveau (logarithmes/exponentielles), ce qui amène notamment une plus grande variété de formes canoniques utiles à l'identification d'asymptotes obliques que dans le cas des seules fractions rationnelles de première.

De même, les situations dans lesquelles interviennent des paramètres, bien que plus fréquentes que dans le manuel de première, font toujours l'objet de canevas de questions très directifs en terminale, que ces questions visent ou non un problème de dérivation.

Des séquences nouvelles accompagnent aussi la généralisation des études de fonctions en terminale. Il y a notamment celles concernant la détermination de la position relative (globalement) de courbes et de droites, de points d'intersection, avec à la clef résolution explicitement sollicitée d'équations et d'inéquations faisant intervenir des fonctions logarithmes et exponentielles. Dans le manuel de première S, il était surtout question de positions relatives locales, et exclusivement de celles de tangentes ou d'asymptotes par rapport à la courbe de la fonction étudiée. La recherche du nombre de solutions d'une équation du type f(x) = m ou f(x) = x+m selon *deux* méthodes différentes (graphique et algébrique) peut aussi être considérée comme une séquence nouvelle, à la fois du fait de sa fréquence (même si ce type de problème est un peu disséminé au sein de l'ouvrage de terminale), et de la mise en parallèle de la méthode graphique, déjà travaillée en première, avec une méthode de nature très différente, sans aide plus précise (l'énoncé demande seulement de *« retrouver le résultat algébriquement »*).

2°) Répartition quantitative et qualitative des réponses données par le texte.

On constate que la proportion de réponses explicites contenues à l'intérieur même des questions posées n'a guère évolué par rapport au manuel de première (21,47% contre 22,2% en première). Dans le même temps, la proportion de réponses implicites ou partielles a diminué plus sensiblement (elle est passée de 6,1% à 2,33%). Cette évolution est sans doute à rapprocher de l'augmentation des tâches de calcul pour lesquelles des réponses partielles ou implicites sont plus rares.

Dans le détail, on observe que la proportion de réponses fournies est très importante (82,5%) en ce qui concerne les majorations, minorations ou encadrements fonctionnels, qui peuvent parfois constituer la finalité de certains exercices (voir ceux relatifs à l'étude du sens de variation d'une fonction au sein de la rubrique *« Techniques de base »*) ou servir de relais indispensables à d'autres questions (interprétations graphiques, établissement d'une inégalité des accroissements finis, calcul de la limite d'une suite,... etc.).

Au sein d'un thème d'exercices et de problèmes tel que l'étude de suites récurrentes par la méthode du point fixe, 62,5% des réponses sont fournies, tandis que les exercices sur les équations différentielles, thème également neuf, comportent 22,05% de réponses explicites pour 8,37% de réponses partielles (chiffres se situant légèrement au-dessus de la moyenne présentée ci-dessus pour l'ensemble des questions analysées).

Parmi les fortes baisses par rapport aux résultats recensés pour le manuel de première S, notons qu'il n'y a plus que 8,2% des questions relatives à la dérivabilité en un point qui, dans leur libellé, suggèrent encore la réponse (contre 39,1% en première).

3°) Aides à la résolution se présentant sous la forme d'encarts méthodologiques.

Ces aides sont beaucoup moins développées que dans le manuel de première, du fait de la disparition de la rubrique « Savoir-faire », et on en rencontre donc essentiellement, au sein de chaque chapitre, dans les rubriques « Utilisations », qui sont centrées sur des exercices corrigés, et dont la nature et l'organisation du contenu n'ont pas varié.

Ainsi, les encarts méthodologiques qui se situent dans ces rubriques sont assez contextualisés, puisqu'ils se rapportent à des exercices bien précis, mais peuvent viser des situations plus générales, car ces exercices correspondent à des questions classiques : étude de la dérivabilité à gauche, à droite en un point et interprétation graphique du résultat obtenu, étude d'une fonction trigonométrique avec réduction préalable du domaine d'étude, justification de l'existence de primitives pour une fonction donnée, détermination de ces primitives ou d'une primitive particulière,... etc.

Cependant, la raréfaction de ce type d'aides à la résolution ne doit pas être minimisée ; elle correspond en effet à une évolution significative entre la classe de première et celle de terminale. Dans le manuel de première S, les petits exposés d'ordre méthodologique sont destinés à résumer l'essentiel des pratiques initiales et quotidiennes, afférentes à un concept nouveau, que l'élève doit maîtriser pour un premier apprentissage. Dans l'ouvrage de terminale S, force est de reconnaître que bien des notions nouvelles (dérivées successives, dérivée d'une fonction composée, inégalités des accroissements finis,... etc.) ne font même pas l'objet d'une rubrique « Utilisations », parce qu'ils s'inscrivent assez naturellement dans un champ de connaissances et de pratiques déjà installé. La notion de *« dérivées successives »* prolonge celle de *« fonction dérivée »*, comme la formule de la dérivée d'une fonction composée vient enrichir le panel des autres formules de dérivation. Les inégalités des accroissements finis prennent place au côté des premiers théorèmes sur la dérivation du cours de première, et sont même présentées comme une conséquence du théorème de monotonie à l'occasion de la rubrique d'exercices intitulée *« Démonstrations de cours »*.

En revanche, on voit que la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants (par exemple), problème qui porte vraiment sur un objet (les équations différentielles) nouveau et relatif à la dérivation, donne bien lieu à un encart méthodologique, tout comme la détermination pratique d'une solution particulière avec indications du texte. On rencontre aussi quelques encarts méthodologiques ailleurs que sous la rubrique *« Utilisations »*. Ils se situent essentiellement dans l'annexe de l'ouvrage intitulée « Fonctions et sens de variation » de la rubrique « Techniques de base », mais on en trouve également un, notamment, en tête de la liste de problèmes d'optimisation, sans doute pour compenser la difficulté de ces problèmes en l'absence de canevas de questions plus détaillé pour certains d'entre eux. Il faut toutefois souligner le caractère très général de cet encart, déjà présent dans le manuel de première.

4°) Des aides à la résolution plus ponctuelles et variables.

Nous avons dit plus haut que l'étude de la dérivabilité en un point ne fait plus guère l'objet de canevas directifs et répétitifs de questions, comme c'était le cas dans le manuel de première. Cependant, on rencontre parfois pour ce type de tâches, lorsque la situation à étudier comporte un certain degré de technicité (dû, par exemple, à la mise en jeu de fonctions logarithmes ou exponentielles) pour le calcul de limites, des aides plus locales, bien adaptées au problème posé.

Ainsi, dans l'exercice n°29 page 215, où l'on demande d'étudier la continuité et la dérivabilité en zéro de la fonction g définie par : $g(x) = (1-e^{-x}).\ln(x)$ pour $x \in]0,1]$ et $g(0) = 0$, l'énoncé sollicite d'abord le calcul de la limite en 0 de $(e^{-x}-1)/-x$, et rappelle que la quantité $x.\ln(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, ce qui permet à l'élève d'identifier plus aisément certains termes en vue des calculs de limites qui sont nécessaires. De même, dans l'exercice n°75 page 224, l'étude de la dérivabilité en zéro de la fonction f définie sur R_+ par : $f(x) = e^{u(x)}$ si $x \in]0,+\infty[$ et $f(0) = 0$, avec $u(x) = \ln(x)/x$, est précédée d'une question aidant à la résolution du problème : « *Montrer que l'on a : $f(x)/x = e^{(1/x-1).\ln(x)}$, pour tout x strictement positif* ».

Il s'agit là d'aides spécifiques dans le contexte de l'apprentissage récent des fonctions logarithmes et exponentielles, mais on trouve aussi dans d'autres exercices des aides pour l'étude de la dérivabilité en un point qui trouvent leur source dans une raison différente. Ce peut être par exemple la nécessité d'une discussion selon un paramètre donné ; ainsi en est-il de l'étude en 0 de la dérivabilité de la fonction $x \to x^{\alpha}$ selon la valeur de α (exercice 58 page 220), où l'expression du taux d'accroissement en 0 est rappelée et la discussion orientée par le texte.

Plus ponctuellement, les aides apportées peuvent être présentes pour des raisons de nature conceptuelle et non plus seulement technique. C'est notamment le cas dans l'exercice n°8 de la page 153, où il est question de la fonction f, paramétrée et périodique, de période 2, définie par : $f(x) = x^3+ax^2+bx$ sur l'intervalle $[-1,1[$, pour laquelle on cherche les valeurs des paramètres a et b telles que f soit continue (resp. dérivable) en tout point réel. Un tel exercice comporte (au moins) deux difficultés principales, bien que l'expression polynomiale fournie, valable sur $[-1,1[$, n'engendre justement aucune difficulté d'ordre technique.

La première difficulté provient de ce que la fonction f est définie seulement de façon implicite en dehors de $[-1,1[$, et la confusion entre f et une fonction polynôme est facile, vu le caractère très inhabituel de ce type d'exercice. Il est nécessaire de dépasser cette confusion, ne serait-ce que pour comprendre le problème posé, qui se réduit à celui de la continuité et de la dérivabilité en tout point d'abscisse 2p+1, p étant un nombre entier. La seconde difficulté, qui porte véritablement cette fois sur la dérivation, est due au fait que l'explicitation d'une condition du type « égalité des limites (finies) à gauche et à droite en 1 pour la fonction dérivée » n'est équivalente à la dérivabilité en 1 que si l'on sait déjà que f est continue en 1 (conséquence du théorème des accroissements finis). L'énoncé fournit ici deux indications, assez implicites elles aussi, destinées à aider les élèves à contourner ces deux obstacles sans toutefois leur livrer les clefs de cet exercice.

29 ★★ g est la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = (1 - e^{-x}) \ln x, & \text{si } x \in]0\,;\,1] \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

1° Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - 1}{-x}$.

2° Montrer alors que g est continue en 0.
(On rappelle que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$.)

3° Étudier la dérivabilité de g en 0.

215

8 ★ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x+2) = f(x)$ pour tout x réel ;
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ pour tout $x \in [-1\,;\,1[$.

1° Calculer $f(1)$. À quelle condition la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2° On suppose la condition du 1° réalisée ; déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercices

6. Fonctions puissances et fonctions exponentielles de base a

58 ★ On rappelle que, si $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité en 0.
On veut étudier la dérivabilité en 0 de la fonction g_α, prolongement par continuité de f_α en 0.

1° Que vaut $g_\alpha(0)$?

2° Exprimer simplement $T_\alpha(x) = \dfrac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x}$, pour $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

3° a) Déterminer, en distinguant les cas $\alpha > 1$ et $0 < \alpha < 1$, la limite, lorsque x tend vers 0, de $T_\alpha(x)$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

c) Dans quels cas la fonction g_α est-elle dérivable en 0 ?

75 ★★ **A.** Soit la fonction u définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

1° Étudier le comportement de u aux bornes de son ensemble de définition.

2° Établir les variations de u sur $]0\,;\,+\infty[$.

B. Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{u(x)}, & \text{si } x \in]0\,;\,+\infty[\\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1° Montrer que f est continue en 0.

2° Montrer que, pour tout x strictement positif, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = e^{\left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln x}$$

et montrer que f est dérivable en 0.
Préciser la demi-tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentant f au point d'abscisse 0.

3° Étudier le comportement de f en $+\infty$; en déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

8 - FONCTIONS EXPONENTIELLE ET PUISSANCE

En leur demandant de calculer f(1) avant d'étudier la continuité de f, il met en relief le fond du problème posé en attirant leur attention sur un calcul d'image apparemment anecdotique. En supposant, pour l'étude de la dérivabilité en 1, que *« la condition de continuité en 1 déjà trouvée en première question est réalisée »*, l'énoncé tente de prévenir l'omission éventuelle de l'équation entre a et b résultant de cette condition de continuité (cette omission peut être volontaire de la part de l'élève sous le prétexte que *« toute fonction dérivable en un point est continue en ce point »*). Cependant, la raison véritable de la nécessité de cette condition reste ici forcément inaccessible à l'élève.

Les études de fonctions trigonométriques dépendant, par exemple, de l'utilisation de formules de transformation d'un produit de cosinus ou de sinus en somme, ou de celles de cos(a+b) ou sin(a+b), font l'objet d'indications du texte, voire de rappels du cours de première (cf. exercices n°39 page 156, et n°71 page 222).

39 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\sin\left(\frac{1}{2}x\right).$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthogonal du plan.

1° Transformer l'expression de f en une somme, ou une différence, de deux cosinus.

Par la suite, on utilisera l'une ou l'autre des deux expressions.

2° Montrer que l'on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0\,;\pi]$.

71 ★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}\sin x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, où l'unité graphique est de 2 cm sur (Ox) et de 10 cm sur (Oy).

1° a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sqrt{2}\,e^{-x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

On rappelle que, pour tous réels a et b, on a :

$$\cos a\cos b - \sin a\sin b = \cos(a+b).$$

De même, lorsqu'un calcul de fonction dérivée s'annonce comme étant un peu délicat, et qu'une factorisation est nécessaire à l'étude de son signe, l'énoncé peut fournir l'expression factorisée de cette dérivée ou demander d'établir que la dérivée a même signe que telle expression beaucoup plus simple, dont le signe se détermine aisément de manière algébrique.

Il y a bien sûr beaucoup d'aides très locales dans les divers énoncés des chapitres 6, 7 et 8, aides ayant trait ou non à la dérivée (rappels de limites usuelles pour des nouvelles fonctions : x.ln(x) en 0^+, (ln(1+h))/h en 0, etc., transformations sollicitées d'expressions comportant des valeurs absolues, interprétations graphiques suggérées d'équations cartésiennes,... etc.), mais on ne peut pas, bien sûr, les citer toutes ici. Notons encore, cependant, que la détermination de primitives, dont l'apprentissage s'étale sur quatre chapitres au moins (6-Calcul différentiel, 7-Fonctions logarithmes, 8-Fonctions exponentielles et 10-Calcul intégral), fait l'objet d'aides de natures diverses dans les exercices de chacun de ces chapitres, et parfois graduelles. Ainsi, les primitives de u'√u, où u est une fonction, font l'objet d'un exercice (n°62 page 159) d'initiation très guidé dans le chapitre 6 : on demande à l'élève de dériver u√u, puis d'en déduire les primitives de u'√u ; il s'ensuit quatre exemples d'application. De même, dans le chapitre 8, un scénario un peu différent (cf. exercice 37 page 216) permet de s'habituer très progressivement à identifier une fonction de la forme u'/u, afin d'en déduire ses primitives : on rappelle qu'une fonction de cette forme a des primitives connues, et un exemple est donné.

62 Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

1° Quelle est la dérivée sur I de la fonction $u\sqrt{u}$?

2° En déduire les primitives sur I de la fonction $u'\sqrt{u}$.

3° **Application.** Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 2\sqrt{2x+3}$, $I = \left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$;

b) $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$, $I =]-\infty ; 1[$;

c) $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$;

d) $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x^2-2x+1}$, $I =]1 ; +\infty[$.

6 - CALCUL DIFFÉRENTIEL

37 Même exercice, avec $I = \mathbb{R}$.

a) $f : x \mapsto (-2x+3)\, e^{-x^2+3x-1}$;

b) $f : x \mapsto 3x\, e^{x^2-1}$;

c) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{3e^x+2}$.

Indication :
Considérer la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 3e^x + 2.$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $u'(x) = 3e^x$.

Ainsi, on peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Si u est une fonction dérivable ne s'annulant pas sur un intervalle I, on sait (chapitre 7) déterminer les primitives sur I de $\dfrac{u'}{u}$.

Enfin, au moment où est étudié le chapitre 10 de calcul intégral, la reconnaissance de telles formes semble censée être déjà bien installée et les aides à la résolution visent alors autre chose ; ainsi, l'objectif de l'exercice 12 page 278 est le calcul d'intégrales de fonctions du type : $f(x) = \cos^n x.\sin^p x$ avec n ou p impair, et l'aide porte cette fois sur l'idée de la transformation préalable d'une telle fonction en une fonction de la forme $g(x) = \cos(x).\sin^q x$ ou $h(x) = \sin(x).\cos^q x$. Il n'y a pas d'autre aide dans cet exercice et c'est donc à l'élève d'identifier seul la forme $u'(x).u^q(x)$ (au signe près !) pour achever l'intégration.

12 ★ L'objectif est le calcul d'intégrales de la forme :

$$\int_a^b \cos^n x \sin^p x,$$

avec n et p entiers naturels, n ou p impair.

1° Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x \sin^4 x \, dx$.

a) En écrivant $\cos^3 x = \cos x\,(\cos^2 x)$, montrer que $\cos^3 x \sin^4 x$ est la somme de termes de la forme $\cos x \times \sin^k x$, avec k entier naturel.

b) En déduire le calcul de I.

Nous terminons notre panorama de ces aides circonstancielles, en mentionnant quelques exercices atypiques et délicats du chapitre 6 de calcul différentiel, qui portent sur un contenu de niveau première S.

Assez peu aidés et directifs, ils peuvent donc être susceptibles de nous dévoiler, ici et là, quelques évolutions qualitatives significatives qu'il est possible d'observer sur des notions anciennes liées à la dérivée, entre les classes de première et terminale. Leur nombre demeure cependant trop faible pour que nous puissions vraiment tirer des conclusions générales de leur présence dans ce manuel.

Il y a tout d'abord l'exercice n°14 de la page 153, qui se propose d'établir pour la parabole d'équation $Y=X^2$, une propriété géométrique classique des paraboles : la corde entre deux points A et B (d'abscisses respectives a et b) d'une parabole est parallèle à la tangente à cette parabole au point C d'abscisse médiane (a+b)/2. L'énoncé se compose de deux questions :

1) Montrer l'égalité : f(b)-f(a) = (b-a). f '((a+b)/2) pour tous réels a et b.
2) En donner une interprétation géométrique.

Cet exercice était déjà présent dans le manuel de première, mais une représentation graphique illustrant la propriété en question était alors fournie, et l'interprétation géométrique aussi ; on demandait donc seulement de la justifier. Ici, l'élève garde à sa charge, outre l'interprétation des termes (f(b)-f(a))/(b-a) et f '((a+b)/2), la visualisation du phénomène et la verbalisation de ce qu'il observe.

L'exercice n°21 de la page 154 demande à l'élève d'établir qu'une fonction dérivable en un point a est telle que le rapport (f(a+h)-f(a-h))/(2h) admet une limite finie pour h tendant vers 0, mais que la réciproque est fausse (il fournit le contre-exemple : la fonction $x \to |x|$, sans donner la valeur de a qu'il faut considérer). Cet exercice tire son originalité, au sein de l'environnement étudié, du travail assez fin (et non guidé) sur la forme des taux d'accroissement acceptables dans l'expression d'un nombre dérivé, et en même temps, de la considération de la réciproque et d'un contre-exemple pour une propriété donnée. L'élève doit ici formuler et envisager lui-même cette réciproque, avant d'établir sa fausseté à l'aide du contre-exemple, ce qui n'est pas une démarche familière dans l'esprit des exercices proposés par ailleurs.

L'exercice n°28 de la page 155 demande, *sans aucune aide*, d'établir qu'une fonction f impaire et dérivable sur R admet une courbe représentative nécessairement traversée à l'origine par sa tangente. Il y a donc là tout un travail de formalisation et d'interprétation du problème qui est à la charge de l'élève : écrire soi-même l'équation de la tangente en 0, et la simplifier dans le cas d'une fonction impaire (penser que f(0)=0), traduire mathématiquement la propriété graphique à établir, en terme de changement de signe en 0 d'une certaine quantité, savoir quelle est cette quantité. Voilà un exercice qui se démarque assez nettement de ceux rencontrés dans le manuel de première, pour lesquels nous avons vu que les changements de cadres font en général l'objet de guidages assez précis. Il demeure cependant assez exceptionnel dans l'environnement du manuel de terminale.

D/ CLASSIFICATION PAR TYPES D'OBJETS. STATUTS « OBJET » ET « OUTIL ».

1°) Répartition en statuts objet / outil, explicite / implicite.

La répartition selon ces quatre modalités d'intervention reste très semblable à ce qu'elle était en classe de première S, avec une légère progression du statut « objet explicite » dont la part passe à 19,7% (contre 14,64% dans le manuel de première), le statut « outil implicite » demeurant très majoritaire (part de 70,6% contre 75,5% en première). Les deux autres statuts restent sous représentés avec une part de 8,7% pour le statut « outil explicite » et de 1% pour le statut « objet implicite ».

La légère poussée du statut « objet explicite » s'explique par une familiarité, désormais plus importante en classe de terminale, à cette notion de dérivée vue en tant qu'*objet* pouvant se situer au cœur de nouveaux types de problèmes. Il s'agit surtout en l'occurrence de l'étude d'équations différentielles, mais l'évolution constatée ne se répercute pas à un niveau *qualitatif* : il n'y a pas un travail conséquent d'approfondissement au niveau de l'objet dérivée, puisque la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants constitue ici le principal enjeu et elle se traite à l'aide d'algorithmes.

Parmi les « outils implicites » apparaissant en classe de terminale, la notion de primitive, vue en tant qu'*outil* de calcul d'intégrales, occupe une place privilégiée, alors que cette notion est très peu mise en valeur en tant qu'objet[1]. Des notions telles que celle de fonction dérivée ou des théorèmes comme le théorème de monotonie, déjà au centre du travail réalisé en classe de première S, comptent encore parmi les principaux « outils implicites » intervenant dans les pratiques au niveau de la classe de terminale S.

2°) Types d'objets en jeu, relations entre eux, rapports au savoir en découlant.

a) Continuité, dérivabilité, nombre dérivé.

L'intérêt des exercices qui ont trait à la notion de nombre dérivé se déplace (par rapport à la classe de première S) vers l'étude de la dérivabilité d'une fonction en un point « problématique », avec des situations de non dérivabilité en un point aussi plus nombreuses.

Cependant, il faut nuancer cette remarque, à la fois sur un plan quantitatif et qualitatif, par deux autres éléments d'observation. D'une part, les situations faisant l'objet d'une étude locale de ce type ne sont pas travaillées autant dans les *problèmes généraux* (par exemple, les études de fonctions) que dans les exercices portant sur des *thèmes spécifiques*. D'autre part, les cas de non dérivabilité étudiés sont presque exclusivement fournis par des fonctions *irrationnelles* ou comportant des *valeurs absolues* et d'expressions très simples[2]. En revanche, les situations de non dérivabilité en un point liées à ces deux types de fonctions sont bien exploitées à divers niveaux : travail *d'interprétation* des résultats algébriques au niveau graphique, *lectures graphiques* de pentes en vue de corroborer un résultat algébrique ou de déterminer si la fonction associée est dérivable ou non, et quelles sont les valeurs éventuelles des nombres dérivés (à gauche, à droite au point). En fait, il n'y a pas d'étude locale de fonctions « pathologiques », dérivables ou non, telles que $x \to x\sin(1/x)$ ou $x \to x^2\sin(1/x)$ prolongées par continuité en zéro, ni de situations où les limites de $(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$ et de $f'(x)$ en x_0 sont distinctes. Même des cas plus simples d'études locales de fonctions qui sont des composées de $x \to |x|$ ou $x \to \sqrt{x}$ et d'une fonction non polynomiale (par exemple :

[1] C'est, par exemple, le cas dans un exercice-question de cours qui pose le problème du lien entre le signe d'une fonction f continue sur un intervalle I et les variations d'une primitive F de f sur I, ou au sein d'un exercice qui demande de déterminer, pour diverses fonctions, la primitive s'annulant en tel ou tel point d'un intervalle donné.
[2] De la forme $x \to |P(x)|$ ou $x \to \sqrt{P(x)}$, P désignant une fonction polynomiale de degré 1 ou 2.

$x \to e^{|x|}$, $x \to \sin(\sqrt{x})$,... etc. en zéro) sont pratiquement absents de cet environnement d'exercices.

Il n'y a que *trois* exercices mettant en jeu des paramètres pour une étude locale de continuité / dérivabilité en un point. Il s'agit de fonctions qui sont définies par des expressions algébriques simples, de nature polynômiale, distinctes de part et d'autre de ce point, ou de la fonction $x \to x^\alpha$ en 0 (exercice n°58 page 220). Il n'y a donc pas de *cumul* des difficultés, puisque les rares études locales de continuité / dérivabilité concernant des fonctions logarithmes et exponentielles ne comportent pas de paramètres.

On ne rencontre guère d'exercices de nature *générale* permettant de problématiser la notion de nombre dérivé ou de lui donner un enjeu théorique particulier. Citons cependant l'exercice n°21 page 154 qui porte sur les liens entre dérivabilité en un point et existence d'un nombre dérivé symétrique en ce point. Encore convient-il de noter que cet exercice n'est pas posé sous forme « ouverte » ; on fournit les réponses et le contre-exemple, ce qui « tue dans l'œuf » toute mise en perspective ou problématisation de la situation, la spécificité du terme (f(a+h)-f(a-h)) / 2h n'étant pas soulignée et l'expression de « dérivée symétrique » même pas citée :

21 ★ 1° Soit une fonction dérivable en $x = a$; démontrer que le rapport :

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

a une limite finie quand h tend vers 0.

2° Démontrer que la réciproque n'est pas vraie (on pourra considérer la fonction $f : x \mapsto |x|$).

Un autre exercice (n°16 page 153) utilise comme ressort la caractérisation par les nombres dérivés successifs du fait qu'un réel α est racine d'ordre k d'un certain polynôme P, mais on reste au niveau d'un cas particulier. Il n'y a pas de tentative de généralisation (même admise, même partielle, portant sur la racine α et non l'ordre k) :

16 Soit le polynôme :

$$P(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c,$$

avec a, b et c réels.

1° Déterminer a, b et c pour que l'on ait :

$$P(2) = P'(2) = P''(2) = 0.$$

2° Montrer que le polynôme $P(x)$ se factorise alors par $(x-2)^3$. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Enfin, il est important de rappeler l'absence *quasi totale* dans cet environnement d'exercices de la notion de dérivabilité en un point par approximation affine : on ne la retrouve qu'au sein d'un seul exercice issu de la rubrique « Démonstrations de cours » qui sollicite une démonstration de la formule de dérivation d'une fonction composée à l'aide de cette définition. Cette absence tend à limiter toute forme de réflexion sur *les* définitions (équivalentes) de la dérivabilité en un point, donc aussi sur le nombre dérivé vu en tant qu'*objet*. Une conséquence est aussi que la notion de développement limité d'ordre n, vue en DEUG A, n'est plus préparée en terminale S.

b) Equations de tangentes, position relative courbe / tangente.

Comme dans le manuel de première S, le travail sollicité intègre bien les deux aspects *algébrique* et *graphique*, les mettent souvent en parallèle. L'étude de la position relative courbe / tangente est sollicitée ici ou là, mais ne prend cependant aucun caractère systématique. Diverses méthodes utiles à la réalisation de ce type d'étude pourraient ici être dégagées du questionnement, parfois assez directif, qui est proposé : résolutions algébriques d'inéquations, étude de la fonction différence $\varphi(x) = f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)$ par dérivations successives, utilisation des inégalités des accroissements finis. Cependant, ne faisant l'objet ni d'un emploi répété, ni d'un point méthode au sein d'une rubrique « Utilisations », elles semblent ainsi condamnées à un usage purement local, constituant le ressort du questionnement de l'exercice concerné sans être vraiment accessibles à l'élève.

5° φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$\varphi(x) = f(x) - 2x - 2 .$$
a) Justifier que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Étudier le signe de φ'' sur $\mathbb{R}$ et en déduire les variations de φ' sur $\mathbb{R}$.
c) Déterminer le signe de φ' sur $\mathbb{R}$, en déduire les variations, puis le signe de φ .
d) Déduire de cette étude la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T .

Extrait de l'exercice n°53 page 219

Il y a même un TP (pages 147 et 148) qui fait étudier dans des cas généraux la position relative courbe/ tangente entre les points d'abscisses a-h et a+h (h>0), suivant le sens de variation de la dérivée de la fonction sur les intervalles [a-h,a] et [a,a+h], par étude de la fonction différence[3]. Mais les résultats obtenus (hors programme) ne sont utilisés pour traiter des cas particuliers qu'au sein de ce seul TP. Il est donc assez douteux que les étudiants, dans leur ensemble, retiennent de tels résultats jamais réemployés.

c) Dérivabilité et calculs de limites.

Il y a davantage de calculs de limites s'effectuant par reconnaissance d'un taux d'accroissement que dans le manuel de première S, notamment du fait de l'étude des nouvelles fonctions, logarithmes et exponentielles, en terminale S, mais surtout, semble-t-il, parce que la notion de nombre dérivé a déjà été installée (en classe de première) au moment où l'on étudie le chapitre « Continuité et limites » en terminale.

Cependant, de tels types de calculs, très dirigés dans l'ensemble, apparaissent là encore surtout au niveau des exercices portant spécifiquement sur ce thème et peu au sein de problèmes de synthèse. Il n'y a donc pas une réelle autonomie qui est travaillée et sollicitée au niveau du lycée vis à vis de ce type de pratique.

[3] Les termes de convexité, concavité, point d'inflexion sont même cités au sein du TP.

10 ★ À l'aide des nombres dérivés en a de fonctions bien choisies, déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{6x-\pi}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x-1}$; d) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x + 1}{x-\pi}$.

Exercice n°10 page 126 (chapitre « Limites et Continuité ») : un guidage très précis.

En outre, il convient de noter que bon nombre de calculs de limites proposés ici consistent simplement dans des transformations algébriques ad hoc visant à se ramener à des résultats usuels tels que $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$, $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)/x = 1$, qui vont finir par être, à force, simplement mémorisés et non plus vus comme les valeurs de nombres dérivés particuliers.

25 ★ Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin \dfrac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$; c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, avec a et b réels non nuls.

Exercice n°25 page 128 (chapitre « Limites et Continuité ») : autour de $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x$.

d) Vitesse et accélération instantanées.

Les exercices proposés sur ce thème ne sont guère plus nombreux que dans le manuel de première S. Ils sont cependant un peu plus variés, tant au niveau des *thèmes* abordés (mouvement rectiligne, champ de pesanteur, problème de ressort, d'intensité électrique,... etc.) et des *types de fonctions* mises en jeu (pas uniquement polynomiales, il y a aussi des fonctions trigonométriques, affines par morceaux, des fractions rationnelles), qu'au niveau des *démarches* sollicitées.

La notion de primitive étant au programme de terminale, ici cela permet aussi de résoudre des problèmes du type : *« Détermination de la loi du mouvement à partir de l'accélération instantanée et de conditions initiales données »*, alors que dans le manuel de première S, il n'y avait que des exercices du style : *« Détermination de la vitesse instantanée par dérivation de l'expression de la loi du mouvement »*. Les nouvelles tâches proposées correspondent ainsi davantage au travail réel que l'on doit réaliser en cinématique ou en mécanique du point, où la connaissance de l'accélération instantanée précède celle de la vitesse et du déplacement, et non pas le contraire.

La vitesse en tant que *grandeur vectorielle* n'est, comme dans le manuel de première S, pas introduite, de même qu'une notion telle que celle de vitesse instantanée de rotation. Il n'y a, par ailleurs, aucune tentative particulière dans ces exercices pour *problématiser* le concept de vitesse instantanée.

e) Fonctions dérivées et dérivées successives.

S'il est vrai que la notion de fonction dérivée est souvent mise en jeu ici dans sa dimension « *objet* », c'est presque uniquement au sein de tâches de calcul formel. On ne peut donc affirmer que cette dimension est davantage travaillée qu'au sein du manuel de première S. Elle l'est moins encore, sans doute parce que le premier rapport à la dérivée est dépassé[4] et aussi car le travail s'infléchit nettement vers les *applications*. De nouvelles tâches apparaissent d'ailleurs, comme celle consistant à trouver une équation différentielle satisfaite par une fonction usuelle donnée, mais elles ne sont pas propres à un approfondissement réel au niveau « objet ». C'est surtout le réinvestissement des formules générales de dérivation dans le contexte de fonctions nouvelles (logarithmes et exponentielles) et/ou d'une difficulté technique un peu plus élevée qu'en première S qui est au cœur des pratiques standards.

Concernant la notion de dérivées successives, les exercices portent presque tous, là encore, sur la dérivation formelle d'expressions, *à plusieurs reprises*, mais la détermination de la *dérivée n-ième* d'une fonction (cas général) n'est quasiment jamais demandée. L'exercice n°19 page 154 fait exception, mais il concerne une fonction particulièrement simple ($x \to 1/x$), la formule de $f^{(n)}$ est fournie, et l'idée de réaliser un raisonnement par récurrence, suggérée. Il n'y a donc aucun travail d'entraînement spécifique à ce niveau là, ce qui s'explique bien par l'absence de situations (au programme de terminale S) dans lesquelles la notion de dérivées successives peut jouer un rôle (points d'inflexion, formule de Taylor,... etc.). C'est donc, semble-t-il, juste un premier contact avec cette notion qui constitue l'enjeu des exercices de ce manuel.

f) Variations, extrema, études de fonctions, optimisation.

L'évolution des exercices et des exigences relatifs à ces thèmes reste assez ténue et modérée dans la transition entre les classes de première et de terminale S. Il y a là, principalement, un travail de reprise de notions et de théorèmes anciens en vue d'étudier des fonctions d'un type nouveau (logarithmes, exponentielles ou puissances). L'introduction de ces fonctions en terminale induit, certes, des *spécificités nouvelles* au niveau du travail technique, parfois plus délicat, qui est à produire pour déterminer le signe d'une expression sur un intervalle ou calculer une limite. Cela a des conséquences, en particulier, sur l'étude des variations, la recherche d'asymptotes, ainsi que la détermination de la position relative entre deux courbes ou entre une courbe et une droite. Concernant l'établissement d'inégalités fonctionnelles par exemple, le travail de majoration *algébrique*, bien adapté dans le cas de fonctions rationnelles et irrationnelles, garde ici une place centrale. Mais il se trouve complété par deux autres modes d'investigation, qui ont une efficacité dans certaines situations mettant en jeu (notamment) des fonctions logarithmes et exponentielles : l'étude d'une fonction différence, au besoin par dérivations successives, et l'application des inégalités des accroissements finis. Cependant, comme vu plus haut, ces modes de prospection sont généralement suggérés par l'énoncé, et guidés au niveau de leur mise en application.

[4] Il n'y a plus qu'un seul exercice dans la rubrique « Démonstrations de cours » qui soit centré sur la notion de fonction dérivée en tant qu'objet : il s'agit d'établir la formule de dérivation d'une fonction composée, la preuve des autres formules de dérivation ayant déjà été sollicitée dans le manuel de première S (même rubrique).

Par ailleurs, on peut remarquer qu'il n'y a pas davantage d'exercices sollicitant une réflexion sur les notions et les théorèmes utilisés, dans ce manuel ci que dans celui de première. Les extremas se repèrent « à l'œil » sur le tableau de variations davantage qu'en appliquant une véritable technologie. Le caractère nécessaire de l'hypothèse sur le *changement de signe* de la dérivée (et non pas seulement son annulation) dans le théorème d'existence d'un extremum est ainsi toujours peu mise en relief dans cet environnement. Il en va de même du caractère non nécessaire de la stricte positivité de la dérivée d'une fonction sur un intervalle pour que cette fonction soit strictement croissante sur cet intervalle. Quelques aspects géométriques (notamment en lien avec les transformations complexes) et graphiques sont cependant mis en valeur dans cet environnement. Par exemple, en annexe de cet ouvrage, on trouve des exercices de détermination du sens de variation ou du tracé de fonctions telles que 1/f, f^2, 1/f, $x \to kf(x-\alpha)+\beta$, à partir du tracé ou des variations de la fonction f. Inversement, on peut demander également de déterminer l'expression analytique d'une fonction à partir de la donnée du tracé de sa courbe représentative.

Au niveau des problèmes d'optimisation, auxquels les élèves sont censés s'être en partie familiarisés l'année précédente, l'évolution porte sur le fait que le travail de *modélisation* est moins aidé que dans le manuel de première S. Certains de ces problèmes, au sein desquels cet aspect « modélisation » se réduit à très peu de choses et le résultat de ce travail de modélisation est fourni par l'énoncé, semblent cependant servir un peu « d'alibi » à une étude de fonction en bonne et due forme. Par ailleurs, il faut noter que les types de fonctions investies dans les problèmes d'optimisation étaient déjà tous au programme de première S.

g) Théorèmes sur les bijections et les équations.

Ces théorèmes[5] sont à présent assujettis, en dehors de l'hypothèse de stricte monotonie sur la fonction considérée, à une hypothèse de continuité, qui se substitue désormais à l'hypothèse de dérivabilité présente dans les énoncés similaires du manuel de première S. Cette modification qui paraît essentielle (sur un plan *conceptuel*) n'est peut-être pas ressentie comme telle par les élèves, si l'on considère l'usage qu'ils ont à faire de ces théorèmes. En effet, la nature des tâches à accomplir n'a pas changé (il s'agit d'applications « directes » dans le cas de fonctions usuelles *particulières*) et il leur suffit de remplacer un « mot » par un autre dans les explications qu'ils vont donner, en justifiant la continuité de la fonction considérée par sa dérivabilité[6].

S'il est exact que le champ d'application de ces théorèmes[7] a été étendu (outre l'hypothèse de continuité, on considère désormais un intervalle I quelconque de R et non plus nécessairement du type [a,b]), il n'en reste pas moins que ces énoncés visent encore uniquement l'opérationalité (l'énoncé sur les équations est d'ailleurs présenté comme une *méthode* de résolution approchée de l'équation : $f(x) = \lambda$). L'hypothèse de continuité, « naturellement » liée (contrairement à la dérivabilité) à l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = \lambda$, reste

[5] Qui fournissent des conditions *suffisantes*, respectivement pour qu'une application f soit bijective de l'intervalle I sur l'intervalle f(I) et pour que l'équation $f(x)=\lambda$, possède une unique solution sur I.
[6] Application du théorème selon lequel : « Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en ce point x_0 ». De toutes façons, les fonctions considérées sont toutes de classe C^∞ là où elles sont définies.
[7] Figurant désormais au sein du chapitre « Limites et continuité ».

en revanche sans grand rapport avec le caractère bijectif de l'application f : I→ f(I), dès lors que l'on n'impose pas à f(I) d'être un intervalle de R.

Pas plus que dans le manuel de première, on ne trouve dans cet environnement, des exercices sollicitant une réflexion sur le caractère nécessaire ou simplement suffisant des conditions d'application annoncées, ce qui favorise, selon nous, l'amalgame entre applications bijectives et applications continues strictement monotones. Les zéros d'une fonction se repèrent surtout, en réalité, par lecture du tableau des variations, dès lors que le « fléchage » permet de relier deux valeurs réelles de signes opposés. On peut penser cependant qu'une perception intuitive du phénomène de continuité permet aux élèves, en terminale, de donner davantage de sens à ce procédé.

h) Inégalités des accroissements finis.

Les inégalités des accroissements finis font l'objet d'exercices d'application directe, souvent très dirigés, concernant des fonctions usuelles d'expression assez simple ($x \to (x+2)^{1/2}$, $x \to 1/(1+x)$, $x \to \sin(x)+\cos(x)$, etc.). Les éclairages graphiques et numériques (interprétation d'encadrements, calcul approchés,... etc.) sont bien présents au sein des exercices proposés.

Cependant, ce thème reste assez peu exploité au niveau des problèmes généraux d'études de fonctions, sauf dans un contexte bien particulier, celui de l'étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1}= f(u_n)$ par la méthode du *« point fixe »* faisant suite à l'étude de la fonction f. On reste donc dans un rapport initial aux inégalités des accroissements finis qui se caractérise par des exigences bien cernées et limitées. Les seules situations *générales* qui sont abordées correspondent au cas où l'on considère une fonction f dérivable sur un intervalle I, dont la dérivée est comprise sur I entre deux valeurs réelles données ; il faut en déduire un encadrement de f sur I. Autrement dit, il s'agit d'un type d'exercice nécessitant moins de travail que dans le cas d'une fonction particulière (pour laquelle un encadrement de la dérivée sera *sollicité* et non pas donné comme *hypothèse*).

L'utilisation des inégalités des accroissements finis pour l'étude de la position relative entre courbe et tangente peut être sollicitée ponctuellement dans un exercice, mais la forme du questionnement n'appelle pas à tirer une morale générale de la situation particulière qui est étudiée.

La démonstration des inégalités des accroissements finis qui est sollicitée dans la rubrique « Démonstrations de cours », par utilisation du théorème de monotonie, semble assez « décalée » dans cet environnement d'exercices, et paraît également bien artificielle puisque le théorème de monotonie n'a jamais, lui, été établi[8].

[8] Et pour cause : on peut par exemple le voir comme une conséquence du théorème des accroissements finis (qui lui-même implique les inégalités du même nom), mais quelle que soit la voie choisie sa démonstration dépasse largement les objectifs des programmes du lycée.

i) Intégration et équations différentielles.

Le chapitre de calcul intégral de ce manuel est sans doute, de tous les chapitres d'Analyse du programme de terminale S, celui qui recouvre *le plus d'enjeux d'apprentissage* nouveaux, avec une grande variété d'exercices. La raison en est simple : le thème, par lui-même, est encore inexploré avant ce niveau de classe, et il est travaillé notamment sur des fonctions logarithmes et exponentielles qui étaient également encore inconnues jusqu'alors. D'autres chapitres, tels que « Calcul différentiel », « Fonctions logarithmes » ou « Suites numériques » ne possèdent pas cette caractéristique.

Le calcul d'intégrales par recherche directe d'une primitive, par linéarisation (cas des polynômes trigonométriques) ou par la méthode d'intégration par parties (explicitement sollicitée à chaque fois qu'elle est nécessaire) occupent une place centrale dans cet environnement. Mais les majorations et les minorations, le calcul de valeurs approchées d'intégrales, l'inégalité de la moyenne et le calcul de valeurs moyennes d'une fonction, l'étude de suites d'intégrales, le calcul d'aires et de volumes sont aussi travaillés à travers de nombreux exercices. Dès lors, devant l'afflux de connaissances et de savoir-faire requis, il est beaucoup moins étonnant ici (que dans d'autres chapitres) que la dimension « objet » soit peu mise en valeur par rapport à la dimension « outil ».

Des techniques algébriques telles que la décomposition d'une fraction (dans des cas élémentaires « *non théorisables* »), ou la considération de la somme et de la différence de deux intégrales pour les calculer[9], sont bien mises en valeur et toujours suggérées aux élèves dans ces exercices.

Comme dans d'autres chapitres, certains thèmes restent ici *en pointillés*, à peine effleurés au sein d'exercices « étoilés » de fin de chapitre, et ne font pas l'objet d'une institutionnalisation au niveau du cours. C'est le cas de l'étude d'une fonction définie par une intégrale (cas où les variations d'une telle fonction sont lisibles sur son expression sans que l'on ait besoin de dériver[10]) ou de l'étude d'une suite s'écrivant sous la forme d'une somme (comparaison avec les rectangles, sommes de Riemann sans le dire).

Le chapitre sur les équations différentielles se centre, d'un point de vue théorique, sur la connaissance et l'application des deux théorèmes donnant la solution générale d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants. La recherche d'une solution particulière pour les équations correspondantes comportant un second membre est systématiquement guidée, comme l'obtention de la solution générale de ces équations, ce qui est plus étonnant puisque c'est le même processus qui est remis en jeu à chaque fois[11]. La variété des exercices découle surtout de la mise en évidence d'aspects plus *secondaires* (recherche de solutions soumises à des conditions initiales, résolution d'équations du type y'= f(x) ou y''= f(x), recherche d'équations différentielles satisfaites par telle ou telle fonction), ou bien *externes* au problème mathématique en lui-même (application à des

[9] Exemple : cas de fonctions du type $x \to P(x)\sin^2(x)$ et $x \to P(x)\cos^2(x)$, où P est un polynôme.
[10] L'exemple étudié ici est celui de la primitive de $x \to \exp(-x^2)$ qui s'annule en 0.
[11] La solution de l'équation générale avec second membre est la somme d'une solution particulière de cette équation avec second membre et de la solution générale de l'équation homogène. La preuve de cette propriété est similaire d'un cas particulier à l'autre et ce résultat général peut être établi à moindre frais et institutionnalisé.

problèmes physiques, biologiques issus de divers domaines : mécanique, électricité, radioactivité, bactériologie,... etc.).

Il y a cette fois *assez peu* d'éclairages graphiques, ce qui est sans doute dû en partie au fait que les solutions sont parfaitement calculables. Il y a juste une mise en relief de la non unicité des solutions et aussi, dans l'un des exercices, de la grande variété des courbes intégrales possibles dans le cas d'une équation différentielle paramétrée.

Notons la présence de *deux* exercices sollicitant le calcul de la *dérivée n-ième* d'une fonction satisfaisant à une équation différentielle homogène linéaire d'ordre 1 et 2 (respectivement). Un raisonnement par récurrence est sollicité et toute indication utile est fournie (expression générale de $f^{(n)}$ et, dans le second cas, méthode de résolution d'un système linéaire de deux suites numériques).

3°) Quelques résultats statistiques complémentaires.

a) Présence de paramètres.

On constate que seulement 12,56% des exercices et des problèmes proposés comportent des paramètres (contre 18,5% dans le manuel de première S), ces paramètres intervenant tous à un niveau explicite. En revanche, les paramètres affectent cette fois presque toujours l'expression des fonctions elles-mêmes (94% des cas contre seulement 51,5% en première S) : étude de la dérivabilité en un point « problématique » pour une fonction paramétrée, étude globale d'une telle fonction ou de son intégrale, étude d'une famille de courbes paramétrées solutions d'une équation différentielle,... etc. D'autre part, 84% des paramètres présents concernent un type de tâche lié de façon directe à la notion de dérivée (contre 63,5% seulement dans le manuel de première S).

Ces différents résultats correspondent au fait que la présence de paramètres, même si elle est moins fréquente dans les exercices de terminale, y joue (en général) un rôle plus crucial au sein des situations abordées.

b) Le degré de généralité.

Il y a 83,7% d'exercices et de problèmes correspondant à un degré de généralité nul, 4% à un degré de généralité maximum et 12,3% à un degré de généralité intermédiaire. Ces résultats sont assez similaires à ceux que nous avons obtenus concernant le manuel de première S. Cependant, il faut constater que les exercices ayant un degré de généralité maximum ne sont cette fois pas tous issus de la rubrique « Démonstrations de cours », contrairement à ce que l'on a pu observer au sein du manuel de première.

c) Catégories « Applications » et « Questionnement ».

Il apparaît que 95% des exercices et des problèmes étudiés concernent plutôt la catégorie « Applications » (contre 90,3% dans le manuel de première S), et seulement 5%, la catégorie

« Questionnement » (contre 9,7% en première S). Cette évolution au sein du manuel de terminale peut sembler *a priori* paradoxale, compte tenu d'une certaine familiarité acquise en première vis à vis du concept de dérivée et de son environnement. Elle s'explique cependant par la proximité de l'examen du baccalauréat (qui resserre l'ensemble des tâches proposées autour d'objectifs très ciblés) et aussi par l'importance du travail de reprise de notions anciennes dans le contexte de fonctions nouvelles en terminale.

Parmi les exercices et problèmes qui nous semblent favoriser un questionnement plus approfondi des connaissances, nous pouvons mentionner l'exercice cité plus haut concernant la comparaison entre les notions de nombre dérivé et de nombre dérivé symétrique (avec toutes les réserves, cependant, qui ont été émises sur la façon dont est posé cet exercice). Un exercice du type : *« Montrer que la courbe représentative d'une fonction f impaire traverse sa tangente à l'origine »* (n°28 page 155) nécessite un travail de réflexion, d'interprétation[12], et de formalisation personnel et met en jeu des résultats *généraux*[13] qui peuvent être réutilisés pour traiter des exercices ayant trait à des fonctions impaires particulières vues au lycée ou à l'université ($x \to x^3$, $x \to \sin(x)$, $x \to \tan(x)$, $x \to \mathrm{Arcsin}(x)$, $x \to \mathrm{Arctan}(x)$,... etc.).

Parmi les problèmes sollicitant un questionnement particulier, ne relevant pas de la simple application, on peut citer le problème portant sur la recherche des tangentes communes aux courbes représentatives de l'exponentielle et du logarithme népérien, les problèmes ayant trait à la résolution de l'équation $x^a = a^x$ ($a>0$, $x>0$), à l'étude de la suite des zéros d'une équation paramétrée du type : $f_n(x) = 0$ ($n \in N$) ou à l'étude d'une fonction définie par une intégrale.

d) Notions non institutionnalisées et présentées dans les énoncés.

Parmi les éléments qui interviennent en marge du cours, au sein des exercices ou des TP, et prolongent l'enseignement sur la dérivation, on peut citer la notion de dérivabilité à gauche et à droite en un point x_0, la notion de dérivée symétrique, celles de point d'inflexion et de fonction convexe ou concave, la méthode de Newton (zéros d'une fonction), les méthode des rectangles, des trapèzes et du point milieu pour déterminer la valeur approchée d'une intégrale,... etc.

Il faut cependant noter que ces éléments de prolongement du cours interviennent presque tous au sein d'un TP, c'est-à-dire d'une activité qui se situe un peu en marge du travail de la classe au quotidien, plutôt axé sur la résolution d'exercices. Les notions introduites au sein d'exercices sont donc le plus souvent extérieures à la notion de dérivée, voire aux Mathématiques elles-mêmes. On peut notamment citer la notion de logarithme décimal, de cissoide de Dioclès, la notion de courbes asymptotes pour ce qui est des notions mathématiques extérieures à la dérivation. Les applications à d'autres domaines (mécanique, électricité,... etc.) fournissent l'occasion d'introduire dans les situations d'exercices ou de problèmes des notions extra mathématiques assez nombreuses et variées[14] : centre d'inertie d'un solide (intégration), intensité et charge électriques, raideur d'un ressort, inductance et capacité (équations différentielles), pH d'un corps, période d'un corps radioactif, magnitude des étoiles,... etc.

[12] Nécessité de mettre en relation les cadres graphique et algébrique pour traduire cette propriété.
[13] Outre la propriété que l'on demande d'établir, le fait que f(0)=0 pour une fonction impaire.
[14] Confirmant ainsi une tendance déjà remarquée dans l'environnement d'exercices du manuel de première S.

E/ CLASSIFICATION PAR CADRES ET REGISTRES.

1°) Classification par cadres mis en jeu.

Le cadre algébrique, déjà très majoritairement utilisé comme cadre de travail dans les tâches sollicitées du manuel de première S (part de 70,46%), voit son importance augmenter encore pour la réalisation des tâches du manuel de terminale S (part de 80,86%). Cette progression s'effectue notamment au détriment du cadre géométrique, qui devient très marginal, sa part évoluant de 4,6% à 0,8%.

Cadre de travail	Algébrique :	Graphique :	Numérique :	Géométrique :
Pourcentages :	80,86%	13,33%	5,01%	0,8%

Les changements de cadres concernent le couple : cadre algébrique / cadre graphique dans 72,4% des cas (contre seulement 57,06% des cas dans le manuel de première S) et le couple cadre algébrique / cadre numérique dans 22,4% des cas (seulement 15,34% des cas dans le manuel de première S). En contrepartie, la part des changements de cadre au sein du couple : cadre algébrique / cadre géométrique s'effondre, évoluant de 23,31% (manuel de première S) à 3,6%.

Changements de cadres	Passage dans un sens (→)	Passage dans l'autre sens (←)	Totaux :
Algébrique / Graphique	Alg → Graph 50,2%	Graph → Alg 22,2%	72, 4%
Algébrique / Numérique	Alg → Num 22,4%	-	22,4%
Algébrique / Géométrique	-	Géom → Alg 3,6%	3,6%
Graphique / Numérique	Graph → Num 1,6%	-	1,6%
Totaux :	-	-	100%

Dans le détail, on peut constater que les passages du cadre graphique au cadre algébrique, assez rares au sein du manuel de première S (part de 4,3%), ont ici une place plus importante. Ainsi, il faut montrer, dans certains exercices sur les inégalités des accroissements finis, que la courbe se situe dans une zone du plan qui est précisée sur une figure fournie avec le texte. De même, on demande, dans divers exercices du chapitre d'intégration, de calculer l'aire d'un domaine représenté graphiquement, et délimité par les courbes de certaines fonctions. Dans le chapitre sur les équations différentielles il s'agit parfois d'identifier des solutions particulières qui sont fournies sur papier quadrillé (ce qui peut aussi permettre à l'étudiant de vérifier si les courbes intégrales, dans leur ensemble, correspondent qualitativement à ce qu'il a trouvé par le calcul). Dans divers exercices, c'est *l'interaction* entre les deux cadres qui est explicitement suggérée, la présence d'une représentation graphique au sein de l'énoncé se révélant parfois comme un « surplus » d'information à des fins de vérification qui sont d'ailleurs signalées à l'étudiant et font partie intégrante du questionnement. C'est ainsi le cas dans les exercices où on lui demande d'étudier la dérivabilité d'une fonction en un point où le tracé (qui est livré par la calculatrice et reproduit sur le manuel) révèle une angulosité ou une pente verticale. Une fois encore on ne peut que constater à quel point ces changements de cadres ou ces interactions entre cadres sont méthodiquement pilotées par l'énoncé.

Précisons encore que la présence d'une tâche initiale à réaliser dans le cadre graphique peut également correspondre à un travail de prospection sollicité par l'énoncé (par exemple, conjecturer à propos du comportement d'une suite récurrente à partir du tracé de la fonction associée).

Les changements de cadre dans le sens cadre algébrique / cadre graphique sont quant à eux souvent centrés sur quelques tâches classiques (tracés de courbes, interprétation de résultats du type $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax-b = 0$, ou $\lim_{x\to 0} f(x)/x = \ldots$ *avec* $f(0)=0$, ou encore d'inégalités en termes de position relative entre une courbe et une droite).

2°) Classification par registres mis en jeu.

L'ensemble des données statistiques, relatives aux registres mis en jeu au sein des énoncés des exercices, montre la prépondérance du registre *algébrique* sur les autres registres. Le registre de la langue naturelle est surtout très présent en tant que registre secondaire ou minoritaire, mais n'occupe plus la première place en tant que registre principal d'expression de énoncés, comme c'était le cas dans le manuel de première S.

Les autres registres restent assez minoritaires, même si on peut voir que les représentations graphiques restent assez présentes au sein des énoncés, figurant aussi bien en tant que registre dominant d'expression qu'en tant que registre secondaire ou minoritaire. Les expressions numériques, en revanche, interviennent surtout en tant que registre minoritaire.

Au niveau des réponses fournies par l'énoncé, on constate également une augmentation de la part relative aux expressions algébriques (64,13% contre 57,2% dans le manuel de première).

Côté énoncés	Registres dominants :	Registres secondaires :	Registres minoritaires :	Registres des rép. données :
Langue naturelle :	38,11%	**49%**	**60,78%**	33,63%
Expressions algébriques :	**54,13%**	32,21%	17,65%	**64,13%**
Représentations graphiques :	6,41%	6,04%	5,88%	0,22%
Expressions numériques :	0,17%	4,7%	13,73%	2,02%
Figures géométriques :	0,34%	1,34%	-	-
Schémas :	-	3,36%	1,96%	-
Illustrations :	0,84%	2,68%	-	-
Tableaux :	-	0,67%	-	-

Du côté des solutions attendues, les résultats sont assez peu différents de ce qu'ils étaient pour le manuel de première S, avec une très large majorité de tâches faisant essentiellement appel au registre des expressions algébriques. Le registre de la langue naturelle et surtout celui des représentations graphiques sont assez présents en tant que registres secondaires et minoritaires d'expression des solutions. Notons que les tableaux (de variations, essentiellement) ne sont pas autant sollicités (en tous cas pas de manière explicite), au niveau des solutions attendues, que dans les exercices du manuel de première S. Les énoncés demandent souvent : *« Etudier les variations de la fonction »* sans préciser les modalités de cette étude au niveau sémiotique (sans doute car la construction d'un tableau de variations est une pratique déjà installée chez les élèves de terminale).

Côté Solutions	Registres dominants :	Registres secondaires :	Registres minoritaires :
Langue naturelle :	4,22%	31,17%	14,43%
Expressions algébriques :	**90,14%**	6,49%	-
Représentations graphiques :	2,82%	**38,96%**	**49,48%**
Expressions numériques :	2,82%	11,69%	30,93%
Figures géométriques :	-	-	-
Schémas :	-	-	-
Illustrations :	-	-	-
Tableaux :	-	11,69%	5,16%

Du point de vue des formes particulières introduites ou sollicitées par les énoncés, on peut constater un certain nombre de similitudes avec ce qu'on a rencontré dans l'environnement du manuel de première. Ainsi, la forme $(f(x_0+h)-f(x_0))/h$ du taux d'accroissement d'une fonction au point x_0 est privilégiée par rapport à une expression du type : $(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$. Des formes canoniques, intervenant dans des contextes *anciens* ou *nouveaux*, notamment des expressions du style : « $\lim_{x\to x0} f(x)-(ax+b)$ » pour la recherche d'asymptotes obliques, ou bien du type *« décomposition en éléments simples »* pour l'intégration de fractions rationnelles, sont bien mises en exergue dans les énoncés. Il en va de même d'expressions factorisées, dans des cas où disposer de la forme factorisée devient crucial pour résoudre le problème qui est posé. L'application des inégalités des accroissements finis, qui constitue un enjeu spécifique du programme de terminale S, est parfois facilitée par le texte, qui peut aider à identifier certains termes d'une inégalité à démontrer (exemple : *« Etablir que pour tout x de [π/2, π], on a : $f(x) \geq -3/2(x-\pi/2) + f(\pi/2)$, et que pour tout x de [0, π/2], $f(x) \leq -3/2(x-\pi/2) + f(\pi/2)$ »*).

L'expression *« pente de la courbe en un point »* est absente du manuel de T.S comme elle l'était de celui de première S. Par contre, on rencontre des formes sémiotiques pour la dérivée, telles que dx/dt, d^2x/dt^2, dq/dt, etc… non vues dans l'ouvrage de première S. Et la présence de représentations graphiques réalisées par la calculatrice graphique (avec les imperfections due l'on connaît, dues à la discrétisation du tracé) permet un travail critique nouveau.

III/ EXERCICES ET PROBLEMES ISSUS D'AUTRES MANUELS DE LYCEE.

A/ INTRODUCTION.

Sans toutefois procéder à une analyse aussi détaillée que celle effectuée sur les deux manuels de la collection *« Déclic »*, nous allons à présent, pour comparaison avec ces derniers, décrire les caractéristiques générales des différents ouvrages, de première S et de terminale S, de trois collections (Transmath, Fractale et Terracher), et pour chacun d'eux, quelques caractéristiques de l'environnement de la notion de dérivée. Ces manuels traduisent assez bien la diversité que nous pouvons rencontrer à travers les divers ouvrages relatifs à ces classes et représentent (avec la collection *« Déclic »*) une forte proportion (environ 80%) des manuels de lycée utilisés en France à ce niveau d'étude.

Pour exemple de cette diversité, notons ainsi que les deux ouvrages de la collection *« Fractale »* présentent une spécificité par rapport à ceux des autres collections : ils insistent (en préface) sur l'effort de renouvellement consenti, lié en première à l'introduction de l'enseignement modulaire, et en terminale à la dichotomie enseignement obligatoire - enseignement de spécialité. Ce faisant, le manuel de première qui s'intitule *« Nouveau Fractale avec modules »* consacre (contrairement aux manuels des autres collections), à deux reprises (au milieu et en fin d'ouvrage), près de vingt pages à cet enseignement modulaire. En terminale S, il est précisé dans l'ouvrage correspondant à l'enseignement obligatoire, que certains approfondissements ou démonstrations de cours de cet ouvrage sont plus particulièrement destinés aux élèves suivant l'enseignement de spécialité.

De même, tandis que l'ouvrage de première de la collection *« Transmath »* semble avoir pour première préoccupation la clarté de l'exposition (la préface parle d'un cours *« bien structuré »*) et la présentation des démonstrations des théorèmes du cours à chaque fois que cela est conforme au programme (démonstrations annoncées par les auteurs comme *« bien repérables »* au sein des chapitres), les autres collections (Fractale et Terracher) accordent plus d'importance à la concision, voire à la brièveté du cours, synonymes *« d'efficacité »* (nous citons, là encore, les préfaces). Mais rentrons plutôt, maintenant, dans le vif du sujet, en observant le détail de cette diversité exprimée à travers les ouvrages des collections précitées.

B/ PRESENTATION DU MANUEL « TRANSMATH » DE PREMIERE S.

1°) Organisation générale.

Dans l'ensemble, on retrouve ici des rubriques similaires à celles qui jalonnent le manuel de première de la collection *« Déclic »*, mais ces rubriques s'organisent parfois selon des modalités quelque peu différentes.

En amont du cours, il y a des activités d'approche des notions nouvelles, qui sont équivalentes dans leur rôle aux activités préparatoires du *« Déclic »*, mais on ne rencontre plus de « tests préliminaires » permettant à l'élève de réviser les prérequis (connaissances et savoir-faire) nécessaires à l'assimilation du chapitre à étudier. Le cours proprement dit semble à la fois plus complet et plus traditionnel dans son expression que celui du *« Déclic »*. En effet, il y a davantage de démonstrations de cours : en fait, toutes celles qui sont compatibles avec les objectifs du programme sont présentes dans le corps du cours. On se souvient, à ce propos, du fait que le *« Déclic »* propose tout au contraire un certain nombre de démonstrations sous forme d'exercices réunis au sein d'une rubrique spéciale. D'autre part, les termes « définition », « théorème » ou « propriété » sont employés classiquement à chaque fois que la situation s'y prête, jalonnant ainsi l'exposé du cours, ce qui n'est pas le cas du *« Déclic »* dans lequel bien des énoncés sont plutôt précédés d'un titre donnant uniquement une indication de contenu (par exemple, *« approximation affine »*, *« équation f(x)=0 »*, *« extremum »*).

En aval du cours, on trouve une rubrique « Exercices résolus », qui est de même nature que la rubrique « Utilisations » rencontrée dans le *« Déclic »*, c'est-à-dire qu'elle comporte pour chaque exercice un énoncé assez standard appelant une ou plusieurs techniques bien étiquetées, un point-méthode décrivant la démarche à suivre et ces techniques à investir, et enfin une solution rédigée pour cet exercice. Il faut cependant signaler que cette rubrique « Exercices résolus » n'est pas présente de façon systématique au sein des divers chapitres comme l'était la rubrique « Utilisations » dans le *« Déclic »*. Ainsi, les chapitres « Dérivation » et « Etudes de fonctions » ne comportent pas d'exercices résolus, tandis que les chapitres « Limites de fonctions », « Applications de la dérivation » et « Fonctions circulaires » en contiennent. Ce phénomène s'interprète assez clairement pour ce qui est des deux chapitres relatifs à la dérivation : le « Transmath » s'abstient de donner des exercices types corrigés dans le premier chapitre de dérivation pour lequel les problèmes posés sont effectivement de nature plus « conceptuelle » que « technique » (compréhension des diverses définitions du nombre dérivé, notion de fonction dérivée et formules usuelles de dérivation...). Et le choix est inverse pour le second chapitre, sur les applications de la dérivation, qui débouche sur des champs de problèmes plus vastes (études de fonctions), et prendra davantage d'importance l'année suivante, notamment dans l'objectif du Baccalauréat. Le manuel *« Déclic »* obéit lui à une autre logique : insister de façon *systématique* sur l'aspect technique des choses, et reproduire le même canevas de rubriques indépendamment de la nature du chapitre concerné, pour aider l'élève à acquérir des habitudes dans sa consultation du manuel, pour mieux se repérer. Il faut noter, par ailleurs, que le *« Transmath »* ne contient que deux exercices résolus par chapitre (lorsque ce chapitre en comporte !), alors qu'il y en a, en moyenne, entre trois et quatre par chapitre au sein de la rubrique « Utilisations » du *« Déclic »*.

A propos des « Travaux pratiques », que nous rencontrons (au contraire) plutôt en abondance au sein du « Transmath », les auteurs de cette collection nous donnent en préface leurs intentions : en dehors des quelques T.P qui sont officiellement au programme, et signalés comme tels dans l'ouvrage, d'autres sont présents parce qu'ils montrent « *des techniques ou des raisonnements utiles, des applications intéressantes* ». Ils ajoutent que « *ces travaux pratiques respectent <u>le plus souvent</u> le niveau d'exigence du programme* », concession que les auteurs justifient par la prise en compte de l'enseignement modulaire qui nécessite (notamment) une ouverture sur des activités moins classiques. On peut cependant s'interroger ici sur l'effectivité de l'utilisation de tels T.P dans la pratique réelle de la classe, vu leur nombre (assez important), quand on sait l'investissement en temps que sollicitent de telles activités.

La rubrique « Des idées, des réflexes », qui constitue une synthèse des leçons à retirer d'un chapitre donné, s'apparente un peu à la rubrique « Savoir- faire » du manuel *« Déclic »*, bien que la mise en perspective ne soit pas la même dans les deux collections. En effet, la rubrique du *« Transmath »* effectue cette synthèse selon un découpage entre, d'une part les connaissances à retenir, du côté du cours, et d'autre part les automatismes à acquérir, du côté des techniques de base, tandis que la rubrique du *« Déclic »* procède plutôt par associations entre d'un côté des tâches à effectuer et de l'autre les techniques et les technologies (parfois couplées) qui permettent de venir à bout de ces tâches. La rubrique du *« Transmath »* permet de ratisser large, ce que traduit bien le terme « d'idées » qui est employé ici dans l'intitulé de la rubrique : les auteurs évoquent en préface la nécessité de permettre aux élèves « *de dépasser le stade formel des connaissances pour donner sens aux termes et aux objets mathématiques, de construire des images mentales, d'être renseignés en ce qui concerne le champ d'application des résultats du cours* », bref en quelque sorte de se forger une expérience tous azimuts. Ainsi, cette rubrique ne procède pas simplement par rappels de définitions ou d'énoncés de théorèmes sous forme brute ; elle rappelle leurs modalités d'application, donne des conseils pour leur utilisation, indique les choix techniques à faire ou à ne pas faire, les erreurs à éviter, elle fournit des schémas pour certaines situations de référence… En contrepartie de cette richesse d'explications, il n'y a pas, immédiatement au voisinage de cette rubrique, d'exercices d'application de cette rubrique à des exemples concrets. A l'inverse, et plus prosaïquement, la rubrique « Savoir-faire » du manuel *« Déclic »* est (comme nous avons pu le constater dans ce qui précède) resserrée autour de quelques objectifs bien circonscrits, matérialisés par des tâches très précises ; elle est aussi accompagnée de « tests » permettant à l'élève de mettre à l'épreuve sa compréhension de cette rubrique.

A l'instar de ce que l'on a pu observer pour la rubrique « Exercices résolus », certains chapitres du *« Transmath »* (tels que : « Limites de fonctions », « Etudes de fonctions ») ne comportent pas de rubrique « Des idées, des réflexes », tandis que la rubrique « Savoir-faire » du *« Déclic »* (accompagnée de « Tests ») est toujours présente dans les divers chapitres de ce manuel. Il n'y a donc pas, comme c'est le cas dans la collection *« Déclic »*, une volonté des auteurs de systématiser à tous les chapitres chacune des différentes rubriques à partir desquelles l'ouvrage se structure. En un certain sens, cela est parfaitement légitime, puisque l'opportunité de la présence de telle ou telle rubrique peut s'avérer plus ou moins grande selon la nature du chapitre considéré : par exemple, y a-t-il nécessité de proposer des activités d'approche au sein d'un chapitre intitulé « Etudes de fonctions » où l'on ne fait qu'exploiter des notions issues d'autres chapitres ? Sans doute, non ! Mais la systématisation de chaque rubrique au sein des divers chapitres du *« Déclic »* permet, en dépit (ou en vertu ?) de son caractère un peu artificiel et scolaire, une familiarisation plus grande de l'élève à l'ouvrage.

Enfin, faisant suite à la rubrique « Des idées, des réflexes », on trouve, obéissant à une subdivision selon trois parties, les exercices et problèmes d'entraînement proposés aux élèves. Il y a tout d'abord une page d'auto-évaluation, constituée de questions de cours, de Q.C.M (pour tester les savoir-faire) et d'exercices du même type que ceux de la rubrique « Exercices résolus ». Les réponses sont fournies en fin de manuel. Cette rubrique est donc plus diversifiée que la rubrique « Tests » du *« Déclic »* tout en répondant à des objectifs similaires : les « Tests » du *« Déclic »*, également corrigés en fin de manuel, sont plus ciblés sur quelques techniques particulières, en lien avec les éléments de méthodologie de la rubrique « Savoir-faire » présentée juste au-dessus dans la page. La deuxième partie (rubrique intitulée : « Pour s'entraîner ») est constituée d'exercices classés par thèmes (comme dans le *« Déclic »*) et de difficulté variable, les plus faciles et les plus difficiles étant signalés au moyen d'un code.

Une particularité du *« Transmath »*, notamment par rapport au *« Déclic »*, tient dans le fait qu'un certain nombre d'aides à la résolution (des indications techniques, des découpages en questions intermédiaires...), qui sont implicites dans les exercices du *« Déclic »*, intégrées, constitutives du questionnement lui-même, ont explicitement ce statut d'aides à la résolution dans le *« Transmath »*, qui est en cela de conception plus traditionnelle. Dans le *« Transmath »*, une phrase destinée à aider l'élève à répondre à la question posée est présentée isolément, après cette question, et nettement précédée de la mention « Indication » (ou « Note », « Conseil »...). En outre, certains exercices sont commentés, organisant ainsi la recherche et le choix des outils à utiliser pour la résolution du problème posé. Présentée sous forme d'encadré, la partie commentée de l'exercice est alors précédée de la mention « Vers une solution » et doit servir éventuellement de modèle pour la résolution d'autres exercices, selon l'intention des auteurs. L'aide et les motifs dépassent donc largement le simple découpage du problème posé en questions intermédiaires.

Sous la rubrique « Divers », on rencontre des exercices d'application à d'autres disciplines, des exercices moins classiques (prolongements du cours...), ou encore des exercices en « Vrai ou faux » et des exercices du type « Trouver l'erreur » (qu'on ne rencontre pas dans le *« Déclic »* : il s'agit ici de faire la critique d'une solution fausse décrite par le manuel, à un problème donné). Dans le *« Transmath »*, il y a relativement peu de problèmes, au sein des divers chapitres, en comparaison du nombre d'exercices, mais d'une part on en trouve cinquante en fin d'ouvrage, et d'autre part, bien des exercices (en particulier de la rubrique « Divers ») peuvent être considérés comme des petits problèmes.

Notons encore la présence de travaux pratiques intitulés « Pour la logique », qui montrent « en situation » implication, équivalence, raisonnement par l'absurde, contre-exemples, récurrence, réciproque... conformément aux directives du programme. L'intention, affichée en préface par les auteurs, de prendre plus spécialement en considération ces questions, est là encore une spécificité du *« Transmath »*.

2°) La dérivée dans le manuel *« Transmath »* de première S.

Les onze premiers chapitres du manuel concernent l'Algèbre et l'Analyse. Les chapitres sept et huit portent respectivement sur la dérivation et les applications de la dérivation. Ils sont précédés par les chapitres quatre, cinq et six ayant trait aux fonctions polynômes, à des généralités sur les fonctions (opérations, comparaisons, composition...), et aux limites de fonctions. Le chapitre cinq fournit en particulier l'occasion d'introduire le travail sur des fonctions rationnelles ou comportant des radicaux ou des valeurs absolues. Les chapitres sept et huit concernant la dérivation sont suivis de deux chapitres intitulés « Etudes de fonctions » et « Fonctions circulaires » au sein desquels les notions et les énoncés abordés à propos de la dérivée sont largement réinvestis.

L'organisation est donc différente de celle du *« Déclic »*, où les chapitres de dérivation clôturaient l'enseignement d'Analyse relatif aux fonctions numériques, ce qui induisait nettement, au moment des exercices, un travail selon deux directions, matérialisé par la présence de deux types de sous-titres aux exercices posés (portant sur les concepts : fonction dérivée, variations, extremum... ou sur la nature des fonctions objets d'étude : fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles, trigonométriques). Dans le *« Transmath »*, cette dualité au sein des chapitres de dérivation subsiste de façon implicite bien sûr (seules les fonctions trigonométriques n'ont pas été abordées avant le cours de dérivation), mais il n'y a pas, dans le chapitre « Applications de la dérivation », comme dans le *« Déclic »*, de travail spécifique selon la nature des fonctions considérées, les deux chapitres (« Etudes de fonctions » et « Fonctions circulaires ») qui font suite à ceux sur la dérivation permettant de pourvoir un peu plus loin à cette nécessité. En ce qui concerne les exercices et les problèmes des deux chapitres de dérivation (chapitres ayant mêmes titres que ceux du *« Déclic »* de première S), on retrouve respectivement à peu près les mêmes thèmes que dans le *« Déclic »*, à quelques exceptions près que l'on va décrire à présent.

Tout d'abord, dans le chapitre intitulé « Dérivation » du *« Transmath »*, il n'y a pas d'exercices dont l'objectif est de faire étudier la dérivabilité d'une fonction (éventuellement à gauche et/ou à droite) en un point problématique (cas d'une fonction comportant un radical ou une valeur absolue pour la valeur d'annulation). Ainsi, on trouve une rubrique « Nombre dérivé », en lieu et place de la rubrique intitulée « Dérivabilité en un point réel » du *« Déclic »*, l'objectif étant alors seulement de calculer à l'aide de la définition par la limite du taux d'accroissement, des nombres dérivés pour des fonctions usuelles et en des points donnés, là où l'utilisation de la fonction dérivée est possible et plus efficace et naturelle. L'idée selon laquelle *« toutes les fonctions usuelles sont dérivables en tout point où elles sont définies »*, et l'obsolescence de la définition initiale du nombre dérivé aux yeux des élèves (du fait des formules générales de dérivation) trouvent donc là un terrain de développement chez ces élèves plus favorable que dans le *« Déclic »* où la question de la dérivabilité en certains points délicats est tout de même posée, même si elle ne l'est que dans quelques exercices seulement.

Pour des raisons exposées précédemment (disposition des chapitres), il y a une rubrique d'exercices intitulée « Etudes de fonctions » dans le *« Transmath »* qu'on ne trouve pas dans le *« Déclic »*. Par ailleurs, il y a dans le *« Transmath »*, au sein du chapitre « Applications de la dérivation », toute une série d'exercices dont le thème affiché est la comparaison de fonctions et la démonstration d'inégalités, thème que l'on ne rencontre pas dans le chapitre analogue du *« Déclic »*. Pour le reste, on retrouve les mêmes thèmes d'exercices dans le *« Transmath »* et dans le *« Déclic »*, mais la mise en perspective est parfois différente : il n'y a pas de rubrique explicitement intitulée « Extremum d'une fonction » (correspondant à un type de tâches répétitives et bien ciblées) dans les exercices du *« Transmath »* et la recherche d'extrema s'effectue par l'entremise d'exercices de la rubrique « Divers » ou d'exercices et de problèmes d'optimisation. Inversement, il n'y a pas de rubrique « Optimisation » dans le *« Déclic »* comme c'est le cas dans le *« Transmath »* et les problèmes d'optimisation sont inclus dans un ensemble plus vaste (rubrique « Problèmes concrets »).

C/ PRESENTATION DU MANUEL « TRANSMATH » DE TERMINALE S.

1°) Organisation générale.

On relève peu de modifications par rapport à l'ouvrage de première. Les rubriques composant les divers chapitres demeurent les mêmes, à quelques nuances près. Ainsi, une rubrique intitulée : *« Pour prendre un bon départ »* a été rajoutée au début de certains chapitres (« Limites de fonctions. Continuité. », « Suites de nombres réels » pour ce qui concerne l'Analyse). Elle effectue un rappel des connaissances qu'il faut posséder pour aborder le chapitre en question et demeure donc assez différente, dans sa forme, de la rubrique « Tests préliminaires » du *« Déclic »*.

Par ailleurs, il faut noter la présence d'une rubrique intitulée *« Post Bac »* qui permet d'aborder à l'occasion d'un dernier problème, avec les moyens de terminale S, une notion importante enseignée au niveau Bac+1, et *« dans le prolongement naturel du programme de terminale »* selon les auteurs. Ainsi, le théorème des accroissements finis (interprétation graphique, lien avec les inégalités du même nom), la fonction Arctangente, la notion de développement limité, font l'objet d'un problème post bac au sein de divers chapitres.

Naturellement, la question de l'opportunité d'une telle rubrique au sein de ce manuel se pose : est-il pertinent, d'un point de vue écologique, de présenter un problème *unique*, sortant délibérément du programme de terminale, notamment si ce problème ne sert pas spécialement à éclairer les notions étudiées en terminale ? Et n'y a-t-il pas intérêt à proposer plutôt une exploration de problèmes techniquement plus délicats que les autres, faisant appel à un niveau d'autonomie plus élevé vis à vis des méthodes, mais restant pleinement dans les limites du programme au niveau du contenu ?

2°) La dérivée dans le manuel *« Transmath »* de terminale S.

La progression des chapitres est similaire à celle du *« Déclic »*, même si l'on peut remarquer l'adjonction de trois chapitres intermédiaires supplémentaires... L'introduction de la notion de primitive s'effectue dans un chapitre (5) à part, intitulé « Primitives. Notion d'intégrale. », distinct du chapitre (11) de calcul intégral, alors que cette notion est d'abord abordée au sein du chapitre de calcul différentiel dans le *« Déclic »*, et sans lien avec la notion d'intégrale. L'étude des fonctions puissances est réalisée séparément (chapitre 8) de celle des fonctions exponentielles (chapitre 7) et les fonctions trigonométriques (déjà au programme de première) font l'objet d'un chapitre (9) particulier, ce qui n'était pas le cas dans le *« Déclic »*.

D/ PRESENTATION DU MANUEL « FRACTALE » DE PREMIERE S.

1°) Organisation générale.

Tous les chapitres se composent des cinq mêmes rubriques : activités préparatoires, cours, travaux pratiques, exercices commentés, exercices et problèmes. Il y a donc une certaine similitude avec le *« Transmath »* (et même avec le *« Déclic »*) si l'on excepte le fait qu'on ne trouve pas de rubrique faisant la synthèse des connaissances, des idées, des techniques à retenir au terme du chapitre considéré (rubrique « Des idées, des réflexes » du *« Transmath »*, ou « Savoir-faire » du *« Déclic »*). Il n'y a pas non plus, dans le *« Fractale »* de première S, de rubrique du type *« Tests préliminaires »* ou *« Pour prendre un bon départ »*, permettant de faire le point des prérequis nécessaires pour une bonne compréhension du chapitre.

Les exercices de la rubrique *« Exercices commentés »* du *« Fractale »* sont en revanche présentés de façon très similaire à ceux de la même rubrique du *« Transmath »* ou à ceux de la rubrique « Utilisations » du *« Déclic »* : pour chaque exercice, l'énoncé est suivi d'un point-méthode et de la solution commentée. La liste d'exercices proposés aux élèves commence par quelques QCM, comme dans le *« Transmath »*, mais il n'y a pas de questions de cours ou d'exercices étiquetés comme semblables aux exercices types de la rubrique *« Exercices commentés »*, ainsi que c'est le cas dans le *« Transmath »*.

En avant-propos, les auteurs du *« Fractale »* insistent tout particulièrement sur la volonté de simplification et de recherche d'efficacité marquée par : des activités préparatoires *allégées*, un cours *plus bref*, des travaux pratiques *mieux ciblés*, des exercices *plus progressifs*, *mieux adaptés aux intérêts diversifiés du public concerné.* On constate immédiatement que le point de vue est assez différent de celui des auteurs de la collection *« Transmath »* qui, tout en revendiquant des qualités de clarté et de simplicité d'exposition, sont désireux de laisser la part belle à des travaux pratiques plus originaux, dépassant les strictes obligations du programme, ainsi qu'à des exercices (rubrique « Divers ») moins classiques, prolongeant les résultats du cours. Les motifs exposés par les auteurs du *« Fractale »* sont assez clairs pour qui sait lire entre les lignes : « des exercices *plus progressifs »* signifie « tels que les premiers d'entre eux soient vraiment très faciles », des exercices *mieux adaptés aux intérêts diversifiés du public* signifie « non majoritairement conçus pour des élèves se destinant à des études de Mathématiques, Physique, Informatique (en classes préparatoires ou en DEUG A) après le Baccalauréat ». Etant donné une certaine diversité des filières possibles après un Bac scientifique et sachant qu'un certain nombre d'entre elles nécessitent un bagage relativement limité en Mathématiques, cette formule figurant en avant-propos du *« Transmath »* annonce ouvertement un recentrage des exercices autour du « minimum exigible » (notamment en vue du Baccalauréat).

Du reste, le classement, effectué par les auteurs, de la totalité des exercices et problèmes du *« Fractale »* selon trois catégories : *très faciles*, *faciles* et *plus difficiles* (à l'aide d'un code : un, deux ou trois petits carrés) est assez symptomatique de cet esprit du *« Fractale »*. Tout d'abord, « plus difficile » ne signifie pas « difficile », et ensuite, entre la catégorie « très facile » et la catégorie « facile » on s'attend donc à ce qu'une large majorité des exercices posés consiste en des applications plus ou moins directes du cours. De fait, on constate que sur 569 exercices et problèmes faisant l'objet de cette classification, 153 sont catalogués comme « très faciles », 255 comme « faciles » et 161 comme « plus difficiles », ce qui correspond à un pourcentage d'exercices faciles et très faciles de 71,7%. Encore faut-il préciser que les QCM, qui testent des connaissances de base, ne sont pas répertoriés, alors qu'ils seraient certainement situés dans la catégorie « très faciles » s'ils l'étaient.

Rappelons enfin que le *« Fractale »* de première S prend plus particulièrement en compte l'enseignement modulaire : deux sections d'exercices, d'une quinzaine de pages chacune, jalonnées de guides de résolution et de rappels de connaissances, prennent place en milieu et en fin de manuel. Ces exercices sont classés selon cinq rubriques :

1) « Savoirs de base » (pour faire travailler l'élève sur les définitions et les propriétés fondamentales),
2) « Méthodes » (exercices visant à mettre en valeur et à inculquer une certaine démarche),
3) « Argumentation » (exercices suscitant une réflexion sur la construction et l'articulation de l'argumentation mathématique),
4) « Résolution de problèmes » (pour apprendre à l'élève à analyser un énoncé, à choisir des pistes de recherche...),
5) « Rédaction » (maîtrise de la mise en forme de la solution).

2°) La dérivée dans le manuel *« Fractale »* de première S.

Les connaissances au programme qui sont inhérentes à la dérivation font ici l'objet d'un mode de présentation qui se démarque assez nettement de celui qui a été choisi dans les collections *« Déclic »* et *« Transmath »*. En effet, on trouve, groupées au sein d'un même chapitre, une introduction à la notion de limite finie d'une fonction en un point réel et les premières définitions (nombre dérivé en un point, vitesse instantanée, fonction dérivée,... etc.) et propriétés (formules de dérivation,... etc.) relatives à ce thème de la dérivation. Cette présentation, assez inhabituelle, semble tournée vers une recherche accrue de la fonctionnalité et de l'efficacité, la notion de limite permettant « d'outiller » utilement celle de nombre dérivé.

Ce chapitre (intitulé *« Limite finie en a d'une fonction. Dérivation. »*) est le cinquième du tome d'Analyse qui en contient dix, et les termes de « dérivée » ou de « dérivation » n'apparaissent plus dans les titres des cinq derniers chapitres. C'est le chapitre sept, intitulé *« Représentations graphiques. Asymptotes »*, qui fournit l'occasion d'aborder tout à la fois la généralisation de la notion de limite, ses interprétations et les applications de la dérivation (présentées sous ce titre dans le *« Déclic »* et le *« Transmath »* : étude des variations d'une fonction, lien avec le caractère bijectif d'une application, etc.). Autrement dit, il y a une sorte de parallélisme entre les chapitres cinq et sept, le chapitre cinq correspondant plutôt à l'apprentissage de notions locales (limite, nombre dérivé en un point réel, etc.) et le chapitre sept à l'étude d'applications de nature globale. L'introduction des notions de limites infinies et « à l'infini » au sein de ce chapitre, ce regroupement réalisé avec les théorèmes « globaux » liés à la dérivation (monotonie, bijection, ...etc.) se justifient par l'objectif commun qui est ici visé : mettre à plat un certain nombre d'outils pour les études de fonctions.

Ainsi y a-t-il une approche particulière dans le *« Fractale »*, que l'on peut qualifier de plus « pragmatique », pour laquelle la notion de limite semble en particulier davantage mise en valeur dans son statut « outil » que dans son statut « objet ». Par ailleurs, un problème tel que *« Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point problématique »*, en utilisant la définition du nombre dérivé par la limite du taux d'accroissement et en regardant à gauche et à droite, n'a pas cours dans ce manuel qui met d'abord en avant une recherche de simplification.

Les chapitres 8 (« Polynômes et fractions rationnelles ») et 9 (« Fonctions circulaires ») permettent d'utiliser encore les notions introduites dans le chapitre 7 traitant des applications de la dérivation.

E/ PRESENTATION DU MANUEL « FRACTALE » DE TERMINALE S.

1°) Organisation générale.

La structure des chapitres du manuel de terminale contient toutes les rubriques du manuel de première S et en présente deux supplémentaires par rapport à ce manuel : une rubrique intitulée *« le jour du Bac »*, qui présente un exercice ou un extrait de problème du baccalauréat entièrement résolu, et une autre, d'ordre méthodologique(*« fiche-méthode »*). Dans le manuel de première S, on trouvait en contrepartie, plus ponctuellement et en situation, des encarts intitulés « Méthode », placés donc au sein même des exercices commentés, ce qui n'est plus le cas ici, la fiche-méthode étant présentée séparément des exercices de la rubrique « Exercices commentés » et pouvant d'ailleurs porter tout à fait sur autre chose. On peut voir dans cette évolution une tentative pour aider les élèves à se montrer plus autonomes en terminale dans leurs choix de méthodes, tentative d'ailleurs à rapprocher de ce que l'on a pu observer dans le *« Déclic »* (en première S, présence d'une rubrique intitulée « Savoir-faire », suivie de tests d'application directe visant la mise en situation immédiate de ces données d'ordre méthodologique, et disparition en terminale de cette organisation).

Dans le manuel correspondant à l'enseignement *obligatoire*, certains exercices (ayant notamment trait à des démonstrations de cours) ou T.P sont repérables par un logo portant la mention « Spé ». Cela signifie, selon les auteurs, qu'ils sont davantage « dans l'esprit du programme de spécialité », destinés aux élèves suivant cet enseignement de spécialité, même si ces exercices et TP demeurent compatibles avec le programme de l'enseignement obligatoire. Il y a donc là une initiative tout à fait originale de la part des auteurs, et révélatrice d'une prise de position qu'ils tendent eux-mêmes à préciser, soulignant qu'ils ont voulu concevoir un ouvrage « *à deux vitesses* », dont « *l'objectif principal* reste de *préparer les élèves à l'épreuve du Baccalauréat* ». Alors que pour les autres manuels le distinguo entre « enseignement obligatoire » et « enseignement de spécialité » ne semble porter que sur l'existence d'un contenu supplémentaire dans le second cas (c'est, implicitement, ce qui parait découler de la non évocation de ce problème par ces ouvrages), le *« Fractale »* prend le risque d'imaginer des choix de stratégie différents dans la façon d'appréhender les Mathématiques. Selon que l'on aurait affaire à des élèves ayant opté pour un type ou l'autre d'enseignement, la gestion de l'enseignement obligatoire serait d'un genre ou d'un autre…

Cela nous conduit naturellement à deux remarques. D'une part, le *« Fractale »* confirme ici sa volonté de mettre en avant le souci d'efficacité (corrélative de succès pour les élèves), ce que confirme la présence de la nouvelle rubrique intitulée *« le jour du Bac »*. Il semble bien y avoir, à la clef, une révision plutôt à la baisse des exigences vis à vis des élèves ne subissant en Mathématiques que l'enseignement obligatoire. D'autre part, on peut se demander si cette optique du cours *« à deux vitesses »* selon le critère *« participer, ou non, à l'enseignement de spécialité »* est bien pertinente, dans la mesure où un étudiant ayant opté (ponctuellement) pour un enseignement de spécialité en Physique se destine assez souvent ensuite à un Deug Sciences, auquel cas il a besoin d'un enseignement d'une nature plus exigeante, même si le contenu en est allégé.

Notons que le *« Fractale »* de terminale S effectue une classification des exercices en « faciles », « moins faciles » et « difficiles » et non pas, comme le manuel de première S, en « très faciles », « faciles » et « plus difficiles ». A nous de repérer, dans ce qui suit, si cette différence de « terminologie » est révélatrice, ou non, d'une évolution concrète de la gamme d'exercices proposée, ou s'il s'agit d'un « faux indice ». Il convient cependant de relever tout de suite que pour 469 exercices répartis sur huit chapitres d'Analyse, on recense 208 exercices (44, 35%) catalogués comme « faciles », 181 (soit 38,59%) comme « moins faciles » et 80 (soit 17,06%) comme « difficiles », ce qui tend à montrer que la part du « facile », *selon les auteurs*, est nettement plus faible que dans l'ouvrage de première S (71,7%).

2°) La dérivée dans le manuel *« Fractale »* de terminale S.

Elle apparaît dans différents chapitres qui sont pratiquement les mêmes que ceux du *« Déclic »* et obéissent presque à la même progression. Tout d'abord la dérivée est en jeu en tant qu'outil, dans le chapitre 1 intitulé *« Limites et continuité »*, pour prouver la stricte monotonie de certaines fonctions, en vue d'établir l'existence et l'unicité de solutions d'équations sur un intervalle I. Puis elle est présente en tant qu'objet et outil dans le chapitre 2, de calcul différentiel, et réinvestie dans les chapitres 4 (fonction logarithme népérien) et 5 (fonctions exponentielles et puissances), 6 (équations différentielles) et 7 (calcul intégral) et enfin, plus sporadiquement dans le chapitre 8 (suites numériques).

La seule différence notable avec le *« Déclic »* tient dans la présence au sein du *« Fractale »* d'un chapitre 3 intitulé « Fonctions numériques », où sont regroupés des compléments de cours (centres et axes de symétrie, courbes asymptotes...) et les études de fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles et trigonométriques. Rappelons que ces études de fonctions sont insérées, au sein du *« Déclic »*, dans le chapitre de calcul différentiel. Notons aussi que ces différents types de présentation ont déjà été observés dans les manuels de première S : dissémination des études de fonctions dans le *« Fractale »* (chapitres 7 : Représentations graphiques, 8 : Polynômes et fractions rationnelles, et 9 : Fonctions circulaires), et regroupement au sein d'un chapitre « Applications de la dérivation » dans le *« Déclic »*.

F/ <u>PRESENTATION DU MANUEL « TERRACHER » DE PREMIERE S.</u>

1°) Organisation générale.

Ce manuel est structuré de la façon suivante :

- Avant le cours, on trouve une rubrique *« Introduction »* constituée de trois parties : présentation des objectifs du chapitre, des prérequis nécessaires et des activités préparatoires.
- Après le cours, vient la rubrique « Travaux pratiques », suivie des exercices et problèmes.

Ce qui est remarquable dans le *« Terracher »*, par rapport aux autres collections, c'est le fait que diverses rubriques habituelles (travaux pratiques, exercices corrigés, éléments de méthodologie) sont toutes regroupées au sein d'une seule. En effet, chaque rubrique de T.P est constituée de quatre parties : 1) présentation des problèmes à étudier, 2) résolution d'exercices liés à ces problèmes et aux techniques et méthodes à mettre en jeu, 3) présentation de points-méthodes associés, et pour finir, 4) présentation d'exercices d'application. Ce choix de présentation aboutit à des travaux pratiques assez longs, bien structurés et détaillés, avec des points-méthodes très explicatifs (fonctionnement, conditions de validité d'une technique...) tenant davantage compte de la complexité des situations envisageables, mais donc, en contrepartie, moins synthétiques et simplifiés que ceux des autres collections.

Les exercices sont subdivisés en trois parties : applications directes du cours, exercices (avec un test en vrai/faux et une reprise des questions évoquées lors des travaux pratiques) et enfin, problèmes mettant en jeu plusieurs thèmes du chapitre.

2°) La dérivée dans le manuel *« Terracher »* de première S.

Elle intervient de la même façon que dans le *« Déclic »* de première S, c'est-à-dire au sein de deux chapitres distincts, intitulés : « Dérivation » et « Applications de la dérivation », qui prennent place au terme de la partie du manuel d'Analyse consacrée à l'étude des fonctions numériques de la variable réelle. Le travail spécifique relatif à chaque type de fonctions (rationnelles, irrationnelles, trigonométriques...) s'effectue donc à l'intérieur même de ces chapitres, et les études de fonctions se situent dans le chapitre « Applications de la dérivation ».

Par ailleurs, on relève dans le *« Terracher »* de première S des objectifs plutôt à la hausse par rapport à ceux des autres collections. Ainsi, on constate la présence d'exercices où l'on fait étudier la dérivabilité d'une fonction en un point donné (problématique), non seulement dans le cas d'une fonction définie à l'aide d'une valeur absolue ou d'un radical (exemple : la fonction $x \to |(x-1)(x-2)|$ au point $x_0 = 1$), mais également dans celui d'une fonction définie (artificiellement) par deux expressions distinctes à droite et à gauche de ce point. Ce type d'exercice n'a été rencontré (au niveau de la classe de première), ni dans le *« Transmath »* ou le *« Fractale »*, ni même dans le *« Déclic »*. En outre, et d'un point de vue plus général, le *« Terracher »* comporte davantage d'exercices et de problèmes dans les chapitres les plus importants (en particulier ceux concernant la dérivation), que les manuels des autres collections.

G/ <u>PRESENTATION DU MANUEL « TERRACHER » DE TERMINALE S.</u>

1°) Organisation générale.

Elle est parfaitement identique à celle du « Terracher » de première S ; on retrouve les mêmes rubriques : « introduction » (avec objectifs, prérequis, et activités préparatoires), « cours »,

« travaux pratiques » (avec solutions, points-méthodes et applications) et enfin, une rubrique d'exercices et de problèmes.

2°) La dérivée dans le manuel « Terracher » de terminale S.

Comme pour les autres collections, la dérivée est présente dans presque tous les chapitres d'Analyse, qui portent pratiquement les mêmes titres que dans les trois autres collections et se succèdent également dans un ordre similaire. Notons seulement que la notion de primitive fait l'objet d'un chapitre à part, distinct du chapitre de calcul différentiel (et situé juste après lui), et également distinct du chapitre de calcul intégral (qui constitue l'avant-dernier chapitre d'Analyse).

H/ CONCLUSIONS.

D'une collection à l'autre, on rencontre à peu près le même canevas de rubriques, même si des nuances ont pu être observées concernant certaines d'entre elles, et tout particulièrement celles d'ordre méthodologique. Dans ce domaine, la volonté apparente de chaque collection d'aider l'élève à se familiariser à des démarches très standards, mais aussi, parfois, à lui permettre de viser le niveau « mobilisable » des connaissances, s'exprime de façon assez diverse, avec souvent une tentative pour faire évoluer le degré d'autonomie de l'élève entre la classe de première et celle de terminale.

Le *« Déclic »* et le *« Fractale »* se caractérisent par des points-méthodes assez simplifiés et concis, bien mis en parallèle avec des tâches très ciblées, tandis que les éléments d'ordre méthodologique du *« Transmath »* et du *« Terracher »* font l'objet de développements plus substantiels, rendant compte de la complexité de situations d'exercices plus variées. Dans le *« Fractale »* de première S, c'est la partie consacrée à l'enseignement modulaire qui remplit cette fonction.

La dérivée peut intervenir de deux façons différentes en première S : uniquement à la fin de la partie consacrée aux fonctions, avec reprise des notions et des types de fonctions étudiées au début de cette partie (cas du *« Déclic »* et du *« Terracher »*), ou plus tôt (cas du *« Transmath »* et du *« Terracher »*), et la dérivée est alors réinvestie dans des chapitres ultérieurs (trigonométrie, études de fonctions…). En terminale S, la dérivée intervient selon les mêmes modalités au sein des diverses collections : elle fait spécifiquement l'objet d'un chapitre (calcul différentiel), puis elle est réinvestie dans divers chapitres (fonctions logarithmes et exponentielles, calcul intégral, équations différentielles…) avec juste quelques nuances de programmation, d'un manuel à l'autre.

IV/ ANALYSE DES SUJETS DU BACCALAUREAT SCIENTIFIQUE.

A/ INTRODUCTION.

Nous avons réalisé cette analyse à partir de l'étude de 46 exercices ou problèmes pris parmi les sujets posés en Analyse à l'épreuve du Baccalauréat en 1994, 1995 ou 1996 (sessions de juin ou de septembre). Pour cette étude, étant donné le caractère très répétitif et standard des questions soumises dans l'optique de cet examen, nous avons utilisé ici une grille très *simplifiée,* constituée d'un seul tableau de classification (cf Annexe).

Nous mentionnons dans ce tableau les diverses tâches sollicitées (calculs de fonctions dérivées, étude des variations, détermination d'une équation de tangente, d'une primitive selon telle ou telle méthode... etc.), et à côté, le nombre de fois où elles sont sollicitées, si la réponse est fournie, ou non, dans l'énoncé de la question, s'il y a présence de paramètre(s) et si cette présence éventuelle modifie la nature de la tâche. Les indications techniques particulières du texte et les contextes de résolution sont présentés, les (rares) tâches sortant de l'ordinaire sont précisées. Les canevas de questions répétitifs sont indiqués, avec leur taux de fréquence.

Comme pour l'étude des manuels de lycée, les tâches d'un sujet de Baccalauréat situées dans *l'environnement* de la notion de dérivée sont, dans leur ensemble, tenues en considération, même lorsqu'elles sont déconnectées de cette notion. Ainsi, l'existence d'asymptotes ou de solutions à l'équation $f(x) = 0$, lisibles sur le tableau de variations (qui découle d'un calcul de dérivée), et plus généralement tout ce qui fait partie intégrante de l'étude globale d'une fonction (tâches graphiques, majorations,... etc.) est ici mentionné et analysé. Il en va de même de ce qui touche à la résolution d'équations différentielles, à la recherche de primitives et, par suite, à l'intégration (calcul d'aires, étude de suites d'intégrales). Par contre, les questions ayant trait aux suites numériques en tant que telles ne sont pas analysées, car les tâches qui les concernent sont en général coupées de l'étude d'une fonction, l'étude de suites récurrentes par la méthode du point fixe faisant exception à cette règle.

B/ RESULTATS.

1°) Résultats statistiques globaux.

L'analyse de ces épreuves de baccalauréat montre, en dépit d'une certaine variété des thèmes abordés (études locales, variations, tangentes, zéros d'une fonction, intégration, équations différentielles, encadrements... etc.) et des cadres mis en jeu (algébrique, graphique, numérique), une *focalisation* du travail relatif à chaque thème sur quelques tâches très ciblées, plus encore que dans les manuels de lycée.

Nous pouvons résumer la part de chaque thème dans cet environnement à l'aide du tableau présenté ci-dessous :

Différents Thèmes inhérents aux sujets de Baccalauréat :	Pourcentages :
Calculs de fonctions dérivées + variations :	18%
Calculs de limites et études locales / globales (continuité, dérivabilité) :	15,4%
Tracés et autres tâches graphiques :	**15,8%**
Intégration (directe/ par parties), calculs d'aires :	9,1%
Transformations et calculs algébriques, équations et inéquations, inégalités :	9,5%
Encadrements (fonctions et intégrales), images d'intervalles f(I) :	4,3%
Calculs numériques, val.approch /dichotomie	**7,6%**
Lire tableau de variations résumer des infos par un tableau de variations :	4,5%
Existence et unicité de solutions d'équations du type f(x) = 0 sur un int :	4,3%
Tangentes :	3%
Droites et courbes asymptotes :	2,8%
Monotonie /convergence de suites d'intégrales (In)	3%
Equations différentielles :	1,5%
Domaine de définition, parité, centres et axes de symétrie :	1,2%

On constate à la lecture de ce tableau que la part respective des tâches dans les cadres algébrique, graphique et numérique est de : 76,6%, 15,8% et 7,6%.

A partir du tableau détaillé de classification des tâches donné en annexe, nous observons que, dans près des deux tiers des questions posées, la réponse n'est pas suggérée et il n'y aucune indication particulière pour faciliter la résolution :

	Réponse non fournie, et pas d'indications	Réponse non fournie, mais des indications	Réponse fournie, mais pas d'indication	Réponse fournie, et des indications
Pourcentages :	65,3%	9,2%	24,4%	1,1%

Ce résultat peut paraître surprenant, mais il s'explique par le découpage des exercices et problèmes en suites de questions élémentaires, le plus souvent de nature *algorithmique*, et similaires d'un problème à l'autre (en général, seule la fonction étudiée change). Ainsi, au sein de 34% des questions posées, il n'y a ni indication, ni réponse suggérée, parce que ces questions portent sur un calcul de limite très simple[1], un calcul de fonction dérivée ou une étude de variations sans aucun caractère de technicité, ou encore un tracé de courbe ou de droite[2]. En outre, il convient de rappeler que les élèves disposent des calculatrices pour l'épreuve, ce qui leur permet ici de vérifier bon nombre des résultats obtenus (vu la nature des tâches sollicitées), lorsqu'ils ne sont pas fournis avec l'énoncé.

Dans ce qui suit, nous décrivons plus précisément, thème par thème, les types de tâches soumises aux élèves, les aides à la résolution fournies, les canevas de questions les plus fréquents.

2°) Analyse par thèmes.

Calculs de fonctions dérivées et étude des variations : Il y en a 89 en tout, dont 86 concernent des fonctions usuelles ordinaires du lycée, et trois, des fonctions du type « intégrale indéfinie ». Le résultat n'est fourni à l'intérieur même de la question qu'à douze reprises, mais dans vingt-cinq cas, la question suivante demande d'identifier le résultat obtenu avec une autre expression (factorisée par exemple), ou demande de constater que cette dérivée est du signe de telle autre expression, ou s'exprime en fonction d'elle. L'aide apportée par une telle question est alors *double* : permettre aux élèves de vérifier leur calcul, et faciliter l'étude des variations à venir. Sur 75 études de variations sollicitées, trois d'entre elles concernent des fonctions paramétrées[3], trois autres, des fonctions sous forme intégrale et, chose un peu plus étonnante, seulement deux des fonctions *trigonométriques*.[4]

Calculs de limites et études locales / globales : Comme vu plus haut, si les calculs de limites sont très fréquents dans ces sujets de Baccalauréat (12,9% des questions posées), il n'en va pas de même des études locales ou globales de la continuité ou de la dérivabilité (2,5%). Si la plupart des calculs de limites (88 sur 117) sont à réaliser sans aide ni indication de la réponse, les plus délicats (à ce niveau d'apprentissage) sont le plus souvent aidés. Ainsi, dans 26 cas sur les 29 restant, on rappelle aux élèves que $\lim_{x \to 0} x.\ln(x)$ vaut 0, ou bien que $\lim_{x \to 0} (\ln(x+1))/x = 1$, ou on leur indique une transformation algébrique

[1] Sans indétermination ou avec une indétermination que l'on peut lever au moyen d'une transformation algébrique immédiate (factorisation par le terme prépondérant le plus souvent).

[2] Pour certaines questions, justement celles portant sur un tracé de courbe ou de droite (asymptote, tangente...) ou par exemple sur la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, il n'est de toutes façons pas envisageable de fournir le résultat final aux étudiants !

[3] Mais l'introduction de paramètres n'introduit ici aucune discussion délicate. Dans l'un des cas, par exemple, le paramètre ne porte que sur la partie linéaire de la fonction ($x \to x^2\ln(x)+kx$). Cette introduction de paramètres permet seulement d'étudier une famille de courbes.

[4] Leur apprentissage concerne, il est vrai, davantage le programme de première S que de terminale S, mais on peut penser que les difficultés particulières qu'occasionne souvent leur étude sont aussi à la base de leur présence plus que « discrète » au niveau des sujets de Baccalauréat.

efficace de $\ln(e^x+1)$ pour comparer ce terme (à l'infini) à un polynôme en x, on leur propose un changement de variable (en 1/x, par exemple) ou une factorisation utile,... etc. Les rares cas de non dérivabilité en un point (quand le taux d'accroissement tend vers l'infini) sont présentés aux élèves, pour étude, sous un angle *graphique* : 1/ Calcul de la valeur de $\lim_{x \to 0} f(x)/x$, et : 2/ Que peut on en déduire pour la tangente en 0 ?... Mais il faut préciser que, le plus souvent, l'expression du taux d'accroissement pour l'étude de la dérivabilité en un point n'est pas fournie.

<u>Tracés et autres activités graphiques</u> : Les 78 tracés de courbes[5] et de droites (tangentes, asymptotes...) représentent 54% des 144 activités graphiques de cet environnement. Les autres activités graphiques sont assez diversifiées : traduire un problème d'intersection entre une courbe et une droite algébriquement, interpréter la position relative d'une courbe et d'une droite à partir de résultats obtenus[6], interpréter une intégrale en termes d'aire (ou la limite à l'infini d'une intégrale dont une borne est la variable), lire graphiquement le nombre de solutions d'une équation paramétrée du type $f(x) = k$,... etc. Le questionnement aide parfois l'élève en lui demandant de hachurer l'aire correspondant à l'intégrale en question, tandis que l'on rencontre aussi la question inverse : à partir d'une représentation graphique donnée sur laquelle une surface est hachurée, dire par quelle intégrale l'aire peut se calculer. Ces types de questions, qui isolent l'identification du terme intégral permettant d'évaluer une aire, du calcul de cette aire proprement dit, sont de nature à aider l'élève. L'interprétation graphique d'une *inégalité* entre <u>deux</u> intégrales, celle de l'*encadrement* d'une intégrale entre <u>deux</u> valeurs, la comparaison (aire des rectangles) entre somme des termes d'une suite à termes positifs et intégrale[7] sont aussi présents, à un degré moindre (six apparitions sur vingt-sept interprétations graphiques d'une intégrale en termes d'aires). Il y a donc sur ce thème une certaine <u>variété</u> qui s'exprime sans toutefois affecter le niveau de difficulté des questions posées (concernant les intégrales, c'est toujours la *même* idée qui est à la base de ces questions, même si la forme varie).

<u>Intégration et calculs d'aires</u> : Lorsqu'une intégration *par parties* est à effectuer, cela est toujours signalé par le texte[8]. Faute de quoi, le calcul d'intégrale ou de primitive sollicité se fait de manière directe (mise en relief de formes dérivées usuelles à partir des fonctions à intégrer). Les cas où la réponse n'est pas fournie dans l'énoncé sont majoritaires (76 cas sur 83 calculs), mais dès qu'une tranformation algébrique s'avère nécessaire pour obtenir les primitives recherchées, elle est indiquée (exemples : écrire la fraction $x/(x+1)$ sous la forme $1 - 1/(x+1)$, $f(x) = \sqrt{x}(1-x)$ sous la forme $x^{1/2}-x^{3/2}$, ou bien $\tan^2(x)$ sous la forme : $(1+ \tan^2(x)) - 1)$. Par ailleurs, le calcul d'aires s'effectue souvent en *deux* temps : dans une question on demande un calcul de primitive, puis il faut appliquer le résultat entre deux valeurs et multiplier ce résultat par un coefficient adapté (choix d'échelle) pour obtenir l'aire recherchée en cm^2. Ou bien encore, au moment du calcul d'aire proprement dit, il reste à intégrer une fonction très simple, l'essentiel du calcul de primitive ayant été réalisé

[5] Une seule courbe paramétrée, correspondant à un sujet de l'option de spécialité « Mathématique ».
[6] L'étude de la position relative de deux courbes est sollicitée 8 fois, pour 15 études de la position relative d'une courbe et d'une droite.
[7] Avec éventuellement en perspective l'étude d'une somme de Riemann (sans le dire).
[8] Il n'y a que deux cas où une *double* intégration par parties est nécessaire, et cette nuance est aussi prise en charge par l'énoncé.

dans la question précédente[9]... etc. Il y a aussi des problèmes où l'on demande de *dériver* une certaine fonction, le résultat obtenu étant précisément l'expression de la fonction que l'élève aura à intégrer à la question suivante, ou bien on demande : « Vérifier que g est une primitive de f ». Sur 18 calculs d'aires à réaliser, il n'y en a que cinq qui concernent des secteurs plus délicats à traiter (aires définies par la courbe et une droite oblique) que celui défini par l'axe horizontal, la courbe représentative de la fonction et deux droites verticales. Dans deux cas seulement, la tâche à réaliser est complexe, se compose de plusieurs sous-tâches qui ne sont pas détaillées par l'énoncé (calcul préalable d'un point d'intersection, utilisation d'une relation algébrique vérifiée par une borne α, inconnue, de l'intégrale pour simplifier cette dernière...). Il n'y a que quatre tâches plus originales que les précédentes, utilisant un peu plus le cours, sur ce thème de l'intégration. L'une consiste en la justification de l'existence de l'intégrale indéfinie d'une fonction, une autre porte sur la reconnaissance de la primitive s'annulant en zéro d'une fonction f à travers l'intégrale indéfinie de f entre 0 et x, et les deux dernières sur le fait que si deux fonctions ont même dérivée, elles ne sont a priori égales qu'à une constante additive près.

Transformations et calculs algébriques. Equations et inéquations. Inégalités : La part de questions (explicitement) relatives à ce type d'activités est assez importante (9,5%). Elle pourrait l'être encore davantage si l'on avait comptabilisé le nombre d'inéquations à résoudre découlant d'études de sens de variations. Cette importance s'explique par la présence de « questions-relais » au sein des divers problèmes d'Analyse. Exemple classique : un sujet de Baccalauréat fait étudier une fonction f, démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α (non calculable) sur un intervalle $[a,b]$ donné, puis demande d'en déduire une autre identité concernant α, servant dans la suite du problème, par transformation algébrique de l'égalité $f(\alpha) = 0$.

Encadrements de fonctions et d'intégrales. Images d'intervalles par une fonction. Les encadrements de fonctions sollicités proviennent pour l'essentiel de l'application de l'inégalité des accroissements finis en vue d'étudier une suite récurrente par la méthode du point fixe (encadrement de la fonction dérivée puis de la fonction d'origine). L'encadrement de la dérivée découle dans la plupart des situations de considérations purement algébriques, plus rarement de l'étude du signe de la dérivée seconde. Dans ce dernier cas, l'énoncé pilote le travail des élèves.

Calculs numériques : Présents à hauteur de 7,6%, ils constituent, comme le tracé de courbes ou de droites, une activité sans grand risque, ni difficulté, d'autant plus que les ordres de précision demandés sont à chaque fois peu élevés (10^{-1} ou 10^{-2}). La détermination d'un encadrement, ou d'une valeur approchée, de la solution réelle unique d'une équation du type $f(x) = 0$ sur un intervalle donné, selon la méthode par *dichotomie*, constitue la principale source de calculs numériques. Cependant, si ce type de question apparaît à vingt reprises dans les divers problèmes étudiés, l'encadrement numérique est fourni par l'énoncé (qui demande alors seulement à l'élève de le justifier) quatorze fois. Il s'ensuit que la méthode par elle-même (recherche du zéro par « tâtonnements » successifs) n'est vraiment à mettre en œuvre que dans six sujets. De plus, on remarque qu'elle ne fait l'objet d'une demande d'explication par l'énoncé que dans un seul sujet d'examen.

[9] L'élève doit « recoller » les morceaux.

Tâches liées au tableau de variations : On constate une présence non négligeable de « questions-relais », par exemple celle du type : *« Dresser le tableau des variations de la fonction f, en indiquant les limites aux bornes »* venant après une question sollicitant déjà l'étude des variations de la même fonction[10]. Cette seconde question, qui consiste juste à réunir différentes informations au sein d'un même tableau, est alors aisée, et n'a pas d'autre fin que d'aider l'élève dans son travail, en lui permettant de *synthétiser* ses réponses précédentes (parfois en vue des tâches qui suivront). De même, l'étude du signe de la fonction étudiée, sur tel ou tel intervalle ou sur tout l'ensemble de définition de cette fonction, constitue souvent une question en tant que telle, alors qu'il ne suffit plus, pour y répondre, que de lire le tableau de variations dressé précédemment, et éventuellement de placer les images d'une ou deux valeurs de la fonction dans ce tableau.

Existence et unicité de la solution d'une équation du type f(x) = 0 sur l'intervalle donné. La tâche du type : *« Justifier l'existence d'une solution unique à l'équation f(x)=0 sur l'intervalle [a,b] »* sollicite seulement, et de manière systématique, une argumentation très stéréotypée du style : *« f est continue, strictement monotone sur [a,b], et f(a), f(b) sont de signes contraires... »*. Sur 34 questions de ce type, deux seulement concernent une fonction paramétrée, et la présence d'un paramètre n'induit dans ces deux cas *aucune complexité* supplémentaire pour la tâche. Dans trois cas, on demande en outre de prouver qu'il n'y a pas de solution à l'équation sur d'autres intervalles précisés.

Tangentes, droites et courbes asymptotes : Il y a 16 déterminations standards d'équations de tangentes, et 11 questions d'un autre type (dont deux engagent des paramètres) concernant cette notion de tangente. Ces questions portent sur la condition de parallélisme avec une autre droite, la recherche du point où la tangente à une courbe admet un coefficient directeur donné à l'avance, ou bien la détermination du paramètre d'une fonction de telle façon que sa courbe admette en un point donné telle tangente,... etc. La recherche d'asymptotes horizontales ou verticales est guidée dans la moitié des cas, soit par une indication du type : *« Que peut on déduire du résultat de telle limite ? »*, soit par le fait que la réponse est *fournie* par l'énoncé. Dans le cas d'une asymptote oblique, la réponse est toujours fournie et l'on donne même parfois une indication technique (par exemple du type précédent, ou bien du type : décomposition préalable de la fonction, qui est une fraction rationnelle). A noter la présence d'*une seule* situation de courbes asymptotes entre elles (pour 24 droites asymptotes à une courbe), à déduire d'un résultat de calcul de limite.

Autres tâches : Nous passons sur les autres types de tâches minoritaires, signalés dans le tableau statistique ci-dessus, nous contentant juste de remarquer la très faible importance des équations différentielles dans cet environnement (1,5%).

3°) Fils directeurs généraux. Problèmes plus originaux.

Un certain nombre de problèmes ou de parties de problèmes sont construits selon des canevas de questions prédéterminés, répétés à l'identique, ou presque.

[10] Nous n'avons pas comptabilisé ici les cas où l'énoncé sollicite directement un *tableau* de variations plutôt que *l'étude* des variations de cette fonction, ce qui constitue un autre type de scénario.

Citons en particulier les deux canevas suivants :

(1) Calcul de limites pour f → calcul de la dérivée f '→ étude des variations de f → existence et unicité d'une solution α unique de l'équation f(x) = 0 sur un intervalle donné → valeur approchée ou encadrement de α à 10^{-1} ou 10^{-2} (schéma de principe repéré vingt fois en 46 problèmes).

(2) Pour la fonction f et l'intervalle I, on a : $f(I) \subset I$ → la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in I$ et $u_{n+1}= f(u_n)$ ($\forall n\in\mathbb{N}$) est bien définie → $|f'(x)| \leq a < 1$ sur I → pour tous x, y de I, $|f(x)-f(y)| \leq a|x-y|$ → pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha| \leq a|u_n - \alpha|$ → pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_n-\alpha| \leq k.a^n$ → $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ par le théorème des gendarmes → trouver n_0 tel que $|u_n-\alpha| \leq 10^{-2}$ → calculer u_{n0} (schéma de principe repéré dix fois en 46 problèmes).

On peut citer cinq problèmes sur les quarante-six analysés, dont le thème et/ou une partie du contenu est un peu plus original que dans les autres dans le contexte du lycée :

(1) Problème sur la recherche des tangentes communes aux fonctions logarithme népérien et exponentielle (introduction de paramètres, considérations de nature géométrique,... etc.)

(2) Etude de la suite des zéros d'une équation paramétrée f(x) = k ($k\in\mathbb{N}$).

(3) Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n de N par $u_n = n^n\sqrt{n} / e^n n$!

(4) Calcul de l'intégrale entre 0 et 1 de $f(t) = 2\sqrt{t} / 1+t$ par considération des deux fonctions : h(x) = l'intégrale indéfinie de f entre 0 et x, et $k(x) = \tan^2(x)$, et de leur composée hok. Méthode : On dérive l'expression de hok(x) en utilisant le théorème de dérivation de la composée de deux fonctions, on obtient la fonction $x\to 4\tan^2(x)$, dont on recherche les primitives, puis on tient compte du fait que hok(0) = 0 et l'intégrale recherchée est alors égale à h(1), donc à hok(π/4).

(5) Calcul de la limite de la suite $(S_n)_{n\in N}$ définie par $S_n = 1-1/2+1/3...+(-1)^{n+1}/n$.

4°) Conclusions.

Nous avons pu observer que l'environnement des sujets de Baccalauréat analysés présente les caractéristiques générales de celui des manuels de lycée, mais *plus accentuées*, avec un recentrage très fort sur quelques connaissances et savoir-faire de base (calcul de limites, de dérivées et de primitives pour des fonctions usuelles, étude des variations, interprétation d'une intégrale en terme d'aire, théorème des bijections,... etc.) et un *découpage* plus marqué des tâches, mettant notamment bien en relief les procédures algébriques[11] utilisées.

Un calcul d'aire peut ainsi s'exécuter selon trois phases : calcul d'une primitive, identification de l'intégrale qui est susceptible d'intervenir dans le calcul d'aire, et utilisation du calcul de primitive initial pour atteindre l'objectif visé (ajustement éventuel de la fonction, de l'unité

[11] Parfois même les plus simples : certaines questions intermédiaires nécessitent juste d'utiliser la propriété de linéarité des limites ou des intégrales.

d'aire choisie). La présence de paramètres est ici très rare (2,5% des cas), les situations étudiées concernent toutes des fonctions usuelles *particulières*, la dimension « outil » des notions est privilégiée dans une optique de pure application. Les questions posées ne sollicitent guère de réflexion personnelle, et on note au contraire la présence de questions intermédiaires susceptibles d'effacer les plus petits sauts conceptuels que l'élève aurait autrement à effectuer pour résoudre certaines questions. C'est, par exemple, la forme factorisée d'une expression dérivée qui est fournie pour faciliter l'étude des variations de la fonction, c'est la décomposition de la fraction x/(x+1) en 1-1/(x+1) qui est suggérée pour obtenir une primitive de cette fraction, afin que l'intégration par parties de la fonction x→ ln(x+1) ne pose plus de problèmes techniques à la question suivante. Les tâches soumises sont élémentaires, standards, purement algorithmiques, il n'y a pas de démonstrations, ni de contre-exemples qui soient sollicités. Les questions originales sont très minoritaires.

V/ CONCLUSIONS SUR L'ETUDE DES MANUELS DE LYCEE.

L'étude de quelques manuels de lycée a montré comment, à travers une même organisation, assez complexe, de chacun des chapitres, ces manuels mettent bien en avant certaines pratiques précises définissant les principaux enjeux, en classes de première et terminale scientifiques, dans l'apprentissage de la notion de dérivée prise dans son environnement. Ces pratiques institutionnelles tendant à devenir, à la lecture des statistiques établies sur ces manuels, très *majoritaires*, apparaissent au niveau du cours à travers la présence d'exercices types corrigés et de fiches méthodologiques, et se manifeste au sein des exercices, notamment par l'existence de *canevas* d'exercices très répétitifs, tous centrés sur une technique et/ou une technologie (application d'un théorème) donnée(s).

Conclusions concernant la classe de première S :

En classe de première S, dans l'optique d'un rapport initial à la notion de dérivée, les exercices d'un même canevas se distinguent très peu les uns des autres, visant une évolution par « petites touches » de l'*autonomie* de l'élève. Le champ d'exercices est aussi limité par le panel de fonctions *usuelles* auxquelles l'élève a accès, encore restreint à ce stade de l'apprentissage (fonctions polynômes, fractions rationnelles, irrationnelles, voire fonctions trigonométriques).

Les tâches de calcul sont majoritaires. Les tâches graphiques, qui sont essentiellement du type *« reconnaître »* (un nombre dérivé, une tangente...) et n'appellent pas un travail de *production* personnel, restent très scolaires en raison de la présence d'*indicateurs* très marqués sur les graphes présentés dans les exercices (présence d'un quadrillage, tangente mise en valeur, points à coordonnées entières privilégiés). Il s'agit toujours de tâches isolées, explicitement sollicitées, qui n'impliquent pas le graphe dans sa *globalité.*

Bon nombre de tâches constituées d'une sous-tâche de calcul et/ou de l'application d'un théorème ou d'une définition ne concernent pas directement, voire pas du tout, la dérivée. Elles procèdent donc d'une *mise en perspective* de la notion de dérivée et de ses applications par rapport à des connaissances plus anciennes. La mise en évidence d'un certain nombre de connections, de l'agencement de ces connaissances donne là encore lieu à des batteries d'exercices en vue d'une routinisation. Il est essentiel de souligner que dans ce contexte, les quelques tâches complexes rencontrées sont le plus souvent celles qui *ne concernent pas* la dérivée. D'autre part, il est clair qu'en contrepoint de cette préférence qui est donnée au travail des « gammes », bon nombre de problèmes, par exemple ceux liés à l'étude de fonctions un peu pathologiques du point de vue de la dérivabilité en certains points (fonctions comportant des valeurs absolues ou des radicaux) sont *marginalisés* à dessein.

Le rôle des définitions reste dans ce contexte assez limité, car le resserrement des tâches sollicitées autour de quelques situations centrales et objectifs prioritaires permet des prises de relais efficaces. Par exemple, les formules générales de dérivation des fonctions permettent de calculer des nombres dérivés dans la plupart des cas de fonctions usuelles et rendent en partie obsolète la définition du nombre dérivé dans le champ de pratiques considéré.

Les aides à la résolution sont *multiformes*. Elles vont de l'encart méthodologique fournissant une sorte de plan d'action ou de programme des tâches à accomplir successivement face à un type de problème standard au niveau considéré, à des aides encore beaucoup plus *locales* au sein d'un énoncé donné. Elles peuvent se situer à un niveau *explicite* (réponse présente dans le libellé d'une question) ou *implicite* (par exemple, au sein d'exercices antérieurs du même type, dans le découpage très fin d'une tâche en plusieurs sous-tâches sollicitées par l'énoncé). On repère ce que nous avons appelé des *« sillons »*, autrement dit des suites de questions très directives qui se répètent d'un exercice à l'autre. Mais ces aides peuvent aussi être *évolutives*, diminuer d'un exercice à l'autre afin de favoriser une certaine prise d'autonomie de l'élève, dans un contexte qui, cependant, reste toujours assez restreint.

Les concepts, qu'ils soient liés à la dérivation ou non, sont plus souvent mis en valeur dans leur dimension *« outil »* que dans leur dimension *« objet »*, et lorsque c'est la dimension *« objet »* qui est en jeu, on reste en général dans le domaine de l'application simple d'une définition et non du questionnement des notions. C'est donc bien la recherche d'une certaine opérationalité qui est l'enjeu essentiel, presque exclusif, des pratiques mises ici en valeur. Cela a naturellement des conséquences au niveau cognitif, à travers les *rapports au savoir* qui se construisent. Ainsi, certains aspects du travail de *conceptualisation* sont favorisés par rapport à d'autres : le passage de la fonction dérivée au nombre dérivé (par évaluation de la valeur au point considéré) est bien davantage mis en exergue dans la pratique des exercices, que le passage inverse du nombre dérivé, évalué en un point *quelconque* par sa définition, à la fonction dérivée. De même, dans l'apprentissage de la définition du nombre dérivé par approximation affine, l'aspect *« application aux calculs numériques approchés »* prend le pas sur l'aspect *« analyse »* (approximation locale d'ordre 1), l'élève se situant encore dans un rapport initial à la notion de limite. Le panel de fonctions auxquelles on se limite crée des règles, tandis que la recherche d'une certaine fonctionnalité rentre parfois *en conflit* avec les aspects conceptuels (par exemple, nécessité en classe de première S, de supposer une fonction f dérivable, strictement monotone et changeant de signe sur un intervalle I pour pouvoir dire ensuite que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur I, le concept de continuité n'étant pas au programme).

Notons encore que la présence de paramètres dans certains (rares) exercices, n'amène guère, dans l'ensemble, l'exigence d'une réelle *flexibilité cognitive* de la part des élèves, car cette présence est là encore pondérée par la simplicité des fonctions alors considérées (en général polynomiales) et le fait que les paramètres sont plus souvent situés dans les valeurs d'abscisses des points considérés que dans l'expression analytique des fonctions elles-mêmes. Les changements de cadres nécessaires sont quant à eux presque toujours *pilotés* par l'énoncé. Enfin, le travail de formalisation et de démonstration occupe une place très *marginale* dans cet environnement. Les connaissances sont mises en jeu essentiellement au niveau *« technique »*.

Conclusions concernant la classe de terminale S :

En classe de terminale S, où la dérivée est désormais un objet auquel les élèves sont déjà un peu familiarisés, les aspects *« consolidation des acquis »* (surtout dans l'objectif du Bac) et *« réinvestissement des connaissances antérieures (concernant ou non la dérivée) dans de* *nouveaux contextes »* jouent un rôle primordial. La dérivée est réinvestie dans de nouveaux contextes, assez variés : études de nouvelles fonctions (logarithme et exponentielle), équations différentielles, intégrations par parties, études de suites récurrentes par la méthode du point fixe,... etc. Tout un travail de reprise sur la notion de dérivée, notion à resituer par rapport à des objets neufs, et à faire fonctionner parfois dans des situations non rencontrées en classe de première S, devient un objectif central aboutissant à terme à la résolution de problèmes de *synthèse*.

Il ressort de notre étude que la réalisation de ces objectifs ne va pas de pair avec une évolution très nette sur un plan qualitatif de la nature des tâches sollicitées entre les classes de première et de terminale. On peut d'ailleurs estimer, à travers l'observation des manuels, que la consistance même des transitions à assumer ici semble au moins en partie économiquement incompatible avec une approche conceptuelle qualitativement différente. On note ainsi que le taux de tâches de nature calculatoire est en augmentation, tandis que les tâches graphiques, en nette diminution, n'ont que faiblement évolué lorsqu'elles concernent la dérivée. Par exemple, il n'y a toujours pas de tâches *de production* correspondant par exemple à la réalisation de graphes à partir de certaines informations sur la fonction et sa dérivée. La démonstration et la formalisation n'occupent pas une place plus importante. Une recherche accrue d'efficacité fait que les concepts sont plutôt *moins problématisés* qu'en classe de première, où les éclairages graphiques et numériques, la place donnée à des notions telles que celle de vitesse instantanée ou d'approximation affine, étaient plus importants.

La répétitivité des questions est moins importante qu'en première S, mais cela est surtout dû au fait que l'apport de connaissances *nouvelles* du point de vue de la dérivation est nettement plus faible. Les quelques notions vraiment nouvelles du programme (inégalités des accroissements finis, dérivées successives, notion de primitive,... etc.) font, comme en première S, l'objet d'exercices très répétitifs visant une certaine routinisation de tâches standards requérant une technique bien isolée. Cependant, il convient aussi de noter que les aides ne font plus autant l'objet de progressions *linéaires* (par exemple, suppression d'une information d'un exercice au suivant) que dans les manuels de première : à présent, on ajoute une information, on en retire une autre, on ajoute des paramètres, on modifie plus substanciellement les conditions de résolution de la tâche d'un exercice à l'autre. Une certaine flexibilité est donc parfois sollicitée, mais dans un champ qui reste tout de même très restreint, bien que les canevas de questions soient en évolution. En contrepartie, on remarque d'ailleurs que *davantage* de réponses que dans les manuels de première S sont fournies.

Quelques nouvelles tâches apparaissent aussi dans cet environnement, permettant ainsi d'apprécier plus précisément la façon dont est pris en compte le degré de familiarisation à la dérivée des élèves de terminale, *par rapport* à ceux de première. On peut citer par exemple l'étude d'une fonction f par étude préalable d'une fonction auxiliaire g : l'étude des variations de cette fonction auxiliaire permet l'étude de son signe, et comme la dérivée de f s'exprime simplement en fonction de g, on peut en déduire les variations de f. Cependant, ce type de tâche complexe est systématiquement décortiqué dans les manuels et n'induit aucune sous-tâche qui ne soit du niveau de première S. L'élève de terminale S n'est jamais placé dans des circonstances où il peut prendre du recul face à une telle tâche complexe.

Du point de vue de la nature des pratiques, on retrouve donc beaucoup de *similitudes* avec la classe de première S, avec une mise en fonctionnement des connaissances essentiellement au niveau technique, surtout si l'on considère les tâches ayant trait à des objets neufs, et très peu de questionnement des concepts, surtout destinés à l'application dans des cas *particuliers*. La limitation du champ des possibles reste très preignante, en dépit de l'enrichissement au niveau des fonctions usuelles mises en jeu. Par exemple, le théorème fournissant l'expression de la dérivée de la composée de deux fonctions n'est guère utilisé en tant que tel, et fait surtout l'objet des particularisations utiles aux pratiques *effectives* : les expressions $f'e^f$, f'/f, $f'/2\sqrt{f}$, des dérivées des fonctions e^f, $ln\,|f|$, ou $\sqrt{f}$, sont appliquées au quotidien, et constituent ainsi le sous-produit le plus important de ce théorème pour les situations abordées.

D'un manuel à l'autre, l'ensemble des caractéristiques que nous venons de décrire restent stables, même si les modalités de présentation des exercices diffèrent.

Les sujets de Baccalauréat.

Ils se cristallisent plus nettement encore que les exercices et problèmes des manuels de lycée sur quelques pratiques institutionnelles très ciblées, aidant pas à pas l'élève par un découpage systématique des questions en sous-tâches élémentaires et la donnée de nombreux résultats intermédiaires.

Quelques questions essentielles avant l'étude des exercices de DEUG A :

Prenant appui sur la théorie anthropologique de Chevallard, il nous appartient donc à présent de cerner et de caractériser les *pratiques* rencontrées au niveau de la première année de DEUG A, en vue de mieux saisir les problèmes de transition institutionnelle entre lycée et université. A cet égard, plusieurs questions nous semblent devoir jouer un rôle de fil directeur pour nos investigations :

1) Peut-on distinguer en DEUG A, l'existence de pratiques institutionnelles *majoritaires*, et dans l'affirmative, de telles pratiques sont-elles mises en exergue de façon aussi précise qu'au lycée, offrant alors à l'étudiant une bonne *lisibilité* des enjeux d'apprentissage et des attentes au niveau du DEUG A ?

2) Le *nombre* et la *complexité* de telles pratiques institutionnelles évoluent-ils dans des proportions « raisonnables » au cours de la transition secondaire / supérieur ? Ces pratiques sont-elles aussi ciblées et délimitées à l'université qu'au lycée ?

3) L'institution universitaire et ses acteurs fondent-ils leurs exigences en prenant bien la mesure des pratiques *effectives* de l'enseignement secondaire, ou bien, par exemple, envisagent-ils le problème de la transition exclusivement du point de vue des contenus, en termes de « notions au programme », oubliant ainsi le rôle joué par la nature du *travail technique* lié aux tâches sollicitées aux *deux* niveaux ?

4) En lien avec les interrogations précédentes, peut-on affirmer (ou non) qu'il y a une prise en compte suffisante, au niveau du supérieur, du travail de *« routinisation »* nécessaire à l'apprentissage des tâches sollicitées ?

CHAPITRE V : ETUDE DE FEUILLES DE TRAVAUX DIRIGES DE PREMIERE ANNEE DE DEUG A.

I/ INTRODUCTION A L'ETUDE DES FEUILLES DE TRAVAUX DIRIGES EN DEUG A : EVOLUTION DE LA GRILLE D'ANALYSE.

Différents facteurs nous ont amené, en vue de l'étude des exercices et problèmes de DEUG A ayant trait à la dérivée et à son environnement, à faire évoluer notre grille initiale d'analyse.

Tout d'abord, les hypothèses dégagées de *l'étude théorique* (chapitre I de cette thèse), concernant l'évolution des pratiques et des besoins dans la transition lycée/université, nous ont conduit à réévaluer l'importance de certaines rubriques, éventuellement à en prévoir de nouvelles. Cette seconde grille s'est construite et affinée au fur et à mesure qu'elle se remplissait à partir d'une mise à l'épreuve progressive de ces hypothèses. D'autre part, une relative « lourdeur » constatée au niveau de la mise en fonctionnement de la grille élaborée pour le lycée, et notre volonté de mettre surtout en relief, les différences essentielles entre les environnements d'exercices des deux institutions, nous a poussé également à rechercher certaines *simplifications* pour l'élaboration de cette nouvelle grille. Enfin, le choix réalisé de centrer notre travail, au niveau du DEUG, sur l'analyse d'exercices pris au sein de feuilles de travaux dirigés utilisées dans différentes universités, plutôt que sur l'étude d'exercices issus de divers manuels, était également de nature à amener des modifications pour la grille.

Ainsi, la mise en perspective, constatée au sein des manuels de première et de terminale, de pratiques institutionnelles centrales dans la culture du lycée, s'affirme particulièrement à travers tout un scénario d'activités préparatoires, de tests, de travaux pratiques, d'exercices corrigés, de points-méthodes, que l'on ne retrouve plus dans des feuilles de travaux dirigés de DEUG A. Dans le contexte des manuels de lycée, le scénario des exercices et problèmes proposés suit un fil directeur précis, ce qui n'est pas a priori le cas dans les fiches de travaux dirigés de DEUG A (par ailleurs plus représentatives des pratiques réelles de l'institution universitaire que les exercices de manuels, ce qui justifie notre choix méthodologique). On pouvait ainsi raisonnablement penser, par exemple, qu'un certain nombre d'aides à la résolution (notamment implicites), qui étaient répertoriées dans la grille initiale, allaient disparaître, rendant plus délicat pour l'étudiant le décryptage des attentes institutionnelles. Une *simplification* dans la conception de la nouvelle grille, notamment au niveau du tableau des aides à la résolution, devait alors en découler. On pouvait également s'attendre, à présent, à ce que certains exercices laissent aux étudiants le choix de la méthode à utiliser pour résoudre telle ou telle question, alors que dans les manuels de lycée, la *nature* et la *forme* des questions posées ainsi que la *culture ambiante* dirigeaient les élèves de façon quasi systématique vers un même type de solution. La seconde grille devait tenir compte de cette évolution induisant la nécessité d'une autonomie nouvelle.

Choix réalisés pour l'évolution de la grille d'analyse :

Notre nouvelle grille s'est finalement constituée de trois tableaux au lieu de cinq, dont les thèmes sont les suivants :

1) Décomposition des tâches selon les divers types de sous-tâches,
2) Classification selon le degré d'autonomie sollicité, aides ou absence d'aides,
3) Analyse selon un statut outil / objet, types d'objets, fonction et environnement (contextes).

Nous avons en effet estimé préférable, à l'expérience de l'analyse des manuels du secondaire, de ne plus construire de tableaux concernant les « *cadres* », et les « *registres* », de telles classifications nous étant apparues assez peu instructives pour l'étude qui nous concerne ici. En revanche, une rubrique consacrée aux changements de cadres et de points de vue figure dans le troisième tableau portant sur les objets rencontrés et les contextes dans lesquels ils sont mis en jeu. On indiquera alors si le changement de cadre ou de point de vue sollicité est suggéré ou non par l'énoncé de la question posée dans l'exercice.

Les « Thèmes » choisis pour figurer dans la nouvelle grille, tenant compte de l'évolution des contenus présents dans l'environnement de la dérivée entre le lycée et l'université sont les suivants : « *Continuité et dérivabilité* », « *Limites* », « *Fonctions dérivées, dérivées successives et convexité* », « *Etudes de variations* », « *Equations, inéquations, bijections* », « *Théorème de Rolle et formule des accroissements finis* », « *Formules de Taylor* », « *Primitives et intégrales* », « *Equations différentielles* », « *Suites numériques* ». D'autres choix de thèmes étaient également possibles, et nous aurions pu notamment faire figurer un thème « *Nouvelles fonctions* » ou un thème « *Fonctions vectorielles* ». Ces deux options ont été écartées pour des raisons très différentes.

Concernant les nouvelles fonctions (trigonométriques réciproques et hyperboliques directes ou réciproques), leur introduction ne constitue pas en DEUG A un enjeu conceptuel essentiel au niveau de la transition secondaire / supérieur, et leur présence ne semble pas de nature à modifier les rapports des étudiants au concept de dérivée, une transition similaire ayant déjà eu lieu en terminale S avec l'introduction des fonctions logarithme et exponentielle. Mais, bien que n'ayant pas fait le choix de ce thème, il nous appartient, lorsqu'une tâche porte sur une nouvelle fonction, de le noter dans la grille, car cela risque d'être source de difficultés particulières (peut-être sous-estimées par l'institution universitaire), qui peuvent d'ailleurs se cumuler à d'autres difficultés davantage liées au concept de dérivée. Concernant les fonctions vectorielles, leur intérêt, par rapport à la notion de dérivée, est surtout lié à l'étude des points stationnaires et à la généralisation des formules de Taylor. Il nous a semblé donc plus pratique de ranger les exercices concernant de telles fonctions au sein de la rubrique « *Formules de Taylor* ». Il en va de même des exercices portant sur des calculs de développements limités usuels.

Le tableau de décomposition des tâches selon les divers types de sous-tâches n'a guère évolué. On y retrouve les cinq types de sous-tâches : sous-tâches *graphiques*, de *calcul*, applications de *définitions*, applications de *théorèmes*, et sous-tâches *liées au raisonnement*. Cependant, le contenu de deux de ces rubriques est, selon nous, amené dans les faits à changer sensiblement.

Ainsi, nous nous attendons à ce que le volume de tâches graphiques diminue fortement en DEUG A, et que certaines rubriques, telles que « *lecture de tracés* », se vident presque totalement, tandis qu'apparaîtra la nécessité de tracés *qualitatifs* non sollicités par l'énoncé en vue de réfléchir à un problème ou de trouver un contre-exemple. De même, au niveau des « *sous-tâches liées au raisonnement* », rubrique « patchwork » imaginée pour mieux décrire la variété des types de questions posées dans les manuels de lycée, nous pensons qu'il y aura un resserrement autour de la production de démonstrations et de contre-exemples, avec nécessité éventuelle d'un travail de formalisation.

La question essentielle qui est posée ici et à laquelle doit nous permettre de répondre le remplissage de ce tableau est celle de la répartition nouvelle des sous-tâches sollicitées, constitutives des diverses tâches. En particulier, les sous-tâches *de calcul* occupent-elles toujours une place aussi importante qu'au lycée dans cette répartition ?

On mentionne dans ce tableau le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable ou disponible) s'agissant d'appliquer un théorème ou une définition, comme cela a été réalisé au sein de la grille d'analyse précédente. Notons encore qu'il n'y a plus, dans le tableau, de colonne spécifiant le genre d'exercice observé (test, T.P, exercice ou problème,... etc.), parce que ce type de distinction n'a pas cours au sein de feuilles de travaux dirigés.

Le tableau dit de « *classification selon les aides à la résolution* », utilisé pour décrire les exercices des manuels de lycée, est à présent rebaptisé en tableau de « *classification selon le degré d'autonomie sollicité* ». Cette modification du titre est liée au fait qu'il y a beaucoup moins d'aides à répertorier au niveau des fiches de DEUG et qu'il y a lieu, en revanche, de mentionner tous les cas ou une absence d'aide au sein de l'exercice induit pour l'étudiant un saut qualitatif nouveau dans la difficulté : cas où un résultat intermédiaire indispensable pour continuer l'exercice n'est pas mentionné alors qu'il y a un fort risque d'erreur de calcul pour l'obtention de ce résultat, cas où il y a un cumul des difficultés techniques et / ou conceptuelles pour la résolution de la question, cas où une certaine flexibilité cognitive est requise,... etc. Les trois dernières colonnes du tableau conçu pour les manuels de lycée ont ainsi disparu : elles concernaient le rattachement à un point-méthode, la référence à un exercice corrigé et la description des aides à la résolution *les plus significatives* (systématiques) de l'environnement donné. La présence de ces trois rubriques était fortement liée à une mise en perspective de certains enjeux précis, à un scénario d'enseignement, qui sont transmissibles à travers un ouvrage mais pas au sein de feuilles de travaux dirigés ordinaires. En contrepartie, de nouvelles rubriques font leur apparition dans le tableau de « *classification selon le degré d'autonomie sollicité* ». On peut ainsi mentionner le taux de tâches complexes (pratiquement négligeable dans les exercices des manuels de lycée, et prévu en nette augmentation dans les fiches de DEUG), et pour chaque tâche complexe, le nombre de sous-tâches dont elle se constitue, que l'on peut considérer comme « compilées », ou « routinisées », au terme de l'enseignement secondaire. On indique aussi le taux de tâches réalisables de *différentes manières* et si l'énoncé suggère à chaque fois une voie plutôt qu'une autre. Deux autres nouvelles colonnes figurent dans le tableau : l'une d'elle concerne les « absences d'aides », notamment celles telles que décrites ci-dessus, et l'autre, la présence de choix à réaliser de façon autonome (schémas, contrôle de la cohérence, utilisation de références,...).

Il nous semble important de répertorier, notamment au moyen de ces rubriques, les cas où l'étudiant est confronté à une situation *inhabituelle* (par exemple, liée au travail dans un monde fonctionnel qui n'est pas celui du lycée), et de noter si ces types de situations font l'objet d'une *prise en charge* particulière de l'énoncé, ou sont répétées et travaillées individuellement de façon spéciale, ou bien si au contraire elles interviennent de façon « *sauvage* », pouvant laisser l'étudiant démuni devant la variabilité des questions soulevées. L'objectif est aussi d'en déduire, à terme, quels types de routinisation, ressortent du travail en classe au niveau du DEUG A, de quelles tâches et dans quels contextes.

Enfin, en vue d'atteindre cet objectif, on retrouve aussi, dans ce tableau de classification, quatre rubriques qui étaient déjà utilisées pour caractériser l'environnement d'exercices et de problèmes des manuels de lycée. Elles concernent :

a) les principaux découpages rencontrés de tâches complexes en sous-tâches,
b) les indications techniques (ou rappels de cours) figurant dans les énoncés,
c) le nombre de réponses fournies, explicitement, implicitement, partiellement, par rapport au nombre de questions posées,
d) les répétitions d'exercices ou de questions du même type.

Il est en particulier essentiel, ici, de voir si l'on retrouve des canevas d'exercices répétitifs, avec à chaque fois le même scénario d'aides à la résolution, et des enjeux bien cernés, comme c'était le cas dans les ouvrages de lycée.

Le troisième et dernier tableau de classification de la grille permet une analyse des notions en jeu dans leur dimension « outil » ou « objet », et une analyse de l'environnement, des contextes dans lesquels elles sont mises en jeu. Nous avons repris, dans l'ensemble, les mêmes rubriques que celles qui figuraient dans la grille construite pour l'étude des exercices et problèmes des manuels de lycée, avec cependant quelques enrichissements. Ainsi, une nouvelle colonne est consacrée aux difficultés particulières de nature conceptuelle, aux obstacles éventuels, et à la façon dont ils sont pris en charge par l'énoncé, tandis qu'une autre colonne prend en compte les difficultés de nature logique inhérentes aux situations rencontrées. On retrouve notamment les rubriques consacrées au degré de généralisation des diverses tâches, à la présence ou non de paramètres (explicite ou implicite), et on a ajouté une rubrique relative au degré de formalisation rencontré ou sollicité au sein des exercices, ainsi qu'une rubrique permettant de relever les changements de cadres nécessaires, sollicités ou non par l'énoncé. Certaines rubriques du tableau constitutif de la grille utilisée pour l'analyse des manuels du lycée, telles que celles relatives à la limitation du champ et aux conséquences (théorèmes en actes, processus d'algébrisation,... etc.) pouvant en découler, n'ont pas été reconduites pour l'élaboration de ce nouveau tableau.

Ce dernier doit nous permettre de dégager quelle évolution est en jeu du point de vue des rapports au savoir dans la transition secondaire / supérieur : Quelles sont les nouvelles exigences au niveau *conceptuel* ? Est-ce *l'opérationnalité* qui reste le seul enjeu dans les contextes proposés, ou y a-t-il un *questionnement* du savoir qui est visé, comme nous en avons fait l'hypothèse ? Quelles sont les demandes sur des objets *neufs*, et quelles exigences y a-t-il au niveau de la familiarisation vis à vis de notions plus *anciennes*, (notamment) relatives à la dérivée ?

II/ ETUDE DES FEUILLES DE TRAVAUX DIRIGES ISSUES DE L'UNIVERSITE DE MARNE-LA-VALLEE.

A/ DEGRE DE COMPLEXITE DES TACHES : DECOMPOSITION SELON DIVERS TYPES DE SOUS-TACHES.

1°) Répartition générale selon les divers types de sous-tâches.

On recense, au sein de ces feuilles d'exercices, 806 sous-tâches de nature calculatoire, pour 625 applications de théorèmes, 234 applications de définitions, 176 sous-tâches liées au raisonnement, et seulement 49 sous-tâches de nature graphique, dans l'environnement de la dérivée. Nous donnons ci-dessous la répartition statistique qui en découle, selon les cinq types de sous-tâches répertoriés, avec, pour comparaison, les résultats qui avaient été obtenus lors de l'analyse du manuel de terminale S de la collection « Déclic » :

	Feuilles de travaux dirigés de DEUG A :	Rappel Terminale S (manuel « Déclic »)
Tâches graphiques :	**2,59%**	8,88%
Tâches de calcul :	**42,65%**	53,29%
Utilisation de définitions :	**12,38%**	8,79%
Applications de théorèmes et de propriétés :	**33,07%**	24,64%
Sous-tâches liées au raisonnement :	**9,31%**	4,40%

On observe ainsi une nette évolution des ratios des différents types de tâches, marquée par une forte hausse de la part occupée par l'application de *théorèmes* et de *définitions*, mais surtout, proportionnellement, des sous-tâches *liées au raisonnement*, qui demeurent cependant très minoritaires (ce qui constitue en partie une surprise). Les sous-tâches de nature *calculatoire* sont en net recul, mais sans doute moins que l'on aurait pu le penser, là encore, et restent largement prédominantes, conservant une majorité relative ; ce qui est surtout flagrant à la lecture de ces résultats, c'est l'effondrement de la part occupée par les tâches de nature *graphique*.

Pour bien comprendre ces résultats, il convient de les replacer dans leur contexte. Le fait que l'on se soit intéressé à l'environnement de la dérivée, concept qui demeure très lié à l'aspect fonctionnel et « pratique » du travail mathématique, a sans doute une forte influence sur le fait que les tâches de calcul restent ici encore très majoritaires devant celles de raisonnement[1]. Le calcul de fonctions dérivées, de primitives, la résolution d'équations différentielles standards

[1] Mais c'est précisément pour cela que nous avons choisi, au départ de cette thèse, d'étudier l'environnement de la dérivée, concept à la fois central, en DEUG A, et très opérationnel. Nous pensions que ce choix était propre à montrer que l'activité mathématique, au niveau du supérieur, n'est pas telle qu'on l'imagine parfois, marquée par une substitution générale des tâches algorithmiques par le raisonnement formel, en rupture totale avec le lycée.

(pour lesquelles on dispose de formules prêtes à l'emploi), les études de fonctions[2], sont autant de tâches très calculatoires qui conservent ici à l'aspect algorithmique du travail en analyse sa prédominance sur d'autres aspects, plus conceptuels. Il faut cependant rester conscient du fait que si nous avions étudié l'environnement de la notion de limite (introduite formellement en DEUG A) plutôt que celui de la dérivée, les résultats auraient sans doute été, de ce point de vue, très différents.

Finalement, le changement de culture et d'environnement se manifeste donc surtout par l'importance grandissante de la place prise par les définitions et les théorèmes, qui sont à la fois à appliquer de manière plus fréquente, mais aussi beaucoup plus nombreux et variés qu'au lycée[3]. Résultat très significatif de cette évolution, l'utilisation d'un théorème ou d'une définition (part cumulée de 45,45% par rapport à l'ensemble des sous-tâches sollicitées) devient même ici plus fréquente que les tâches de nature calculatoire (part de 42,65%). Ajoutons à cela, que la place occupée par les définitions serait sans doute plus développée encore dans d'autres environnements, où le rôle du travail formel est aussi plus important (notion de limite, algèbre linéaire,... etc.).

L'ampleur de la baisse du nombre de tâches de nature graphique peut en partie nous surprendre. Elle est liée à la diminution très forte du nombre de représentations graphiques sollicitées, même au terme d'une étude de fonction. En effet, les études de fonctions ne constituent plus en DEUG A une *« fin en soi »*, comme c'était souvent le cas au lycée (avec, au bout du compte, le tracé de leur courbe représentative[4]). Elles peuvent servir à démontrer une inégalité fonctionnelle, à étudier une suite récurrente, à établir une propriété de convexité, ...etc. Dans ce cas, l'étude de la fonction se résume, en général, à celle de ses variations. Même lorsque c'est la fonction considérée qui constitue l'objet principal du problème posé et que son étude n'est pas simplement un point de passage obligé pour établir un résultat qui lui est extérieur, on constate que les exercices privilégient plutôt, à présent, et selon le cas, *certains* aspects de l'étude d'une fonction sur d'autres. <u>Exemples</u> : études locales[5] (prolongements par continuité, dérivabilité, position relative de deux courbes, d'une courbe et de sa tangente,... etc.), études à l'infini[6] (avec par exemple à la clef, un développement limité ou asymptotique), étude des variations sur un certain intervalle I pour en déduire le caractère bijectif de la fonction de I sur f(I),... etc. Toutes ces tâches pourraient également déboucher sur le tracé de représentations graphiques (même locales), mais de fait, cela reste assez rare.

En dehors des tracés de courbes faisant suite à une étude d'une fonction, qui constituaient la tâche de nature graphique la plus répandue en terminale S (part de 51,5% dans le manuel « Déclic »), il y a un autre type de tâche également très répandu au lycée (part de 19,3% dans le même manuel), mais que l'on ne rencontre pratiquement plus dans cet environnement d'exercices de DEUG A. Il s'agit des diverses tâches à réaliser à partir d'une représentation graphique *donnée par l'énoncé* (lecture de nombres dérivés, associations de deux courbes,

---

[2] Encore très présentes en première année de DEUG A, du fait des fonctions nouvelles introduites et travaillées à ce niveau, trigonométriques réciproques, hyperboliques et hyperboliques réciproques.
[3] On a vu au chapitre IV de cette thèse, que le travail des élèves en première et terminale scientifiques, autour de la notion de dérivée, reste pour l'essentiel ciblé sur l'application de quatre ou cinq théorèmes seulement.
[4] Pouvant d'ailleurs s'obtenir dès le départ grâce à la calculatrice graphique.
[5] Notamment dans des cas où une étude globale peut s'avérer impossible, en raison d'une trop grande complexité de l'expression de la dérivée et conséquemment de l'étude de son signe (spécificité du supérieur).
[6] Idem.

l'une représentant une fonction et l'autre, sa dérivée,... etc.). En contrepartie, il peut arriver que l'étudiant de DEUG A soit amené ici à effectuer des tracés très qualitatifs d'une fonction vérifiant des hypothèses générales, afin d'imaginer un contre-exemple. Ce type de tâche n'apparaissait pas au lycée, mais reste ici tout de même très minoritaire.

2°) Analyse des sous-tâches de nature graphique.

Explicitement sollicitées dans 71,4% des cas, et implicitement sollicitées dans 28,6% des cas (notamment pour arriver à conjecturer, à interpréter une donnée ou un résultat...), elles se répartissent de la façon suivante :

Tracés des courbes représentatives de fonctions soumises à étude :	53%
Tracés en phase de recherche de solution :	16,4%
Interprétations graphiques de propriétés, de résultats :	30,6%

On constate par ailleurs, que les 53% de tracés de courbes représentatives de fonctions soumises à étude se décomposent en :

- 32,6% de tracés que nous qualifierons de « classiques » (du type de ceux demandés au lycée),
- 14,3% de tracés de courbes représentatives de bijections réciproques de certaines fonctions, par symétrie par rapport à la première bissectrice (nécessité de recourir à un théorème pour effectuer le tracé, et de préciser les pentes en certains points particuliers, par symétrie),
- 6,1% de tracés d'allures de courbes, de tracés qualitatifs réalisés à partir d'informations partielles, voire de tracés incomplets (exemples : tracé de la courbe représentative de la fonction $\varphi : x \to \sin(x^2) / x$ en remarquant que φ est impaire, que $|\varphi(x)| \leq 1/|x|$ pour tout x réel non nul, etc., tracé partiel d'une fonction définie et dérivable sur R_+, et vérifiant : $f(1/n) = (-1)^n$ pour tout n de N^*,... etc.)

Parmi les tracés utilisés en phase de recherche, citons par exemple celui de la fonction f pour l'étude d'une suite récurrente $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de N, afin de discuter la convergence de cette suite en fonction de l'initialisation, de la valeur donnée à u_0 (*« toiles d'araignées »*). Parmi les interprétations graphiques de propriétés ou de résultats, on trouve notamment la détermination de la tangente à une courbe en un point et de la position relative courbe / tangente localement autour de ce point à partir d'un développement limité calculé, ou encore l'interprétation de la formule : $ch^2(x)-sh^2(x) = 1$ pour tout réel x, permettant de justifier l'usage du terme *« hyperbolique »* pour désigner les deux fonctions $x \to ch(x)$ et $x \to sh(x)$.

3°) Analyse des sous-tâches de calcul.

La transition lycée / université est surtout marquée par un renversement total de la répartition entre sous-tâches de calcul explicitement et implicitement sollicitées. Alors qu'au niveau de la classe de terminale S, les calculs explicitement sollicités prédominaient largement, avec une part d'environ 70%, contre 30% pour les calculs implicitement sollicités, il y a, dans ces fiches de travaux dirigés de DEUG A, un peu plus des deux tiers (67%) des sous-tâches calculatoires qui sont implicitement sollicitées. On peut ainsi citer de nombreux exemples de telles tâches de calcul : l'étudiant doit savoir résoudre des équations différentielles linéaires standards en appliquant, seul, la méthode de variation de la constante (calcul *implicite* de dérivée), étudier la convergence d'une suite récurrente en considérant la fonction associée (étude *implicite* du sens de variation), faire certains choix pour l'évaluation d'une limite (calcul *implicite* d'un développement limité),... etc. Evidemment, ces résultats sont à rapprocher de ceux relatifs à l'évolution du degré d'autonomie requis dans la transition entre le lycée et l'université (analysée, au moyen du deuxième tableau de classification, dans la partie B qui va suivre).

La répartition entre sous-tâches internes (part de 67,2%) et externes (part de 32,8%) à la dérivation reste à peu près ce qu'elle était en terminale S (deux tiers / un tiers). Les calculs relatifs aux nouvelles fonctions (hyperboliques, trigonométriques, hyperboliques réciproques) représentent 12,2% de l'ensemble des sous-tâches de calcul.

Voici la répartition des sous-tâches de calcul directement liées à la notion de dérivée :

Calculs de nombres dérivés et études de dérivabilité : Equations de tangentes :	3,47% 0,72%
Calculs de fonctions dérivées : Dérivée d'une bijection réciproque : Calculs de dérivées successives :	18,61% 1,12% 2,51%
Etude des variations :	7,07%
Majorations, encadrements (analyse, accr. finis) :	2,21%
Calculs de développements limités :	14,32%
Calculs de primitives et d'intégrales :	14,69%
Résolutions d'équations différentielles :	2,48%
Total :	67,20%

On peut constater à la lecture de ce tableau qu'un certain nombre de tâches sont *en régression* par rapport à la place qu'elles occupaient en terminale S, notamment l'étude des variations qui passe de 10,24% (manuel « Déclic » de TS) à 7,07%, et le calcul de primitives et d'intégrales, dont la part passe de 22,22% (même manuel) à 14,69%, avec en particulier une disparition des calculs d'aires et de volumes en DEUG A, qui aidaient à donner sens au concept d'intégrale au lycée. La détermination d'équations de tangentes, calcul assez classique au lycée, est également en forte baisse (0,72% contre 2,20% en terminale S).

D'autres rubriques restent à peu près *stables* : les calculs de nombres dérivés et les études de dérivabilité en un point (3,36% en terminale S et 3,47% dans ces fiches de DEUG), les calculs de fonctions dérivées (20,39% en terminale S et 19,73% dans ces fiches), les résolutions d'équations différentielles (2,98% en terminale S et 2,48% ici). Enfin, seuls les calculs de dérivées successives sont en augmentation (leur part évolue de 1,47% à 2,51% en lien avec l'introduction de la notion de fonction convexe et des formules de Taylor), tandis que les développements limités de fonctions usuelles de classe C^{∞} sur leur domaine de définition font leur apparition à hauteur de 14,32%, ce qui est un taux très élevé.

Voici à présent la répartition des sous-tâches de calcul externes à la notion de dérivée :

Calculs de limites :	9,3%
Equations, inéquations et systèmes (isolés de l'étude des variations) :	2,85%
Majorations, encadrements algébriques :	2,78%
Calculs numériques :	3,84%
Recherches d'asymptotes :	1%
Transformations algébriques :	6,75%
Changements de variable :	2,28%
Parité d'une fonction :	0,75%
Autres (calculs de sommes, domaines de définition, intervalles images...) :	3,25%
Total :	32,8%

Ces résultats nous montrent que si la part des calculs de limites est en légère augmentation par rapport au lycée, en revanche la plupart des sous-tâches considérées sont en régression, et notamment la résolution d'équations et d'inéquations et la recherche d'asymptotes (dont la part évolue de 6,93% à 2,85% et de 2,2% à 1% respectivement). Ce phénomène est lié au fait que les études de fonctions voient leur importance diminuer. Par contre, il y a un fort accroissement des procédures algébriques à mettre en jeu (6,75% dans ce tableau contre 2,89% en terminale), et une diversification des techniques de base à maîtriser (rubrique « Autres » dont la part passe de 1,06% en terminale S à 3,25% ici). Parmi ces techniques, citons celles concernant les calculs de sommes et/ou comportant des coefficients binomiaux, les calculs nécessitant des regroupements de termes particuliers ou des écritures astucieuses (exemple : $\tan^2(x) = [1+ \tan^2(x)] -1$), les calculs nécessitant de combiner plusieurs formules...

Les procédures algébriques à connaître se diversifient beaucoup : il faut savoir développer de manière habile le carré ou le cube d'un polynôme de degré 2 ou 3 pour calculer un développement limité, savoir factoriser certains polynômes de degré supérieur ou égal à trois, savoir transformer des expressions du type $f(x)^{g(x)}$, introduire des quantités conjuguées plus difficiles à identifier qu'au lycée, savoir déterminer l'expression d'une bijection réciproque à partir d'une égalité du type $y = f(x)$,... etc. Une nouvelle rubrique *« changements de variable »* (part de 2,28%) figure ici, et correspond à une technique qui n'est pas développée au lycée, tandis que les calculs de nature géométrique ont, au contraire, disparu.

4°) Analyse des sous-tâches du type « Utiliser une définition ».

Les définitions relatives aux notions liées à la dérivée sont majoritaires (67,1%) devant les autres (32,9%) dans cet environnement, mais le sont moins que dans les exercices correspondant, de terminale S. Il y a en effet, ici, une plus grande diversité des notions indépendantes de la dérivée qui interviennent dans l'environnement d'exercices analysé. Remarquons aussi que l'égalité entre l'intégrale de a à b d'une fonction et la différence entre les valeurs en b et en a d'une de ses primitives n'est plus prise comme *définition* de l'intégrale, comme c'était le cas en terminale S, mais constitue en DEUG A un *théorème*. Ce changement de statut amène une sous-évaluation dont il nous faut tenir compte, de l'évolution du rôle joué par les définitions en DEUG A, dont la part passe tout de même ici de 8,79% à 12,38%, ce qui constitue une augmentation importante.

Notions liées à la dérivée	Répartition :
Dérivabilité d'une fonction, de sa dérivée, en un point :	15,8 %
Primitive d'une fonction :	50 %
Convexité, pt d'inflexion :	1,3 %

Total : 67,1%

L'utilisation des définitions de la dérivabilité en un point est en légère augmentation par rapport à la classe de terminale S (15,8% contre 12,57%). Par ailleurs, les définitions d'une fonction convexe (ou concave) et d'un point d'inflexion occupent une place assez restreinte. On peut parler là de *continuité* avec le lycée, marquée une prise de relais possible (entre définition et théorème) dans le cas de fonctions usuelles régulières (de classe C^{∞}) : les étudiants disposent alors d'un théorème très fonctionnel et adapté pour identifier aisément la convexité ou un point d'inflexion d'une fonction (par l'étude du signe et des valeurs d'annulation de la dérivée seconde) sans avoir recours à leur définition.

Notions externes à la dérivation	Répartition :
Continuité d'une fonction, de sa dérivée… :	6,8 %
Bijections :	6 %
Image directe / réciproque :	6 %
Bijections réciproques :	2,1 %
Monotonie d'une fonction :	3 %
Divers (injection, surjection développement limité, borne supérieure, parité…)	9 %

Total : 32,9%

On constate au contraire que les exercices de ces fiches de DEUG mettent davantage en jeu la définition d'une bijection qu'en terminale S (notamment à travers des exercices de nature générale), et que le travail mathématique autour de cette notion ne se joue donc pas seulement autour de l'utilisation du théorème : *« Si f est continue et strictement monotone sur I, f réalise une bijection de I sur f(I) »*. La définition de la continuité en un point (non pas formelle, mais selon l'égalité : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$) est davantage sollicitée qu'en terminale S (6,8% contre 4,39%), de même que celle de la monotonie d'une fonction (3% contre 1,88%). La rubrique *« Divers »* comprend des définitions relatives à des notions variées, mais très minoritaires : notamment celle d'une borne inférieure ou supérieure (1,7%), d'un développement limité (0,8%), de deux fonctions équivalentes au voisinage d'un point (0,4%), celles de nouvelles fonctions (2,14%). L'utilisation de la définition formelle d'une limite intervient de façon très marginale dans cet environnement (0,4%).

On note une nette évolution, dans la transition terminale S / DEUG A, de la répartition des définitions selon leur type de mise en fonctionnement (niveaux technique, mobilisable et disponible). Les définitions sont davantage mises en jeu à un niveau mobilisable, le niveau technique restant cependant très largement majoritaire. Le niveau disponible reste très faible, même si sa présence est, elle aussi, en augmentation.

Définitions : mise en fonctionnement	**Fiches de TD de Marne la Vallée :**	Rappels Term. S (manuel « Déclic ») :
Niveau technique :	**70,51%**	91,7%
Niveau mobilisable :	**27,35%**	7,2%
Niveau disponible :	**2,14%**	1,1%

5°) Analyse des sous-tâches du type « Appliquer un théorème, une propriété ».

Les théorèmes liés à la notion de dérivée sont très majoritaires (90,71%) par rapport aux autres (9,29%), tandis que la répartition entre application de théorèmes anciens (déjà au programme de terminale S) et de théorèmes nouveaux (spécifiques du niveau DEUG) est assez équitable (51% contre 49%).

Application de théorèmes anciens sur la dérivée :	**Pourcentages :**
Théorèmes généraux de dérivabilité et calculs de fonctions dérivées :	21,45 %
Théorème de monotonie :	8,67 %
Théorème sur les bijections et la solution d'équations :	2,82 %
Equations de tangentes :	1,10 %
f dérivable $\Rightarrow$ f continue :	0,93 %
$f' = g' \Rightarrow f = g + k\ (k \in R)$:	1,26 %
Primitives directes :	9,11 %
Intégrations par parties :	2,19 %
Théorèmes généraux sur les équations différentielles :	1,10 %
Théorème des gendarmes :	1,10 %
Total :	49,73 %

Notons ici que l'apparition de la nouvelle rubrique « $f' = g' \Rightarrow f = g + k \ (k \in R)$ » correspond à un type d'exercices assez classique en première année de DEUG Sciences, qui consiste à établir certaines identités sur les nouvelles fonctions (trigonométriques ou hyperboliques réciproques), par exemple : $\mathrm{Argsh}(x) = \ln [(x^2+1)^{1/2} + x]$, par dérivation. Ayant démontré l'égalité des dérivées des deux expressions en présence, puis l'égalité de ces termes pour une valeur bien choisie de la variable, on en déduit que la constante k d'intégration est nulle, d'où l'on tire l'égalité cherchée des deux expressions.

Application de théorèmes nouveaux sur la dérivée :	**Pourcentages :**
Théorèmes généraux de dérivabilité et calculs de fonctions dérivées :	3,9%
Dérivation de f^{-1} :	1,1%
Convexité :	1,1%
Formule de Leibniz :	0,47%
Théorème de Rolle, Accroissements finis :	5,04%
Formules de Taylor :	5,51%
Développements limités :	10,76 %
Primitives directes :	6,1%
Théorème de changement de variable dans une intégrale :	3,4%
Théorèmes généraux sur les équations différentielles :	3,6%
	Total : 40,98 %

Application de théorèmes anciens (hors dérivée) :	**Pourcentages :**
Théorème d'encadrement :	0,78 %
Autres :	0,49 %
Application de théorèmes nouveaux (hors dérivée) :	**Pourcentages :**
Théorèmes généraux sur les suites numériques :	2,2 %
Théorèmes sur les suites récurrentes :	2,36 %
Autres :	3,46 %
	Total : 9,29 %

On relève, à la lecture de ces résultats, une diminution sensible des parts respectives des diverses rubriques qui intervenaient déjà dans la description de l'environnement d'exercices de terminale S, au profit de nouvelles rubriques : théorème de Rolle, formule des accroissements finis, formule de Taylor, développements limités,… etc.

Les théorèmes généraux sur les suites qui apparaissent ici ont été « comptabilisés » parce qu'ils se situent bien, selon nous, dans l'environnement de la notion de dérivée, sans être explicitement liés à cette notion. Il s'agit par exemple des théorèmes permettant d'étudier la convergence d'une suite récurrente du type $u_{n+1}= f(u_n)$ par détermination des variations de la fonction f.

L'évolution, entre lycée et DEUG A première année, de la répartition des théorèmes en connaissances mises en fonctionnement aux niveaux technique, mobilisable et disponible est moins spectaculaire que pour les définitions (voir ci-dessus). Cependant, le niveau mobilisable est davantage mis en jeu qu'en terminale, même si le niveau technique est encore nettement majoritaire. Le niveau disponible est, cette fois, en stagnation.

Théorèmes : mise en fonctionnement	**Fiches de TD de Marne la Vallée :**	Rappels Term. S (manuel « Déclic ») :
Niveau technique :	**61,76 %**	72,6 %
Niveau mobilisable :	**36,16 %**	25,4 %
Niveau disponible :	**2,08 %**	2 %

6°) Analyse des sous-tâches liées au raisonnement.

On constate que ces tâches sont majoritairement centrées sur la dérivée (58,52%) et situées « à la périphérie » de cette notion dans 41,48% des cas, ce qui montre une légère évolution par rapport à la terminale S (taux respectifs de 54,44% et 45,56%). Mais ce qui est surtout remarquable, c'est le fait qu'elles sont sollicitées à un niveau implicite dans 73,3% des cas, et d'une nature très différente de celle des tâches liées au raisonnement apparaissant au lycée.

Répartition des sous-tâches :	**Pourcentages :**
Identifier :	27,44 %
Etudier (canoniquement) :	26,22 %
Raisonnements spécifiques :	14,63 %
Raisonnements par récurrence :	7,92 %
Raisonnements par l'absurde :	3,05 %
Raisonnements et tâches nécessitant une formalisation :	6,71 %
Recherche de contre-exemples :	5,49 %
Généralisations :	3,66 %
Raisonnements divers :	4,88 %

Total : 100 %

On constate en effet, en lisant le tableau précédent de répartition de ces sous-tâches, que des rubriques telles que *« Justifier »* ou *« Comparer »*, qui prenaient une certaine importance dans la description de l'environnement d'exercices sur la dérivée au lycée, sont absentes de ce tableau ci[7]. Par contre, de nouvelles rubriques font leur apparition, correspondant à des tâches qui dépassent l'évocation d'un argument unique (pour confirmer un résultat annoncé par le

[7] Cela ne signifie évidemment pas que de telles tâches ne sont plus sollicitées dans l'environnement d'exercices analysé, mais elles deviennent très minoritaires, et sont ici classées sous d'autres « étiquettes » qui reflètent mieux, selon nous, la nature du travail soumis à l'étudiant.

texte : rubrique *« Justifier »* en TS) ou la simple exploitation de résultats (*« Comparer »*), et sont centrées sur la construction d'un véritable raisonnement. Les raisonnements par récurrence se développent et interviennent à présent un peu partout (détermination de dérivées n-ièmes, suites numériques,... etc.). Les raisonnements par l'absurde, les généralisations, les raisonnements nécessitant un travail de formalisation, la recherche de contre-exemples, qui sont inexistants au lycée, prennent place dans ce tableau. Certes, les deux rubriques *« Identifier »* et *« Etudier »* restent ensemble majoritaires, mais leur part n'est plus, cependant, que de 53,66% (contre 70,58% dans le manuel « Déclic » de terminale S). Elles correspondent en outre, comme on va le voir un peu plus loin, à des tâches plus délicates que celles de même dénomination qui sont repérables dans l'environnement du lycée. Quant au caractère *« implicite »* (à 73,3%) précisé plus haut, il vient de ce que la nécessité d'effectuer un raisonnement par récurrence ou par l'absurde, ou d'invoquer un contre-exemple, est rarement signalée. Les identifications à réaliser ou l'éventuel travail préalable de formalisation ne sont pas suggérés, les études sollicitées (de suites récurrentes, dè comportements asymptotiques de fonctions,... etc.), pour être standards, « canoniques », n'en comportent pas moins plusieurs étapes, non indiquées,... etc.

Parmi les <u>identifications</u> à effectuer, on peut notamment citer celle de la valeur d'une fonction et de sa dérivée en 0, puis de la position relative courbe / tangente localement, à partir de la donnée d'un développement limité, celle de changements de variable utiles pour le calcul d'intégrales, celle de transformations algébriques particulières qui sont efficaces dans des problèmes donnés, et dont il faut avoir l'idée (écrire x^2 sous la forme $(1+x^2)-1$, considérer $\tan^n(x) + \tan^{(n+2)}(x) = \tan^n(x).(\tan'(x))$ plutôt que le terme $\tan^n(x)$ seul,... etc.).

L'<u>étude</u> de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction usuelle, nécessite un raisonnement articulé, utilisant plusieurs théorèmes à la suite (*« si f est croissante, (u_n) est monotone »*, *« toute suite croissante et majorée converge »*, *« si f est continue et si (u_n) converge sa limite λ vérifie $f(\lambda) = \lambda$ »...*). Cette articulation des arguments n'est prise en charge que partiellement, voire pas du tout, par le texte, ce qui ne serait pas le cas dans un environnement d'exercices de lycée[8]. L'étude de différentes inégalités fonctionnelles peut nécessiter des moyens variés (étude des variations d'une fonction, majorations algébriques, application de la formule des accroissements finis ou de celle de Taylor,... etc.) parmi lesquels il convient de faire à chaque fois un choix.

La rubrique *« Raisonnements spécifiques »* correspond à des tâches liées à des contextes d'exercices particuliers : trouver une équation différentielle satisfaite par une fonction usuelle pour obtenir un développement limité de cette fonction, établir des identités concernant des fonctions trigonométriques ou hyperboliques réciproques par dérivation des expressions et identification de leur valeur en un point, comparer f(x) et x pour déterminer la monotonie d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Les tâches de raisonnement liées à une <u>formalisation</u> particulière sont variées : déduire de la définition formelle de $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ que f(x) est strictement positif sur un certain intervalle $]1-\alpha,1+\alpha[$ avec $\alpha > 0$, détecter le lien existant entre le développement limité de f au voisinage

---

[8] L'étude des variations d'une fonction, par exemple, suppose bien, en terminale S, plusieurs étapes (calcul de la dérivée, étude de son signe, déduction des variations), mais ne nécessite l'utilisation que du *seul* <u>théorème</u> de monotonie (en dehors des « formules » de dérivation).

de 0 et une propriété formelle du type : $(\exists\delta>0)(\forall x\in]-\delta, \delta[)\ f(x) \leq P(x)$, où P est un polynôme, ou plus simplement, introduire une expression paramétrée afin de raisonner par coefficients indéterminés.

La rubrique *« Raisonnements divers »* rassemble les types de raisonnements non répertoriés par ailleurs, et parmi eux, des raisonnements par répétition ou combinaison d'arguments, des raisonnements au sein desquels on transforme le problème avant de le résoudre,... etc.

B/ DEGRE D'AUTONOMIE SOLLICITE DANS LES TACHES, FAMILIARISATION AUX DIVERSES TACHES. QUELLE PRISE EN CHARGE PAR L'ENONCE ?

1°) Résultats statistiques et interprétations.

On constate que le taux de répétitivité des exercices a nettement baissé par rapport au niveau où il se situait au lycée. Il est à présent de 23,5% contre 48% dans le manuel « Déclic » de terminale S, ce qui constitue à la fois le signe d'une plus grande variété des exercices soumis, et celui d'un travail de *« routinisation »* des tâches moins développé qu'au lycée.

En revanche, le taux de réponses fournies (de l'ordre de 24%) n'a guère évolué entre les deux institutions. Il y a une explication à ce phénomène. La présence de questions du type : *« Démontrer que... »* ou *« Etablir... »*, nécessitant une certaine réflexion personnelle, un raisonnement, est ici plus importante que dans un environnement de lycée[9], ce qui justifie précisément qu'on livre le résultat dans l'énoncé de la question (mais pratiquement jamais les moyens, parfois assez complexes, d'aboutir à ce résultat). On observe, par contre, que les réponses concernant des questions de nature purement algorithmique sont plus rarement données qu'au lycée.

Le taux de tâches complexes est ici de 46,9%, et celui de tâches réalisables de plusieurs façons (*significativement* différentes), de 27,5%. Rappelons que ces taux n'ont pas été évalués pour les environnements étudiés d'exercices de lycée, parce que la progressivité des tâches, leur découpage en sous-tâches élémentaires et la répétition de certaines séquences en réduit l'éventuelle complexité. De plus, un tel contexte conduit les étudiants à s'orienter systématiquement vers un type de résolution particulier, correspondant à des pratiques institutionnelles très *ciblées* (permettant le « bachotage » de procédures standards bien déterminées) dans les (rares) occasions où la possibilité de choisir une voie plutôt qu'une autre se présente. Dans l'environnement d'exercices de DEUG A ici analysé, comme d'ailleurs dans ceux issus d'autres universités (étudiés plus loin), il n'en va pas de même. Tout d'abord, les questions intermédiaires, plus variées, du fait de la diversité plus grande des tâches, laissent davantage d'initiative à l'étudiant. C'est souvent le *titre* des feuilles d'exercices qui suggère une méthode de résolution, dans le cas où elle constitue un enjeu institutionnel de l'apprentissage en DEUG A[10]. Des aides locales assez précises orientent parfois également le travail des étudiants vers une procédure particulière pour la réalisation

---

[9] Où l'expression : « Démontrer que... » est parfois galvaudée, notamment lorsqu'il s'agit d'effectuer un simple calcul de fonction dérivée.
[10] C'est ainsi le cas des feuilles d'exercices intitulées : « Théorème de Rolle, formule des accroissements finis ».

des tâches proposées[11]. Mais le questionnement, tel qu'il est présenté, laisse en général davantage à l'étudiant la possibilité de recourir à une autre méthode, le cas échéant, et il arrive que le texte de l'exercice sollicite lui-même deux façons différentes de résoudre un même problème. Parmi les tâches prises au sein de cet environnement d'exercices, mettant en jeu le concept de dérivée, pour lesquelles *plusieurs méthodes* de résolution sont possibles, voire suggérées, on peut citer par exemple : l'étude de la position relative courbe / tangente, pouvant se réaliser par utilisation d'une formule de Taylor ou par étude d'une fonction, le calcul de limites au moyen d'un développement limité ou de la règle dite « de l'Hospital », l'étude d'une suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in N$, avec $f : I \to I$ et $0 \leq f' \leq a$ sur I, avec $a<1$, par le théorème du point fixe ou par considération de la croissance de f sur I,... etc.

2°) Des aides à la résolution et un découpage des questions mesurés, qui laissent à la charge de l'étudiant bien des initiatives.

Nous avons choisi de présenter cette étude selon divers thèmes mathématiques travaillés, représentatifs de l'environnement, la variété des tâches rendant plus délicate une analyse « globale » de l'autonomie sollicitée des étudiants pour leur réalisation.

a) Continuité et dérivabilité en un point, calculs de limites, fonctions dérivées.

Les exercices du type : *« Etudes de la dérivabilité des prolongements par continuité de fonctions en un point ou de fonctions dont l'expression contient des valeurs absolues »* sont présents dans deux sections d'exercices, l'une intitulée : *« Compléments de dérivation »*, et l'autre : *« Développements limités »*, le second titre donnant un renseignement au niveau des la technique de calcul à utiliser. Cela étant, il n'y a pas d'indication, comme c'était le cas dans les manuels de lycée, quant à la nature des calculs à produire pour réaliser ces études. On demande dans certains cas une étude de la dérivabilité sur l'ensemble du domaine de définition de la fonction (éventuellement prolongée par continuité), ce qui nécessite deux types d'argumentation très différents : *localement*, au point « problématique », le calcul de la limite d'un taux d'accroissement, et *globalement*, ailleurs, l'évocation de théorèmes généraux.

Lorsqu'on demande aussi d'étudier l'existence des dérivées successives du prolongement par continuité en un point x_0, deux types de calcul sont nécessaires : le calcul formel des dérivées successives de la fonction pour $x \neq x_0$, et le calcul des limites des taux d'accroissement en x_0 de ces dérivées (ou tout au moins celui des limites en x_0 de ces dérivées). Là encore, il n'y a pas d'indication concernant la démarche à suivre. L'énoncé peut cependant fournir une expression pour $f^{(n)}(x)$ avec $x \neq x_0$, et demander à l'étudiant d'établir cette expression par récurrence. Mais il peut aussi suggérer implicitement qu'il faille se contenter d'une forme générale de $f^{(n)}(x)$, comme dans l'exercice présenté ci-dessous. L'étudiant doit alors s'en apercevoir et comprendre pourquoi cette expression générale suffit à résoudre le problème :

[11] C'est aussi le cas, à un degré moindre, dans les feuilles d'exercices issues d'autres universités, sauf à Lille où les questionnements, plus ouverts, sollicitent davantage de choix personnels (recherche de contre-exemples, critique d'une situation,... etc.). Les énoncés ne sont alors directifs qu'en présence d'une difficulté très marquée.

Etudes de dérivabilité.

A) Soit f, fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

1. Démontrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudiez l'existence de $f''(0)$.
3. Démontrez par récurrence sur n que pour $t < 0$, $f^{(n)}(t) = \frac{Pn(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$ où Pn est un polynôme dont on précisera le degré. Donnez P_1 et P_2.
4. Montrez alors que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1, feuille n°14 :

Les calculs de limites à effectuer peuvent nécessiter un changement de variable ; c'est le cas dans l'exemple précédent où l'on peut utiliser un résultat classique de croissances comparées, après avoir posé u = 1/t. Il faut parfois aussi, de manière autonome, discuter selon la valeur d'un paramètre, identifier un point éventuel de non dérivabilité à étudier en particulier (point d'annulation d'une expression comportant des valeurs absolues), effectuer sans aucune aide un développement limité et savoir ensuite l'exploiter, seul,... etc. Il nous semble assez utopique de penser, compte tenu de la variété des difficultés présentées par les tâches proposées, qu'une véritable « routine » d'exercices puisse ici s'installer et permettre une familiarisation suffisante de l'ensemble des étudiants à ces tâches :

B) Soit $f_n : \begin{array}{l} x \to x^n \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \to 0 \end{array}$ et $g_n : x \to |x| (\sin x)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Déterminez selon la valeur de n, si f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, de classe C^1, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$? Même question pour g_n.

C) Soit $f(x) = xe^{-|x|}$ et $g(x) = |x-1| \sin(\pi x)$. f et g sont elles dérivables, de classe C^1, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$?

Suite de l'exercice précédent :

Etudes locales de fonctions.

Pour chacune des fonctions suivantes, montrez que f possède un prolongement par continuité $\widetilde{f}$ en 0. Etudiez la dérivabilité en 0 de ce prolongement $\widetilde{f}$ en donnant la valeur du nombre dérivé $\widetilde{f}'(0)$. Donnez l'équation de la tangente à $(C\widetilde{f})$ en $x_0 = 0$ et précisez la position relative de $(C\widetilde{f})$ et de sa tangente (Δ) au voisinage du point d'abscisse $x_0 = 0$.

1) $f(x) = \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}}$ 2) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x}$ 3) $f(x) = \frac{\ell n(1+x)}{x^2 + \text{sh}\, x}$

4) $f(x) = \frac{(\cos x)^{1/x} - (1+x)^{1/3}}{x}$ 5) $f(x) = \frac{e^{x \sin x} - \cos 2x}{x}$

(Examen de Septembre 1993) (Examen de Juin 1992).

Exercice 5, feuille n°23 :

Notons cependant que dans les exercices sollicitant l'étude d'une ou de plusieurs conjectures, on livre parfois aux étudiants l'expression d'une fonction pouvant jouer le rôle de contre-exemple (ce qui n'est pas une aide très courante, au niveau du DEUG A, comme nous le montrera l'analyse des environnements d'exercices provenant d'autres universités). D'autre part, l'étude de ce contre-exemple peut aussi être très « dirigée » par l'énoncé. C'est le cas, notamment, concernant la fonction $f : x \to \sin(x^2)/x$, qui vérifie : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, mais dont la dérivée n'admet pas de limite à l'infini. L'énoncé demande successivement à l'étudiant de regarder la parité de f et l'existence d'un prolongement par continuité g, de f en 0, puis de montrer la dérivabilité de g en 0, de calculer g'(x) pour $x \neq 0$ (étude locale). Enfin, l'énoncé suggère d'utiliser l'inégalité : $|f(x)| \leq 1/|x|$, valable pour tout $x \neq 0$, pour tracer une allure de courbe.

De même, le recours à la formule de Leibniz pour effectuer un calcul de dérivée n-ième est suggéré si nécessaire dans ces exercices.

b) Etudes de fonctions, bijections, bijections réciproques.

Ce paragraphe concerne au premier chef l'étude des nouvelles fonctions, hyperboliques et trigonométriques / hyperboliques réciproques. Le problème majeur réside ici dans le fait que le travail sur ces nouvelles fonctions, et le temps didactique qui leur est consacré, occupent une place dans le cursus universitaire, qui est beaucoup plus restreinte que ce qui est accordé au lycée concernant l'étude des fonctions logarithmes et exponentielles. Il y a cependant un certain nombre de résultats à mémoriser, à leur sujet, et une familiarité à construire vis à vis d'elles.

C'est sans doute en raison de ces difficultés spécifiques que les feuilles de travaux dirigés de l'université de Marne la Vallée proposent ici deux types d'exercices : des exercices consistant en l'étude (et la construction éventuelle) des nouvelles fonctions de base sh, ch, th, Argsh, Argch, Argth (les fonctions trigonométriques réciproques ayant été déjà vues en cours), et des exercices qui supposent préalablement la connaissance de ces fonctions de base et portent sur d'autres fonctions nouvelles, bâties à partir d'elles. On constate alors que des difficultés spécifiques apparaissent, qui ne sont prises que *partiellement* en charge par l'énoncé, une certaine autonomie au niveau technique étant attendue de l'étudiant. Ainsi en va-t-il de l'étude de la fonction $x \to \mathrm{Arcsin}\,(4x^3-3x)$:

Soit f la fonction définie par : $\underline{f(x) = \mathrm{Arcsin}\,(4x^3 - 3x)}$

1. Déterminez le domaine de définition Df et le domaine de dérivabilité I de f.
2. Calculez et simplifiez $f'(x)$ en distinguant deux cas : **1)** $|x| < \frac{1}{2}$ et **2)** $|x| > \frac{1}{2}$.
3. En déduire que : $\begin{cases} f(x) = 3\,\mathrm{Arcsin}(x) + \pi & \text{pour } x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \\ f(x) = -3\,\mathrm{Arcsin}(x) & \text{pour } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ f(x) = 3\,\mathrm{Arcsin}(x) - \pi & \text{pour } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

4. Tracez (Cf), courbe représentative de f, dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2, feuille n°21 :

La connaissance du domaine de définition et du domaine de dérivabilité de la fonction Arcsinus est ici indispensable, et l'énoncé suggère à l'étudiant que ces domaines seront différents, ce qui constitue une aide relative. Le calcul simplifié de f '(x) suppose de savoir factoriser complètement l'expression $1-(4x^3-3x)^2$ (et de penser à le faire, car cela n'est pas dit), puis de sortir correctement le terme carré situé sous le radical ($\text{Arcsin}'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$) en distinguant pour cela deux cas : $|x| < ½$ et $|x| > ½$, et sachant que $\sqrt{a^2} = |a|$ pour tout réel a. Il y a là bien des obstacles d'ordre technique, même si les deux cas sont suggérés à l'étudiant. La troisième question s'effectue par intégration du résultat précédent, en choisissant de manière *autonome* de « bonnes » valeurs de la variable dans les trois cas. Même si le résultat final est fourni, l'idée de la méthode reste à la charge de l'étudiant (qui ne verra peut-être pas pourquoi l'expression diffère *aussi* au niveau d'une constante additive, selon la position de x), et le travail à effectuer suppose une bonne connaissance des lignes trigonométriques usuelles. La mise en fonctionnement des différentes connaissances requises pour cet exercice se situe ici, à plusieurs reprises, au niveau *mobilisable*.

L'étude des nouvelles fonctions met en relief quelques types de tâches bien spécifiques, non rencontrés au lycée, car liés à la notion de bijection réciproque. Ces tâches ne donnent pas lieu à des aides à la résolution particulières, mais font cependant l'objet d'un véritable travail de *familiarisation*, du fait de leur caractère répétitif et systématique, lorsqu'on construit les fonctions Arcsinus, Arccosinus, Arctangente, Argsh, Argch, Argth successivement. Un tel travail de familiarisation est ici à souligner, s'agissant d'un environnement d'exercices dans lequel le taux de répétitivité des tâches reste faible, comme vu plus haut (23,5%). Il s'agit pour l'essentiel d'appliquer le théorème relatif aux propriétés (continuité, sens de variation, symétrie du graphe…) de l'application réciproque d'une bijection $f : I \to f(I)$ continue, strictement monotone sur un intervalle I, et d'appliquer la formule $(f^{-1})'(y) = 1 / f'(f^{-1}(y))$ en tout point où cela est possible (si f est dérivable sur I, en tout y de f(I) tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$). Un autre type de tâche consiste ensuite à établir certaines identités sur les nouvelles fonctions, soit par dérivation, soit par composition de la bijection réciproque avec la bijection d'origine. Ici, l'énoncé indique assez systématiquement à l'étudiant que deux méthodes sont possibles, mais ne précise pas lesquelles. Les grandes étapes de l'étude de la bijection réciproque sont rappelées par le texte, mais la réalisation des tâches correspondantes n'est pas guidée (ce qui peut poser des problèmes à l'étudiant ; en particulier, la mention : *« étude du comportement asymptotique »* ne suppose pas uniquement, en général, un calcul des limites aux bornes de la fonction).

D'autres exercices, plus rares (étude de conjectures, discussion selon a, b du caractère bijectif de $x \to ax+b+\text{Arctan}(x)$ en tant qu'application de R dans R…), concernent plus spécialement la notion de bijection *en général* (en lien avec d'autres propriétés). Ces exercices s'avèrent plus difficiles, car ils ne font l'objet d'aucune aide (notamment les conjectures), et nécessitent parfois d'invoquer des idées ou des propriétés peu utilisées par ailleurs, telles que le théorème selon lequel : *« si f est continue sur l'intervalle I et bijective de I sur f(I) alors f est* *nécessairement strictement monotone sur I* » (sorte de réciproque du théorème sur les bijections déjà utilisé en terminale S).

c) Théorème de Rolle, formules des accroissements finis et de Taylor.

On constate ici que les exercices portant sur le théorème de Rolle sont assez directifs et aidés, au niveau de l'énoncé. Il est souvent demandé de façon *explicite* d'appliquer ce théorème a telle fonction particulière, pour en déduire tel résultat, qui est annoncé. Parfois, la fonction en question est paramétrée et l'énoncé demande d'adapter la valeur du paramètre de façon à ce que l'on soit dans des conditions permettant d'appliquer le théorème de Rolle :

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ telle que l'on ait : $\underline{f(a)=f(b)=0}$.

1. Soit $\alpha \in]a,b[$. Déterminez le réel K tel que la fonction φ définie par $\underline{\varphi(t)=f(t)-K(t-a)(t-b)}$ soit nulle en α.

   En quelles valeurs, autres que α, la fonction φ s'annule t'elle ?

2. En appliquant le théorème de Rolle à plusieurs reprises, montrez alors qu'il existe un réel c de $]a,b[$ tel que l'on ait : $f(\alpha)=\frac{(\alpha-a)(\alpha-b)}{2}f''(c)$.

Exercice 3 de la feuille n°15 : Différentes aides sont ici fournies : on donne la fonction auxiliaire, on suggère de donner à K une valeur particulière, puis on demande les valeurs d'annulation de φ (pour permettre à l'étudiant de bien « cadrer » la situation), et on lui suggère enfin d'appliquer le théorème de Rolle *à plusieurs reprises*.

Les exigences au niveau du degré d'autonomie requis sont donc plus faibles que pour d'autres tâches de l'environnement de la dérivée et ce, pour diverses raisons : les problèmes posés portent assez systématiquement sur des situations *générales*, ont parfois un aspect *artificiel* (on impose à l'étudiant de considérer une certaine fonction auxiliaire, qu'il lui est difficile d'imaginer seul), et il s'agit d'appliquer un théorème *nouveau*, de *diverses* façons et à des fins souvent très *différentes* d'un exercice à l'autre, ce qui suppose une certaine « adaptation »[12] difficile à obtenir de l'étudiant dans un premier rapport à ce théorème. Les difficultés rencontrées, le nombre important d'étapes à traiter et l'aspect très directif de certains énoncés (comme celui de l'exercice précédent), peuvent en outre l'empêcher de prendre du recul sur la tâche à réaliser, lui faire perdre de vue l'objectif[13]. En dépit des aides qui lui sont fournies, on peut penser que la variété des situations proposées rend plus délicat pour l'étudiant le travail de familiarisation à ces exercices et l'identification des similitudes qui existent néanmoins, d'une tâche à l'autre. D'autant que, d'un exercice à l'autre, on peut constater que l'énoncé est plus ou moins directif, ce qui contribue sans doute à « brouiller les pistes » pour l'étudiant (les termes du contrat didactique sont beaucoup moins clairs qu'au lycée) :

[12] Il faut parfois appliquer le théorème de Rolle « en cascade », ou vérifier précisément si les hypothèses de ce théorème sont satisfaites (Exemple : Cas où on doit appliquer le théorème de Rolle à la fonction g définie par : g(x) = (f(x)-f(a))/(x-a) si x≠a et g(a)=f '(a), pour f dérivable sur [a,b] avec f(a)=f(b) et f '(a)=0),... etc.

[13] D'où un dilemme pour le concepteur de l'exercice : multiplier les aides à la résolution pour une tâche qui est vraiment en rupture totale avec celles sollicitées au lycée n'est pas une panacée et comporte certains risques.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et n fois dérivable sur $]a, b[$.
Sachant que f s'annule en $n+1$ valeurs réelles distinctes dans $[a, b]$ montrez qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 2, feuille n°15 : Ici on ne précise pas à l'étudiant qu'il faut appliquer « en cascade » le théorème de Rolle aux dérivées successives de f, et on ne l'aide pas non plus à formaliser le problème (à nommer les n+1 racines, à les situer les unes par rapport aux autres, à construire une récurrence ou un « arbre »).

Les exercices ayant trait à la propriété des accroissements finis ont des caractéristiques similaires, mais portent plus souvent sur des fonctions *particulières* (exemples : application à l'étude de la suite d'Euler, propriété géométrique liant sécante et tangente d'une parabole…). Une conséquence de cela : les énoncés précisent assez souvent, en outre, *entre quels points* il convient d'appliquer cette propriété des accroissements finis (une telle question se pose rarement dans un problème portant sur une fonction dérivable quelconque). En revanche, l'énoncé ne prend pas en charge les passages à la limites éventuels à effectuer (par exemple, le fait de repérer dans la formule : « $(\exists c \in]x,x_0[)\ f(x) - f(x_0) = f'(c).(x-x_0)$ », que lorsque l'on fait tendre x vers x_0, c tend aussi vers x_0).

Concernant les formules de Taylor, l'énoncé indique rarement entre quels points et à quel ordre il faut les appliquer. Il peut, par contre, préciser quelle formule de Taylor il convient d'appliquer (Taylor-lagrange ou Taylor-Young), mais ne le fait pas de façon systématique ; on voit souvent figurer des expressions telles que : *« A l'aide d'une formule de Taylor **bien choisie**… »*, avec parfois la mention : *« précisez laquelle et pourquoi »*, ce qui constitue aussi une aide à la résolution, mais incitant, en plus, à une certaine réflexion préalable. Le travail visant à exploiter la formule de Taylor (qui doit avoir été appliquée conformément au conseil donné par l'énoncé), pour en déduire le résultat sollicité dans l'exercice n'est, quant à lui, que fort peu guidé. L'étudiant doit réaliser des majorations algébriques, effectuer des passages à la limite, donner une certaine valeur à la variable ou combiner différentes formules sans y être vraiment aidé. Par contre, dans ces exercices, le résultat est souvent annoncé (questions du type : *« Démontrer que… »*).

d) Etude de suites numériques (récurrentes).

Les études de suites récurrentes, du type $u_{n+1} = f(u_n)$, qui sont proposées dans cette banque d'exercices, ont toutes en commun le fait que l'énoncé ne sollicite jamais une étude préalable de la fonction f, et même l'identification de cette fonction f, intervenant dans la définition de la suite récurrente, n'est pas toujours suggérée[14]. C'est là une différence essentielle avec les exercices de terminale abordant ce type de problème, qui sont, en général, d'abord *centrés* sur une étude de fonction assez complète, l'étude de la suite récurrente associée ne venant qu'en seconde partie. En outre, *l'unique* méthode employée en terminale S, la méthode du

[14] Dans l'exercice 3 de la feuille n°19, par exemple, on demande d'étudier, selon la valeur de u_0, la convergence de la suite récurrente définie par : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. La fonction $f : x \to x - x^2$ n'est pas introduite par l'énoncé.

point fixe, y est parfaitement décrite par le canevas de questions posées, et la majoration de la dérivée peut souvent s'effectuer de manière algébrique ; l'étude des variations de la fonction f n'est pas au cœur de cette méthode. Tout au contraire, les études de suites récurrentes ici proposées nécessitent la mise en jeu de moyens variés[15] non fournis par l'énoncé. Il s'agit souvent d'identifier la croissance de la fonction f sur le plus petit intervalle I contenant les valeurs de la suite[16] (intervalle qu'il convient donc de déterminer de manière autonome), mais la situation est parfois plus complexe. Un tableau de variations très complet, comportant limites aux bornes et valeurs clefs prises par la fonction en certains points (extrema, points fixes...), s'avère souvent nécessaire, notamment pour établir par récurrence que la suite est majorée ou minorée par une certaine valeur apparaissant dans ce tableau. Cette demande *implicite*, d'un tableau de variations comportant toutes les précisions nécessaires à la résolution du problème (et pas seulement les variations), est <u>nouvelle</u> tout en portant sur un objet *ancien*. L'observation de l'exercice suivant nous montre bien qu'en dépit d'un guidage très précis de l'énoncé au niveau de la discussion sur la valeur initiale de la suite récurrente introduite, une autonomie importante de l'étudiant est nécessaire pour l'étude de cette suite :

On veut étudier, selon la valeur du réel α, la convergence de la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\underline{u_0 = \alpha}$ et $\underline{(\forall n \in \mathbb{N})}$ $\underline{u_{n+1} = \frac{1}{8}\left(u_n{}^2 + 4u_n + 3\right)}$

1. Déterminez les limites <u>possibles</u> (éventuelles) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrez que si $\alpha \in [-5, 1]$, alors pour tout $n \geq 1$, on a : $\underline{-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1}$. Conclure.
3. Montrez que si $\alpha \in [1, 3]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\underline{1 \leq u_{n+1} \leq u_n < 3}$. Conclure.
4. Montrez que si $\alpha > 3$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
5. Dressez un tableau du comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

<u>Exercice 5 de la feuille n°19</u> : Ici, la fonction f qui définit la suite récurrente n'est pas croissante sur R, mais on peut se ramener à ce cas, car f (R) = [-1/8, +∞ [et f est croissante sur [-2, +∞ [.

Le tableau de variation doit contenir, outre les limites à l'infini de la fonction, ses valeurs en 1 et 3 (points fixes), celle en –2 (minimum de la fonction) et celles en –5 et –7 qui nous « ramènent » aux points fixes 1 et 3.

x	-∞	-7	-5	-2	1	3	+∞
f '(x)	-	-	-	0	+	+	+
f(x)	+∞ ↘	3 ↘	1 ↘	-1/8 ↗	1 ↗	3 ↗	+∞

15 Dont la méthode du point fixe, mais pas seulement elle.

16 D'après un certain théorème : « Si f est croissante sur I, la suite $(u_n)_{n\in N}$ est monotone ».

Un raisonnement par récurrence assez simple, mais non suggéré, permet alors d'obtenir selon la valeur de u_0 le majorant et le minorant annoncés de la suite, tandis que le sens de variation se détermine selon le domaine délimité des valeurs de la suite[17] par étude directe du signe de $u_{n+1}-u_n$. Il faut enfin utiliser le théorème de monotonie des suites et le résultat de la question 1 pour conclure. Dans cet exercice, bien des résultats sont donnés, mais il y a peu d'indications réelles et beaucoup d'implicite (voir notamment l'énoncé de la première question et aussi celui de la cinquième question : les cas $-7 \leq u_0 \leq -5$ et $u_0 < -7$ ne sont pas dissociés par le texte).

C/ ANALYSE SELON UN STATUT OUTIL / OBJET - FONCTION ET ENVIRONNEMENT (CONTEXTES).

1°) Répartition en statuts objet / outil, explicite / implicite.

La répartition des concepts et des énoncés selon ces quatre modalités d'intervention a évolué en faveur des deux statuts *« objet explicite »* et *« objet implicite »*, dont les parts passent respectivement de 20% à 25,3% et de 1% à 3,7%. Le statut *« outil implicite »* (62,4%) reste très majoritaire, même si sa part a baissé (75,5% en classe de première S et 71% en classe de terminale S), tandis que le statut *« outil explicite »* se maintient à peu près au même niveau qu'au lycée (8,6%). Cette évolution, finalement assez nuancée, au profit des deux statuts « objet » montre que, dans l'environnement de la notion de dérivée, le travail mathématique reste davantage orienté vers l'application, au niveau de la première année de DEUG A, que l'on aurait pu le penser. C'est beaucoup du côté des *modalités d'accomplissement* des tâches que la différence semble se situer entre les deux niveaux d'enseignement. Cette analyse sera corroborée un peu plus loin par les résultats statistiques de la répartition des tâches selon les deux catégories *« Application »* et *« Questionnement »*.

Parmi les *« objets implicites »* qui sont mis en jeu ici, citons la notion d'injectivité d'une fonction, que l'on peut avoir à isoler, dans le cas où cette fonction possède certaines propriétés (par exemple, si elle est strictement monotone sur l'intervalle considéré), la notion de bijection réciproque dans un problème tel que : *« démontrer qu'il existe une application g définie sur $[-1/e, +\infty[$ à valeurs dans $[1/e, +\infty[$ telle que $g(x).\ln(g(x)) = x$ pour tout x de $[-1/e, +\infty[$ »*, la propriété de continuité à mettre en forme, s'agissant d'établir qu'une fonction est de classe C^1 aux bornes d'un intervalle donné,... etc. Le statut *« outil explicite »* est lui aussi assez peu représenté ; il intervient notamment dans les feuilles d'exercices portant sur la formule des accroissements finis et celle de Taylor, lorsque l'énoncé demande d'appliquer l'une de ces formules à une fonction donnée en vue d'établir un certain résultat.

2°) Types d'objets en jeu, relations entre eux, rapports au savoir en découlant.

a) Continuité et dérivabilité en un point, calculs de limites, fonctions dérivées.

Le travail sollicité met en jeu un champ fonctionnel beaucoup plus riche que celui rencontré dans les manuels de lycée (fonctions du type $x \to \sin(x^2)/x$, fonctions paramétrées, notamment

[17] Il y a donc un ordre à respecter, non suggéré par l'énoncé, pour établir les inégalités annoncées.

x→ $x^n\sin(1/x)$, fonction paire définie sur R_+ par $f(x) = x^3$,... etc.), et s'organise parfois autour de problématiques délicates (distinction entre $\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) / (x-x_0)$ et $\lim_{x\to x_0} f'(x)$, passage d'une propriété sur la fonction à une propriété sur la dérivée,... etc.). L'étude de la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale (la variable de cette fonction apparaissant aussi sous le signe somme) est demandée dans un exercice. Il en va de même de la dérivabilité d'une fonction définie par des conditions générales :

Exercice 4

On considère une fonction f définie sur $]-1,1[$ et vérifiant pour tout réel x de $]-1,1[$: $\underline{x^4 \leq f(x) \leq 2x^2}(*)$.

1. Peut on dire quelque chose sur la dérivabilité de f en 0 ?

Exercice 4, feuille n°14 : Il faut d'abord constater que f(0)=0 avant de répondre à la question.

La mise en place d'un nouveau langage pour les limites, assez opérationnel au niveau du supérieur[18], basé sur les notions de « petits o » et d'équivalents, s'effectue à travers certains exercices, qui sollicitent notamment un travail de réflexion autour des thèmes suivants : *« Qu'est-ce qu'une propriété locale ? »*, *« Quelles règles de calculs peut-on utiliser avec les équivalents, quelles règles s'avèrent fausses ? »*. L'exercice 4 de la feuille n°13 fait travailler sur la fonction $x \to x^2 10^{100000\,x}$, qui est négligeable devant x → x au voisinage de 0, mais qui tend « au début » plus lentement vers 0 que x → x. L'exercice 3 de cette même section fait déterminer une condition sur deux suites équivalentes à l'infini pour que leurs exponentielles soient également équivalentes à l'infini. Ces notions de fonctions négligeables et équivalentes sont intégrées dans l'exercice 5 de la même feuille, portant sur la définition par approximation affine de la dérivabilité en un point.

On voit donc que c'est un univers assez différent de celui du lycée qui est mis en jeu ici, avec des difficultés conceptuelles fortes et spécifiques, bien que la définition formelle d'une limite ne soit vraiment sollicitée qu'une seule fois (afin d'établir que f est positive à partir d'une certaine valeur de la variable, sachant que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$). La richesse des situations rencontrées, amenant la nécessité d'une dimension critique, est ici à signaler. L'étude des conjectures proposées (exemple : *« $\lim_{x\to+\infty} u'(x) = 0$ implique-t-il : $\lim_{x\to+\infty} u(x) = a$? »*) peut favoriser des phases d'aller-retour entre cadres graphique et algébrique, même si cela n'est pas suggéré par le texte.

b) Etudes de fonctions, bijections, bijections réciproques.

Les études de fonctions ici sollicitées sont à la fois plus variées, et requièrent des techniques plus fines, tant au niveau local qu'au niveau global, que celles effectuées au lycée, comme nous le montrent certains exemples évoqués plus haut : l'étude, assez qualitative, de la fonction x→ $\sin(x^2)/x$ prolongée par continuité en 0, ou celle, techniquement plus délicate (au niveau des calculs) de la fonction x → Arcsin $(4x^3-3x)$. Une flexibilité cognitive nouvelle

[18] Où bon nombre de problèmes (étude de séries, d'intégrales généralisées, développements asymptotiques...) se posent en termes de « vitesse de convergence ou de divergence » et non plus seulement en termes de limites.

est requise, pour s'adapter à des situations très différentes d'une fonction à l'autre, ou des cas de figure très différents à l'intérieur d'une même étude de fonction. Ainsi, dans l'exercice 5 de la feuille n°24, on demande une étude complète de la fonction x → x.exp(1/(x-2)) :

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $\underline{u(x) = x.e^{\frac{1}{x-2}}}$.

1. Etudiez l'existence d'un prolongement par continuité en $x_0 = 2$ pour la fonction u (à gauche, à droite), puis la dérivabilité de ce prolongement $\widetilde{u}$, éventuel, en 2.
2. Etudiez les variations de la fonction $\widetilde{u}$. Dressez le tableau des variations de $\widetilde{u}$ en indiquant toutes les limites aux bornes (à justifier précisément).
3. Déterminez les asymptotes éventuelles et tracez la courbe représentative de $\widetilde{u}$.

D'une part, la fonction n'est prolongeable par continuité que d'un côté (en 2^- mais pas en 2^+), et d'autre part, au sein de cet exercice de l'une des deux feuilles intitulées : « *Développement limités* » un certain nombre de calculs de limites sont à produire (étude du prolongement par continuité, dérivabilité de ce prolongement, limites aux bornes de la fonction, recherche d'asymptotes), qui nécessitent des techniques *variées*, de niveau terminale S ou de niveau DEUG Sciences. A un moment donné, il y a nécessité d'effectuer un développement limité pour calculer une limite, mais l'énoncé ne dit pas où. L'étudiant a donc à sa charge le choix des diverses techniques à utiliser selon la situation.

Les études de fonctions sollicitées nécessitent aussi une certaine flexibilité cognitive au niveau du choix des méthodes à utiliser pour établir une majoration (algébriquement, à vue, par étude d'une fonction auxiliaire, peut-être à dériver plusieurs fois, par utilisation de l'inégalité des accroissements finis ou d'une formule de Taylor...).

Le travail sur les conjectures générales mêlant les notions de bijectivité, d'injectivité, de continuité, de monotonie (stricte ou large) induit un <u>rapport nouveau</u> aux objets concernés, à leur connaissance, par rapport à celui construit au lycée où les questions portant sur le caractère bijectif d'une application se rapportaient presque tous à l'utilisation d'un même théorème, permettant d'ailleurs de contourner le concept de bijection :

<u>Conjectures ...</u> Dites si les propositions suivantes sont <u>vraies</u> ou <u>fausses</u> :

<u>P1</u> : « $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a même signification que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ».
<u>P2</u> : « Si $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ ».
<u>P3</u> : .« Si $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ ».
<u>P4</u> : « Si f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ alors f est continue, strictement monotone sur $\mathbb{R}$ ».
<u>P5</u> : « Si f est bijective, strictement monotone sur l'intervalle I, à valeurs dans $f(I)$, $f(I)$ est un intervalle ».
<u>P6</u> : « Si f est strictement décroissante et si $f(a)f(b) < 0$ il existe un unique c de $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$ ».

<u>Exercice 5, feuille n°20 :</u>

c) Théorème de Rolle, formules des accroissements finis et de Taylor.

Les exercices de cet environnement qui portent sur le théorème de Rolle (et à un degré moindre ceux ayant trait aux formules des accroissements finis ou de Taylor) plongent l'étudiant dans un univers de propriétés générales et de théorèmes d'existence tout à fait nouveau pour lui. On démontre que telle fonction ou tel polynôme admet au moins une racine dans tel intervalle sous telles conditions, qu'une fonction s'annulant en deux points réels a et b ($a<b$), de dérivée seconde négative sur $[a,b]$, est nécessairement positive sur $]a,b[$, que si une fonction et sa dérivée admettent des limites finies à l'infini, la limite de cette dérivée est nécessairement nulle,... etc. Parfois les propriétés démontrées peuvent d'ailleurs s'interpréter graphiquement (exemple : si $f(a) = f(b)$ et si $f'(a) = 0$, le fait qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que : $f'(c) = (f(c)-f(a)) / (c-a)$...), mais la difficulté de l'interprétation (celle-ci en particulier, en termes de pentes de sécante et de tangente) est beaucoup plus élevée que celle des interprétations graphiques à réaliser au niveau du lycée. D'autres fois, il faut effectuer un schéma pour s'aider à raisonner, ce qui n'est une attitude habituelle pour un élève de terminale S (exemple : étude de conjectures concernant une fonction f dérivable sur R telle que pour tout n de N^*, $f(1/n) = (-1)^n$, type de fonction non rencontré au lycée).

La multiplicité des notations, qui recoupent des statuts variables (f et φ fonctions, x variable, a et b réels donnés, c dépendant de a et b, K paramètre à déterminer,... etc.) est une source de complexité conceptuelle liée à la nature des problèmes abordés. Mais on rencontre aussi des difficultés conceptuelles largement indépendantes du caractère général des problématiques abordées. Ainsi, l'un des exercices met en parallèle la propriété vraie (évoquée ci-dessus) : « *Si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$ *alors* $L = 0$ » (à établir par la formule des accroissements finis), et la propriété fausse : « $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ » (contre-exemple : $x \to \sin(x^2)/x$) pour une fonction dérivable sur un intervalle du type $[a, +\infty[$.

Il convient de noter aussi que les formules de Taylor sont utilisées dans ces exercices à de multiples fins, entretenant ainsi des relations variées avec d'autres notions mathématiques. Par exemple, elles servent ici à établir des inégalités fonctionnelles, à étudier la position relative courbe / tangente localement (Taylor-Young) ou globalement (Taylor-Lagrange, en lien avec les propriétés de convexité ou de concavité de la fonction), à calculer la somme de séries numériques, à décomposer un polynôme selon les puissances successives de X-a (a, réel), à calculer des limites et réaliser des études locales dans un cas général (Taylor-Young) ou particulier (développements limités),... etc.

d) Etude de suites numériques (récurrentes).

Par rapport aux études assez « uniformes », et très dirigées, soumises en terminale S, de suites récurrentes par la méthode du point fixe, le travail demandé ici sollicite de la part de l'étudiant une flexibilité cognitive et une capacité d'adaptation importantes. Il peut lui être utile, par exemple, de cerner d'abord plus précisément le domaine des valeurs de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (il lui faut alors produire éventuellement un raisonnement par récurrence pour prouver ses affirmations), et cela, afin de réduire l'intervalle d'étude de la fonction f (en général à un domaine où f est croissante). En même temps, il doit garder ici pour objectif l'application de l'un des deux théorèmes généraux : *« Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge »*, et *« Toute suite croissante (resp. décroissante) et non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) »*, et orienter, planifier son travail, en vue d'atteindre cet objectif. A cette fin, penser à mener de façon anticipée la recherche des valeurs possibles de la limite, avant toute étude de la convergence, peut notamment lui permettre de conclure à la divergence si l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solutions réelles (raisonnement par l'absurde). Il a aussi tout intérêt à avoir intégré certains principes, très opérationnels dans l'action, mais qui ne sont pas, en général, formalisés en cours ; par exemple, le fait (découlant des théorèmes du cours) que : *« Si $(u_n)_{n \in N}$ croissante et si $u_0 > Max \{x \in R ; f(x) = x\}$ alors $(u_n)_{n \in N}$ diverge (par absence de limite possible) et plus précisément, tend vers $+\infty$ (car une suite croissante qui diverge est nécessairement non majorée ...par contraposition du théorème de monotonie) »*.

Mais les théorèmes utiles à l'étude de telles suites sont délicats à comprendre et à utiliser car ils relèvent bien d'une *culture* différente de celle du lycée. Ainsi, le fait que l'existence de solutions à l'équation : $f(x) = x$ n'assure en rien la convergence de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$, bien que la résolution de cette équation puisse donner la valeur de la limite en cas de convergence, le fait que f croissante sur I n'implique pas nécessairement que la suite (à valeurs dans I) est croissante mais seulement qu'elle est monotone, sont autant d'écueils conceptuels pour l'étudiant. Le simple fait d'avoir à mêler « fonction » et « suite » au sein d'une argumentation sans amalgamer l'étude de l'une, très familière à l'étudiant au sortir du lycée, et celle de l'autre, qui l'est beaucoup moins, représente une difficulté d'un genre nouveau.

3°) Quelques résultats statistiques complémentaires.

a) Le degré de généralité et la présence de paramètres.

Dans l'environnement étudié de la dérivée, on constate avec une certaine surprise que les tâches proposées n'évoluent pas « massivement » vers un *degré de généralité* plus élevé, comme on pourrait le penser. Les tâches portant sur des objets particuliers sont toujours très majoritaires (80,87%), même si les tâches de nature générale ont une part qui augmente sensiblement[19] (de 4% dans le « Déclic » à 9,29% ici). Ce qu'il faut surtout signaler, c'est qu'elles apparaissent, à présent, intégrées à l'environnement d'exercices constitué de manière non artificielle (au sein du manuel de lycée « Déclic », ce sont des démonstrations de théorèmes de cours qui, pour l'essentiel, alimentaient la banque d'exercices portant sur des objets généraux).

Degré de généralité des diverses tâches :	**Feuilles d'exercices de DEUG Sciences :**	Exercices du manuel « Déclic » de Term. S
Cas particuliers :	**80,87 %**	83,6 %
Cas intermédiaires :	**9,84 %**	12,4 %
Cas généraux :	**9,29 %**	4 %
Total :	**100 %**	100 %

[19] Là encore, il convient de ne pas perdre de vue le fait que cette évolution serait sans doute plus spectaculaire s'agissant de l'environnement d'exercices de la notion de limite.

On s'aperçoit cependant que les tâches d'un degré de généralité intermédiaire occupent une place moins importante dans cet environnement que dans celui du lycée, ce qui est à mettre en parallèle avec une évolution à la baisse de la présence de *paramètres* dans les exercices (11,1% contre 12,66% en terminale S et 18, 5% en première S dans les manuels « Déclic »). Ce phénomène peut surprendre, mais il faut préciser que la présence de paramètres joue ici des rôles plus variés et cruciaux dans les exercices abordés : ici, la dérivabilité en zéro d'une fonction paramétrée est à discuter selon la valeur du paramètre, là, on choisit de donner au paramètre une valeur adéquate pour appliquer le théorème de Rolle à la fonction, ou bien c'est la nature d'une suite récurrente du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ et les modalités de son étude qui peuvent dépendre du paramètre (situé dans l'expression de la fonction ou pris comme valeur initiale u_0 de la suite),... etc.

b) Catégories « Application » et « Questionnement ».

La proportion de tâches relevant d'un *questionnement* des connaissances plutôt que de leur simple *application* est surtout en hausse par rapport à la classe de terminale S, et beaucoup moins par rapport à la classe de première S :

	Feuilles de DEUG	Manuel de T.S :	Manuel de 1ère S :
Application :	**87,17 %**	95 %	90,3 %
Questionnement :	**12,83 %**	5 %	9,7 %

Même par rapport à la classe de terminale S, cette hausse reste assez limitée. Cependant, il nous parait utile de préciser, suite à cette analyse, le caractère très relatif, selon nous, surtout au sein d'un environnement d'exercices de DEUG A, de la notion de *« questionnement »* mathématique. En effet, nous avons essentiellement recensé sous cette rubrique les tâches qui sont liées aux aspects *théoriques* et *généraux* du fonctionnement mathématique (non conservation des inégalités par dérivation, distinction entre propriétés locale et globale, étude des liens nécessaires / suffisants entre les propriétés de stricte monotonie, de continuité, d'injectivité, et de bijectivité d'une application,... etc.). Mais sans doute est-ce là un point de vue assez restrictif : le choix effectué d'une méthode de résolution plutôt qu'une autre, par exemple, peut être la base d'un travail de prolongement (réflexion sur les méthodes) en aval de la résolution d'un exercice. Une telle considération nous amène alors à relativiser les résultats statistiques précédents sur la répartition des tâches selon les deux catégories « Application » et « Questionnement ».

III/ ETUDE DE FEUILLES DE TRAVAUX DIRIGES PROVENANT D'AUTRES UNIVERSITES.

A/ INTRODUCTION.

Dans cette partie III, comme d'ailleurs dans la suivante, nous nous intéressons à des environnements d'exercices de première année de DEUG A issus d'autres universités (Paris 7, Valence, Nantes ici, et Lille en partie IV), pour comparaison avec ce que nous avons observé à Marne la Vallée. Les analyses restent cependant plus succinctes, car nous mettons surtout en évidence ici les spécificités essentielles de chaque environnement étudié sans rentrer dans une étude statistique détaillée. Nous utilisons les grandes lignes de la grille d'analyse sans effectuer toutefois une exploitation systématique de cette dernière, telle qu'elle a été réalisée pour étudier l'environnement d'exercices à Marne la Vallée.

B/ ETUDE DE QUELQUES FEUILLES DE TRAVAUX DIRIGES ISSUES DE L'UNIVERSITE DE PARIS VII : UNE SPECIFICITE INTERESSANTE.

Les fiches de travaux dirigés, provenant de l'université de Jussieu (Paris 7), que nous avons pu analyser, possèdent un intérêt particulier du point de vue de la mise en perspective des exercices, leur présentation constituant une tentative intéressante de prise en compte du nécessaire travail de *routinisation* et d'*aide à la résolution* de ces exercices. En effet, on constate tout d'abord qu'au début de chaque exercice nécessitant (le premier) l'utilisation de connaissances de cours nouvelles, figurent assez systématiquement des rappels de cours ayant trait à ces notions nouvelles. Mais surtout, on peut repérer des suites d'exercices portant sur des tâches *similaires*, voire *identiques*, avec une évolution assez progressive dans la complexité liée au contexte. Et il y a aussi, à l'intérieur de certains exercices, des suites, parfois assez longues, de questions du même type, permettant l'application répétée d'un théorème ou d'un algorithme dans divers cas particuliers (fonctions plus ou moins simples par exemple) avec une difficulté technique croissante.

Cette présentation permet à l'étudiant de repérer quelques enjeux essentiels du cours à travers un entraînement systématique à la réalisation de certaines tâches parmi *les plus standards*. Mais précisément, il s'agit le plus souvent de tâches purement *techniques*, portant sur des objets *particuliers* (les exercices ayant trait à des propriétés générales, moins nombreux, présentent aussi une complexité et une originalité plus grandes). Cette présentation ne prend donc pas en charge, au niveau des aides à l'étudiant, les tâches les plus délicates dans un environnement de DEUG A. Or il se trouve que justement, les tâches véritablement problématiques[1] pour l'étudiant (que ce soit parce qu'elles mettent en jeu un niveau de généralité ou un degré de formalisation plus élevé, une flexibilité cognitive ou des difficultés conceptuelles particulières,... etc.) sont plus nombreuses et plus significatives des pratiques réelles à l'université qu'au lycée.

Nous analysons dans ce qui suit, à titre d'exemple et pour étayer notre propos, les feuilles de travaux dirigés relatives : 1°) au théorème des accroissements finis, 2°) à la formule de

[1] Au sens de Chevallard, donc les tâches qui, précisément, nécessiteraient le plus, un travail de routinisation.

Taylor-Lagrange, et 3°) aux primitives et intégrales, qui sont bien représentatives de l'ensemble des feuilles d'exercices données, que leur thème se situe ou non dans l'environnement de la dérivée. Il nous paraît instructif d'étudier de tels questionnements, afin d'en souligner les avantages (du point de vue de la prise en charge institutionnelle des difficultés d'apprentissage), autant que les limites (à ne pas prendre uniquement comme des « failles du système », mais sans doute à relier à la nature plus complexe de l'activité mathématique à l'université).

L'exercice 1 de la feuille de TD intitulée « Théorème des accroissements finis » fait d'abord appliquer (explicitement) cette formule à diverses fonctions paramétrées ($x \to ax^2+bx+c$, $x \to a+bx+ce^{\alpha x}$) ou particulières ($x \to (3x-x^2-2)/x^2$) entre des points génériques (x et x+h) ou particuliers (1 et 4), puis déterminer la valeur du « θ » ou du « c » correspondant dans la formule. Un tel exercice, qui ne vise, dans un rapport initial, qu'une première familiarisation à cette formule des accroissements finis s'apparente tout à fait aux exercices d'entraînement (du type : *« Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes »*) rencontrés dans les manuels de lycée. Les questions posées sont indépendantes les unes des autres, sans véritable enjeu mathématique. Seule la dernière question : *« Calculer la limite supérieure de l'erreur commise quand on assimile la racine cubique de 1001 à 10 »* est d'une nature différente, et nécessite davantage d'*autonomie* personnelle (choix de la fonction et des points auxquels on doit appliquer le théorème, majoration) et la capacité à *interpréter* la formule obtenue. On peut d'ailleurs se demander si sa présence au sein du même exercice ne déroutera pas les étudiants, le *saut* à gérer entre l'application automatique (cadre algébrique) et l'utilisation consciente à des fins de calcul numérique approché étant ici à la charge de l'étudiant.

Exercice 1. Rappel : Théorème des accroissements finis.
Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors

il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Si on pose $h = b - a$ le théorème des accroissements finis devient

il existe $\theta \in]0,1[$, tel que $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$.

1. On suppose $b < a$. Montrer que l'on a encore

$$\text{il existe } c \in]b,a[\text{ tel que } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

2. Calculer la valeur de θ dans la formule des accroissements finis appliquée à la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$.
3. On envisage la fonction $f(x) = a + bx + ce^{\alpha x}$ sur $[x, x+h[$, $a, b, c, \alpha, h \in \mathbb{R}^*$.

   3a. Appliquer la formule des accroissements finis à cette fonction

   3b. Calculer θ en fonction de h et montrer que θ est indépendant de x.
4. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x-x^2-2}{x^2}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur $[a,b]$ avec $a = 1$, $b = 4$ et calculer la quantité réelle c qui intervient dans cette formule.
5. Appliquer le théorème des accroissements finis pour calculer une limite supérieure de l'erreur commise quand on prend 10 pour valeur de $\sqrt[3]{1001}$.

Un scénario typique pour un exercice de routinisation : rappel de cours au début et applications variées avec une dernière question requérant davantage d'autonomie.

Les exercices 2 et 3 portent sur la détermination de solutions d'équations, mais n'engagent pas des procédures similaires. Le premier porte sur la preuve de *l'unicité* de la solution x=0 des deux équations *particulières* : $e^x = 1+x$ et $\sin(x) = x$, et le second, sur le nombre *maximal* de solutions d'une équation *paramétrée* : $x^n+px+q = 0$, selon la parité de n. Le second exercice, qui comporte une question préliminaire (montrer que si f possède k racines réelles, f ' en possède au moins k-1), est d'ailleurs plus facile à appréhender comme application du théorème de Rolle que du théorème des accroissements finis. Entre les deux exercices, on peut juste dire qu'il y a ici une évolution croissante de la difficulté, sans toutefois pouvoir prétendre que résoudre le premier peut aider à résoudre le second, qui présente déjà des difficultés bien plus élevées (multi-application du théorème de Rolle, utilisation d'un raisonnement par contraposée, gestion des paramètres...).

Ces exercices pourraient du reste se traiter par des <u>études de fonction</u>, aussi bien que par application du théorème des accroissements finis, comme il est suggéré par le titre de la feuille d'exercices. L'aide à la résolution constituée par ce titre induit donc ici un <u>effet de contrat</u>, et cette situation montre la difficulté qu'il y a à guider *efficacement* l'étudiant de DEUG dans son travail, tout en favorisant en lui le développement d'une certaine flexibilité cognitive. Cela témoigne alors de la charge qui incombe à l'enseignant en situation, de dépasser assez souvent le contexte et l'énoncé de l'exercice stricto sensu. Au lycée, de tels enjeux sont peu perceptibles, parce qu'au sein de situations de problèmes moins complexes une démarche unique prévaut le plus souvent, liée aussi à des objectifs institutionnels plus précisément circonscrits.

L'exercice 4 propose une douzaine d'<u>inégalités fonctionnelles</u> à établir par le théorème des accroissements finis (là encore, cela n'est pas explicitement affirmé, mais suggéré par le thème général de la feuille, tandis que des études de fonctions pourraient encore permettre de conclure). Ces inégalités concernent des fonctions usuelles du lycée ($t > \ln(1+t) > t/(1+t)$ pour tout $t > 0$) comme des nouvelles fonctions (pour tout $x>0$, $\mathrm{Arctan}(x) > x/(1+x^2)$). Un véritable travail de <u>routinisation</u> est possible, qui concerne déjà une tâche assez complexe : appliquer la formule des accroissements finis à une fonction « bien choisie », entre les points adéquats (en général 0 et x), effectuer une majoration en observant la monotonie de certaines fonctions et la position du « c » de la formule, point intermédiaire.

L'exercice 5 prolonge l'exercice 4, avec un choix de fonction plus délicat ; il faut cette fois prouver l'inégalité : pour tout $x \in]0,\pi/2[$, $x.\cos(x) < \sin(x)$. Mais l'objectif est en fait d'établir la décroissance de la fonction $x \rightarrow \sin(x)/x$ sur l'intervalle $]0,\pi/2[$, en deux temps. Il y a donc ici une aide à la résolution « bien construite », permettant de donner sens au théorème des accroissements finis par rapport à un objectif très classique du lycée : les études globales de fonctions. Cependant, là encore, si l'on se contente de suivre scrupuleusement l'énoncé, on passe à côté de l'apprentissage d'une méthode essentielle en Analyse, qui consiste à effectuer *plusieurs dérivations en chaîne* pour étudier une fonction : cette méthode, qui n'entre pas dans les objectifs du lycée (ainsi qu'on l'a vu dans la partie IV de cette thèse), bien qu'elle constitue le ressort de nombreux problèmes de terminales S, doit trouver sa place en première année de DEUG A.

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $x \cos x < \sin x$.
2. En déduire que sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\sin x}{x}$ est décroissante.
3. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ on a $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi a}{2b}$.

Les trois derniers exercices de la feuille portent sur des situations généraless, et privilégient également certains types d'approches (pas forcément les plus pertinents) au détriment d'autres : par exemple, un problème portant sur deux fonctions f et g (il faut établir que si f(a) = g(a) et si de plus : f '(x) ≥ g'(x) sur [a,b], alors f(x) ≥ g(x) sur [a,b]) pourrait aisément se ramener à un problème portant sur une fonction unique (en posant h = f-g), méthode classique de l'Analyse que ne suggère pas l'énoncé. Un exercice porte sur la démonstration du théorème des accroissements finis généralisé, et on demande pour cela aux étudiants d'appliquer formellement le théorème des accroissements finis à une certaine fonction auxiliaire qui est donnée. C'est là une aide essentielle, mais l'étudiant a peu de chance de retirer de cet exercice isolé, d'aspect très artificiel, une quelconque méthode réapplicable ailleurs, puisqu'il ne sait d'où vient l'idée d'utiliser une telle fonction auxiliaire et comment imaginer son expression. Le point de vue graphique n'est pas évoqué, et il n'y aucune routinisation de ce type d'exercice, pourtant classique. Enfin, le dernier des trois exercices (étude de propriétés, tirées du théorème des accroissements finis, concernant les fonctions f vérifiant à la fois : f(-1) = -1, f(0) = 1 et f(1) = 0) ne fait l'objet d'aucune aide à la résolution, mais un travail de modélisation proposé à la fin (chercher la fonction polynomiale de plus petit degré vérifiant ces conditions et observer ce que donnent les propriétés trouvées dans ce cas précis) permet de donner sens à l'activité.

Offrant souvent des voies diversifiées, avec à chaque fois une complexité différente à gérer, l'élaboration d'exercices portant sur des objets *généraux* nécessite une réflexion et des choix délicats au niveau des aides à la résolution. Cette difficulté particulière se traduit à travers cette feuille de travaux dirigés, où les aides fournies sont plus frustes, moins bien adaptées dans le cas d'exercices portant sur des objets généraux[2], que dans le cas d'exercices portant sur des objets particuliers. Autre constat, lié au précédent : le travail de routinisation de situations particulières, est favorisé, au sein de la feuille de TD, au détriment du même travail pour des situations plus générales (qui représentent alors un quota moins important d'exercices et de questions). C'est un peu un principe d'économie du système : la *routinisation* s'effectue autour des tâches dont les exigences sont les plus *communes* et les plus *lisibles*, alors qu'elle est plus difficile à organiser pour des tâches plus complexes, entre lesquelles les filiations sont plus délicates à repérer et à communiquer aux étudiants.

L'étude de la feuille d'exercices portant sur la formule de Taylor-Lagrange confirme ces tendances. Les trois premiers exercices, de difficulté graduelle, portent sur l'application de la formule à des fonctions *particulières* et à différentes fins. Dans l'exercice 1, on dit aux étudiants à quelles *fonctions*, entre quels *points* et à quels *ordres* ils doivent l'appliquer et l'objectif est le calcul de valeurs numériques approchées. Dans l'exercice 2, il s'agit d'établir

[2] Aides très directives ou au contraire absentes ou trop vagues : « En déduire que » ne permet pas nécessairement de conclure, lorsque plusieurs étapes ou idées sont nécessaires à l'achèvement du problème.

un encadrement valable pour tout x>0 ; on précise encore la fonction et les points à considérer, mais plus l'ordre (l'énoncé dit : « On appliquera la formule de Taylor à l'ordre approprié »). Enfin, dans l'exercice 3, on présente huit inégalités ou encadrements fonctionnels à établir sans aucune indication ; un travail de routinisation est alors rendu possible[3].

Suivent deux exercices, dont la problématique est *générale*, et pour lesquels aucune indication n'est fournie, paradoxalement puisqu'ils posent de réelles difficultés techniques, voire conceptuelles. Dans l'un de ces exercices, il s'agit d'établir que si une fonction, deux fois dérivable sur R, est majorée par 1, ainsi que sa dérivée seconde, sur R, alors sa dérivée première est majorée par 2. Dans l'autre exercice, on demande de calculer la limite quand h tend vers 0 du $\theta_p(h)$ intervenant dans la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre p, écrite entre les points a et a+h (avec $\theta_p(h) \in]0,1[$). Cela nécessite de mettre plusieurs formules en parallèle permettant d'isoler $\theta_p(h)$ et, préalablement, d'avoir bien compris cette double dépendance (assez inhabituelle) de θ par rapport à h et à p à la fois, h et p n'occupant pas des positions similaires vis à vis de θ (p intervient *en amont* au niveau de l'ordre de dérivation de la fonction et h, *en aval* au niveau des valeurs prises par la fonction) :

Exercice 4. Soient a un nombre réel et u un nombre réel strictement positif. Soit f une fonction réelle définie, continue et $n+1$ fois continûment dérivable sur le segment $[a-u, a+u]$. On suppose que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Pour chaque entier p vérifiant $0 \leq p \leq n$, on écrit la formule de Taylor sous la forme

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(a) + \frac{h^{p+1}}{p+1!}f^{(p+1)}(a + h\theta_{p+1}(h))$$

où $\theta_{p+1}(h)$ est une fonction de h qui vérifie $0 < \theta_{p+1}(h) < 1$.
On suppose que $f^{(p+1)}(a) \neq 0$. Montrer que $\lim_{h \to 0} \theta_p(h) = \frac{1}{p+1}$.

Un exercice délicat (très formel) pour lequel il est difficile d'imaginer une aide pertinente.

Cependant, l'accès à la généralité est parfois beaucoup plus naturel et évident à mettre en valeur et à faciliter :

Exercice 6.

1. Developper le polynôme $P(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 3$ suivant les puissances croissantes de $(x-2)$.
2. Developper le polynôme $P(x) = x^3 - 16x^2 + 83x - 140$ suivant les puissances croissantes de $(x-2)$.
3. Cas général : soit $P(x)$ un polynôme de degré n, développer $P(x)$ suivant les puissances croissantes de $(x-a)$.

Un cas où un bon scénario permet d'accéder plus « naturellement » à la généralité.

L'étude de ces feuilles de travaux dirigés de DEUG A, manifestement conçues avec une intention réelle de prise en charge du travail de routinisation des tâches et d'aide à la résolution de l'étudiant, selon des techniques classiques déjà identifiées dans les *manuels de*

[3] Mais une fois encore, « l'autre méthode », qui consiste à considérer la fonction différence et à réaliser des tableaux de variations en chaîne (car l'ordre d'application de la formule de Taylor dépasse 1), afin d'en étudier le signe, n'est pas suggérée. L'étudiant est amené ici à se concentrer sur un objectif précis, pas encore à prendre du recul sur ses pratiques.

lycée, s'avère, selon nous, particulièrement instructive. Car elle montre bien comment ces techniques trouvent leurs limites dans un environnement d'exercices de DEUG A, dont le niveau de généralité, variable, et la complexité, multiforme, nécessitent une réflexion pédagogique nouvelle.

L'impression de « transparence » laissée par la troisième feuille de travaux dirigés, portant sur le calcul de primitives et d'intégrales, ne doit pas nous tromper. La plupart des exercices proposent un regroupement « par paquets » de dix ou vingt primitives et intégrales se calculant selon une même méthode qui est *précisée* en introduction de l'exercice (intégration par partie unique, ou bien répétée, changement de variable direct, ou bien implicite, méthode applicable aux fractions rationnelles, aux fractions en sinus / cosinus, ou bien en sh/ch,... etc.). Tous ces exercices sont de même nature, purement algorithmiques, les réponses finales sont fournies, le scénario est bien huilé, mais applicable à ce seul chapitre.

C/ TRAVAUX DIRIGES ISSUS DE L'UNIVERSITE DE VALENCE.

1°) Caractéristiques générales.

L'environnement d'exercices de DEUG A (première année) que nous avons observé à travers quelques feuilles de travaux dirigés issues du Centre Scientifique J.Fourier de Valence (pour l'année universitaire 1997-1998) présente des caractéristiques assez marquées de la rupture secondaire / supérieur.

On constate la présence de bon nombre de tâches complexes, qui engagent à la fois des aspects *techniques* et *conceptuels* et ne font souvent l'objet que de très peu d'aides à la résolution, voire d'aucune. L'environnement est assez riche en paramètres, en « pathologies » (par comparaison au monde fonctionnel du lycée), avec aussi quelques démonstrations générales. Le *réinvestissement* de nouvelles fonctions (essentiellement trigonométriques réciproques), au sein d'exercices mettant en jeu par ailleurs des notions nouvelles en DEUG A, est très présent[4]. Il y a assez peu de réponses qui soient *fournies* par les énoncés, en dehors des situations où cela s'avère pratiquement incontournable (cas où la finalité d'un exercice est la démonstration d'une propriété bien précise). Certes, on trouve notamment les résultats d'un certain nombre de développements limités sollicités par l'énoncé d'un exercice, mais étant donné la *nature* du travail technique demandé, la présence de ces résultats a davantage une fonction d'auto-vérification des calculs (à terme) que d'aide de l'étudiant en situation.

Il n'y a pas toujours une réelle progressivité dans la difficulté, pour les exercices posés, sauf par exemple pour des exercices de nature *théorique*, très proches du *cours* et qui présentent manifestement un enjeu particulier pour les enseignants qui ont conçu ces feuilles de travaux dirigés. On passe parfois assez brutalement, au sein d'une même feuille, d'un exercice portant sur un thème donné à un autre dont le thème est totalement différent. Le travail de routinisation n'est pas *systématique* et ne fait pas toujours l'objet d'un scénario adéquat[5] ; il

[4] Ce qui augmente nécessairement le degré de difficulté de ces exercices pour le public d'étudiants concerné.
[5] Ce travail de routinisation peut s'exprimer par la simple répétition de questions du même type sans prise en compte des difficultés techniques particulières à certaines situations, les cas les plus simples à traiter ne se situent pas toujours en début d'exercice,... etc.

privilégie les tâches « standards » qui sont les plus emblématiques du cursus en première année de DEUG A.

2°) Etude détaillée d'un échantillon représentatif d'exercices sur la dérivée.

Il s'agit d'un échantillon de 28 exercices répartis sur cinq feuilles de travaux dirigés et portant sur des études de dérivabilité et le calcul de fonctions dérivées, le calcul de développements limités, leur application à l'étude locale de fonctions, la recherche d'extremas, ainsi que la démonstration d'inégalités et l'étude de fonctions réciproques.

Sept de ces exercices (le quart) comportent des *paramètres* ou portent sur une situation *générale*, ce qui représente un taux élevé, surtout si l'on considère le caractère algorithmique assez développé des thèmes qui viennent d'être présentés. Cependant, trois de ces exercices ne font que reprendre les éléments théoriques les plus délicats du cours. Le premier porte sur les relations entre l'existence pour une fonction donnée de développements limités d'ordre 0, 1, ou 2 et les propriétés de régularité de cette fonction (continuité, dérivabilité, existence d'une dérivée seconde). Un contre-exemple classique est donné à étudier pour l'ordre 2 : la fonction $x \rightarrow x^3\sin(1/x)$ prolongée par continuité en 0. Le second exercice est dans le *prolongement* du premier : on demande si une fonction admettant en un point a un développement limité d'ordre 2 est nécessairement telle que sa dérivée admette en a un développement limité d'ordre 1. Puis on demande d'établir une condition suffisante (non nécessaire) sur le développement limité en a pour qu'une fonction admette un extremum local en ce point. Un exercice d'application suit, portant sur une fonction usuelle paramétrée, prolongeable par continuité en 0.

Il y a donc là un scénario particulier qui a été construit spécialement pour une *reprise* de notions théoriques fondamentales développées dans le cours. Il faut d'ailleurs signaler cette recherche d'une synergie possible entre le cours et les exercices dans l'environnement donné, qui s'exprime aussi dans la présence de deux exercices au sein desquels les étudiants sont amenés à construire les fonctions trigonométriques réciproques et à calculer leur dérivée[6]. Ce type de mise en valeur est à souligner car il témoigne des tentatives de l'institution pour assurer une continuité avec les pratiques de l'enseignement secondaire.

Cependant, si l'on observe d'autres séquences de ces feuilles de travaux dirigés, on constate que le scénario proposé ne facilite pas toujours une routinisation satisfaisante des tâches, compte tenu notamment de leur éventuelle complexité. Ainsi, c'est seulement le *dernier* exercice de la feuille portant sur les *applications* des développements limités qui pose le crucial problème de la prévision de l'ordre d'un développement limité (notamment en rapport avec la tâche à accomplir) : « *A quel ordre faut il développer la fonction sinus en 0 pour obtenir un développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction h :* $x \rightarrow (\sin(x) / x)^{1/x}$ *?* ». C'est pourtant là un problème qui se pose à l'étudiant dès que des simplifications s'opèrent au sein d'un développement limité, ce qui est fréquent et d'ailleurs effectif dans des exercices précédents de la feuille. Le fait que cet exercice occupe la dernière position s'explique par sa

[6] Comme application du théorème sur les bijections et de celui sur la dérivabilité d'une application réciproque.

seule complexité technique, très emblématique de la culture du supérieur[7], et que l'énoncé n'exploite pas complètement dans une optique d'apprentissage[8].

Un peu plus haut dans cette même feuille, on constate tout de même une certaine évolution dans ces exercices portant sur l'étude locale de fonctions : au début, on précise l'ordre du développement en zéro à utiliser[9], un peu plus loin on ne le précise plus, puis il s'agit de calculer des développements limités en des points $x_0 \neq 0$,... etc. Mais au delà de ces caractéristiques de surface, il n'y a pas de véritable prise en charge par l'énoncé des difficultés techniques de fond de ces exercices, dont la complexité réelle est en rupture avec les pratiques du lycée. Cela est flagrant en particulier dans l'avant dernier exercice où l'on demande (sans aucune indication) de préciser les branches infinies de six fonctions distinctes :

> ***Exercice 3*** : Etudier les branches infinies des courbes d'équations
>
> **1**- $y = x^2\mathbf{arctan}[(x+1)^{-1}]$
>
> **2**- $y = (x^3+2)(x^2-1)^{-1}$
>
> **3**- $y = (x^3+1)^{1/3} - (x^2-x-1)^{1/2}$
>
> **4**- $y = x^{-1}[(2x^2+x-1)\mathbf{e}^{1/x}]$
>
> **5**- $y = x(1+\mathbf{e}^{1/x})$
>
> **6**- $y = (x^2-1)^{1/2} - \mathbf{arcsin}(1/x)$

Des difficultés nouvelles, non prises en charge par l'énoncé se cumulent alors :

a) On ne précise pas en quels points effectuer cette étude, donc il y a lieu d'envisager tous les points[10] (d'une valeur finie ou infinie),

b) Il peut s'agir de développements asymptotiques en $+\infty$ ou $-\infty$ avec nécessité d'effectuer un changement de variable en $1/x$,

c) L'interprétation du résultat obtenu peut poser des problèmes particuliers à l'étudiant, comme le bien fondé d'un développement limité pour déterminer une branche infinie (selon le point considéré, ce n'est d'ailleurs pas forcément ce qu'il faut faire).

Dans cet exercice, comme dans celui précédemment évoqué, on mesure bien toute l'importance du travail de gestion des nombreux problèmes posés que laissent de tels énoncés complètement à la charge de l'enseignant lors des séances de travaux dirigés.

[7] Il y a nécessité d'utiliser au départ le développement limité d'ordre 6 de la fonction sinus, en raison d'une double simplification, mais les calculs restent malgré tout « raisonnables » en raison de l'imparité du sinus.
[8] Une autre question qui n'est pas ici posée est : « Pourquoi effectuer un développement limité d'ordre 4 pour réaliser une étude locale de la fonction au voisinage de 0 ? ». La réponse tient encore dans l'imparité du sinus.
[9] Dans une des feuilles précédant celle-ci, un travail de routinisation portant sur la *seule* détermination de développements limités (*pour eux-mêmes*) a déjà été proposé.
[10] Ce qui va de soi pour l'expert, mais risque de laisser l'étudiant dans l'indécision.

L'analyse des autres exercices, présentant des difficultés variées (notamment de nature « conceptuelle »), non prises en charge par l'énoncé, permet de constater qu'un certain nombre d'entre eux sont très emblématiques des rapports nouveaux à l'Analyse en DEUG A et requièrent une expérience que les étudiants ne peuvent se forger que sur le long terme.

Trois exercices portent spécifiquement sur l'*existence* ou le *nombre* d'extrema locaux de fonctions données, mais leurs modalités d'exécutions sont différentes et très variées. Dans l'un d'eux, il est possible et nécessaire (sauf dans un cas) de déterminer les valeurs *exactes* d'annulation et de changement de signe de la dérivée, mais cela pose des problèmes techniques particuliers (factorisations de polynômes dont l'expression est longue). Il s'agit cependant d'une démarche dont la forme algorithmique reste encore dans la culture du lycée. Mais il y a aussi un cas où il faut se contenter d'une stratégie plus « qualitative » par étude d'une fonction auxiliaire, pour obtenir les variations de la dérivée puis le nombre d'extrema de la fonction. Il y a alors déjà une rupture forte avec les pratiques du lycée, car rien n'indique la démarche à suivre et il y a lieu de dériver deux fois cette fonction auxiliaire ! Dans un autre exercice, portant sur une fonction *particulière*, il faut utiliser un argument *théorique* seul[11], car ni la détermination des solutions de l'équation $f'(x)=0$, ni même celle de leur nombre (par re-dérivation) n'est envisageable. Il s'agit en l'occurrence de déterminer si la fonction $x \to ((x^3+2x+4)^{1/2} - x + 3)$ admet un extremum local sur [0,2] (seulement) et l'on peut constater que sa dérivée prend des valeurs de signes opposés en 0 et 2, ce qui permet de conclure par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction d'origine étant de classe C^1 et même C^∞ sur R_+. Enfin le troisième exercice porte sur une fonction paramétrée et il y a lieu de dériver deux fois cette fonction pour obtenir, selon le signe du paramètre, les variations et le nombre de valeurs d'annulation et de changement de signe de la dérivée. La discussion n'est pas facilitée par le texte. On voit ainsi tous les efforts d'*adaptation* que nécessite la résolution de ces exercices et le niveau élevé de flexibilité cognitive requis :

Exercice 5 : On considère la famille de fonctions f_λ définies sur $\Re$ par

$$f_\lambda(x) = \lambda e^x + x^2 + 2x + 2$$

1) Discuter suivant les valeurs de λ le nombre d'extréma éventuels de f_λ

2) Tracer les courbes représentatives des fonctions f_{-3}, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1 et f_2 dans un même repère.

Les exercices portant sur des inégalités à établir, disséminés de façon assez aléatoire, semble t-il, au sein des diverses feuilles d'exercices, et ne nécessitant pas la mise en œuvre des mêmes moyens, sont également sources d'éventuelles difficultés :

Exercice 5 : Pour x réel positif ou nul on définit la fonction **f** par

$$\mathbf{f}(x) = x^4 \ln(x) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \mathbf{f}(0) = 0.$$

Etudier la dérivabilité de **f** jusqu'à l'ordre 4.

[11] Ce qui ne peut manquer de surprendre un étudiant de première année de DEUG A, compte tenu de son expérience, acquise au lycée, du travail sur des fonctions usuelles spécifiques.

Exercice 6 : On donne **f** définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$

Montrer que pour $x>0$, on a $(x/1+x) < \ln(1+x) < x$

Exercice 7 : On considère la fonction **f** définie sur $]2, +\infty[$ par

$$f(x) = (\ln(x-2)) / \ln(x)$$

Montrer que la courbe représentative de **f** admet une tangente de pente 1/2 en un point A dont l'abscisse est élément de l'intervalle $]3,4[$.

Exercice 8 : Prouver l'inégalité suivante:

$$\pi/6 + \sqrt{3}/5 < \arcsin(0{,}6) < \pi/6 + 1/8$$

<u>Pas de lien entre ces exercices consécutifs. Les encadrements sollicités (notamment dans l'exercice 8) ne font l'objet d'aucune aide à la résolution, et les enjeux de la tâche n'apparaissent pas de façon claire au sein d'une feuille d'exercices dont le titre, « Applications dérivables », reste vague</u>.

Les études de continuité/dérivabilité d'une fonction en un point ne font pas l'objet d'aides particulières, même si l'ordre de dérivabilité demandé est supérieur à 1. Les exercices portant sur la détermination de fonctions dérivées successives à un ordre n quelconque (fonctions $x \to \tan(x)$, $x \to \exp(-1/x^2)$ prolongée par continuité en 0, $x \to \sin(x)e^{-x}$) laissent bien des initiatives à l'étudiant, même si la forme générale de ces dérivées successives est parfois fournie. L'idée d'effectuer un raisonnement par récurrence, le choix des hypothèses de récurrence, l'idée qu'un calcul explicite des dérivées successives n'est pas toujours possible, ou la détermination de suites linéaires récurrentes, font partie des exigences attendues pour mener à bien ces exercices.

Notons que sur 66 fonctions mises en jeu dans l'ensemble de ces 28 exercices, 18 sont de « nouvelles » fonctions (représentant donc une proportion de 27,3%), et sont assez uniformément réparties entre les divers types d'exercices posés. On recense huit exercices de routinisation[12], c'est à dire mettant en jeu au moins trois fois de suite une même tâche, représentant 28,6% des exercices posés, et six exercices (21,4% des exercices posés) peuvent être considérés comme répétitifs par rapport à des exercices antérieurs.

D/ <u>LE POLYCOPIE D'EXERCICES DE TRAVAUX DIRIGES UTILISE A L'UNIVERSITE DE NANTES.</u>

Le polycopié d'exercices utilisé à l'université de Nantes, au niveau du <u>premier module semestriel</u> de la première année de DEUG A, présente en Analyse[13] une spécificité particulière. Il regroupe l'ensemble des chapitres relatifs à l'enseignement de méthodes *algorithmiques*, ou qui, par nature, offrent le plus la possibilité d'un développement

[12] Avec toutes les réserves, liées aux remarques précédentes, que l'on peut faire sur l'attribution de ce « label » qui ne tient compte que de l'aspect répétitif des tâches sollicitées dans ces exercices.
[13] Une partie importante de ce polycopié est consacrée à des exercices d'Arithmétique, d'Algèbre élémentaire et d'Algèbre linéaire, mais surtout aux <u>calculs algébriques</u> : décompositions et divisions de polynômes, résolution de systèmes linéaires, calcul matriciel, calculs de sommes, de produits, calculs avec les nombres complexes.

algorithmique important, et il se *centre* de façon très systématique sur cet aspect de l'apprentissage. Les principaux thèmes d'exercices sont ainsi les suivants : dérivabilité, fonctions réciproques de fonctions usuelles (avec notamment l'étude des nouvelles fonctions), développements limités, recherche de primitives, équations différentielles. Précisons qu'au second semestre, ce sont au contraire les aspects les plus *conceptuels* qui sont au cœur du travail engagé, avec un choix de thèmes réalisé en conséquence : nombres réels, bornes supérieure et inférieure, convergence de suites et suites de Cauchy, continuité des fonctions, aspects théoriques du calcul intégral, séries numériques. Cette façon de procéder semble résulter d'une volonté d'assurer une certaine *continuité* avec le lycée[14], et l'élaboration de ce polycopié utilisé au premier semestre a d'ailleurs fait l'objet d'un travail de liaison avec des professeurs de lycée, dans le cadre de l'IREM des Pays de la Loire.

Les premières feuilles d'exercices (fonctions usuelles, composition de fonctions...) portent ainsi essentiellement sur des révisions : études de fonctions usuelles de terminale, résolutions d'équations et d'inéquations (en particulier trigonométriques), transformations d'expressions algébriques, calculs de limites et de dérivées usuelles, calcul de la dérivée d'une bijection réciproque en certains points, si possible de l'expression analytique d'une fonction réciproque,... etc. Les calculs sont techniquement plus délicats qu'au lycée, et c'est cet aspect de la transition qui semble faire l'objet de ce travail de révision assez spécialisé.

Une autre caractéristique du polycopié tient dans le fait qu'au début de chaque exercice, l'(les) objectif(s) d'apprentissage visé(s) par cet exercice, *selon les auteurs*, est (sont) indiqué(s) en très petits caractères. Il convient cependant de se forger soi-même une opinion sur ce qui est réellement en jeu au sein des tâches proposées et de ne pas accorder un crédit trop important à ces indications d'objectifs, qui restent assez vagues dans leur expression et ne se placent pas toutes sur un même plan. Faute de quoi, la diversité des « labels » accordés à ces différents exercices peut laisser croire, sur un plan qualitatif, à une variété des pratiques sollicitées qui est ici en grande partie illusoire.

Voici un échantillon représentatif de quelques formulations d'objectifs : *« s'entraîner »*, *« comprendre »*, *« réfléchir »*, *« utiliser le cours »*, *« calculer des dérivées n-ièmes »*, *« faire le point »*, *« travailler sur le problème de Cauchy »*, *« problème de synthèse »*, *« s'entraîner pour l'examen »*, *« exercice de recherche »*. La mention *« réfléchir »*, par exemple, peut ici concerner aussi bien le calcul du développement asymptotique d'une fonction paramétrée, l'application du théorème de Rolle pour établir une propriété géométrique, ou la résolution exacte d'une équation différentielle, suivie de questions sur l'existence et l'unicité d'une solution assujettie à telle ou telle condition[15]. La mention *« comprendre »*, s'agissant d'un exercice de détermination du caractère bijectif de l'application $x \to x^3+7x$ de R dans R, alors qu'il convient seulement de recourir à une procédure classique (dériver la fonction et d'invoquer un argument standard) est sans doute aussi un peu usurpée. Mais, d'une certaine façon, cette appréciation des tâches sollicitées montre que cet environnement (quelques

[14] On peut cependant se demander si le fait de reléguer les chapitres théoriques et les aspects conceptuels plus délicats au second semestre ne va pas rendre, à ce moment là de l'année, la rupture encore plus délicate à gérer.
[15] Dans ce dernier cas, l'exercice a une source théorique, le théorème de Cauchy, mais la tâche sollicitée privilégie le point de vue algorithmique, et la « réflexion » éventuelle se situe en aval de l'exercice. De même, la mention : « travailler sur le problème de Cauchy », donnée à un exercice similaire, n'est pas très appropriée.

exercices mis à part) a été conçu dans un esprit qui reste assez proche de la culture du lycée[16], au niveau des exigences et des valeurs mises en relief. On a vu qu'il n'en va pas de même dans d'autres environnements.

A titre d'exemple, nous effectuons à présent une rapide analyse de deux feuilles d'exercices portant sur des thèmes liés à la notion de dérivée et plus spécifiques du programme de DEUG A première année.

Exercices sur le thème de la dérivation :

Sur treize exercices, trois seulement portent sur des fonctions définies par des conditions générales, et dix exercices sur des fonctions usuelles particulières. Quatre exercices ont trait au théorème de Rolle ou à la formule de Taylor, les autres concernent l'étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction usuelle en un point (trois exercices), le calcul de fonctions dérivées ou de dérivées n-ièmes (quatre exercices), l'existence et la dérivabilité d'une bijection réciproque (un exercice), l'existence et le calcul approché de solutions d'une équation du type $f(x)=0$ (un exercice). Il est intéressant d'observer ici en quoi certaines des tâches proposées, correspondant à des types d'exercices que l'on peut déjà trouver, a priori, dans un environnement de lycée, constituent une avancée par rapport à ce niveau d'apprentissage.

Dans les exercices sollicitant une étude de la continuité et de la dérivabilité au point de jonction de deux expressions différentes pour une même fonction, tâche qui se situe déjà un peu en marge des pratiques les plus courantes au lycée, ce sont des fonctions rarement rencontrées en terminale, du type $x \to x^p.\sin(1/x)$ si $x \neq 0$ ($p=1,2,3$) et $0 \to 0$, ou des fonctions *paramétrées* (imposant une discussion), qui sont données. On demande également parfois d'étudier la continuité de la dérivée, ce qui met conjointement en jeu des procédures qui n'ont pas le même statut culturel au lycée (dérivation formelle et définition de la continuité d'une fonction en un point).

Les calculs de dérivées concernent quelques fonctions non rencontrées en terminales, du style : $f(x)^{g(x)}$, $\tan(e^{2x})$,... etc. pour lesquelles une bonne connaissance de la formule de dérivation d'une fonction composée (et non plus seulement des formules de dérivation de e^f, $\ln(f)$, f^n, $\sqrt{f}$... qui en sont des sous-produits) est souvent requise. Le calcul de dérivées n-ièmes nécessite de conjecturer une formule générale, ce qui est plus ou moins facile ici selon le cas considéré[17], et de la démontrer ensuite par récurrence, sans indication du texte. C'est une tâche d'un type nouveau en DEUG A, comme l'étude de la dérivabilité d'une bijection réciproque et le calcul de sa dérivée.

On voit cependant que les facteurs d'évolution par rapport au lycée restent ici assez faibles, et n'induisent guère de ruptures majeures. Les quelques exercices sur le théorème de Rolle et la formule de Taylor-Lagrange sont en majorité des exercices d'application directe, sans grande difficulté, deux d'entre eux (sur quatre) portant sur des fonctions particulières.

[16] Même si les difficultés techniques sont plus nombreuses et plus élevées que dans un environnement de lycée.
[17] La dérivée n-ième de $x \to e^{ax+b}$ est plus facile à extrapoler que celle de $x \to \ln|ax+b|$ par exemple.

Exercices sur les développements limités :

La liste comporte douze exercices : dix exercices mettent en jeu des fonctions particulières, un seul porte sur un cas général, un autre sur une fonction paramétrée (conditions sur a et b pour que $f(x) = ax+b-(16x^4+x^3+1)^{1/4}$ soit un infiniment petit quand x tend vers $+\infty$).

Comme dans la liste d'exercices sur la dérivation, l'exercice qui traite d'un cas plus général reste *très proche* du cours. Il s'agit en l'occurrence de démontrer qu'une fonction dérivable en 0, et vérifiant : $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$ admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de zéro[18].

Un des exercices isole et fait travailler une technique particulière permettant de calculer le développement limité du quotient de deux fonctions : la division de deux polynômes selon les puissances croissantes. Mais aucun développement limité d'un quotient de deux fonctions n'est demandé au sein de cet exercice. Dans l'exercice suivant, il y a cette possibilité, mais cela ne s'impose pas comme la démarche la plus pertinente (on demande un développement limité de $\ln [(1+\tan(x))/(1-\tan(x))]$).

Les autres exercices sont assez variés mais très standards, le résultat est parfois donné à la fin de l'exercice, et d'autres fois pas : il y a quatre exercices sur le calcul de développements limités en 0 ou en $x_0 \neq 0$, deux exercices de calculs de limites en 0, une étude de branche infinie, une étude locale (position relative de la courbe et de la tangente en *quatre* points différents dont deux points d'inflexion[19]), et pour permettre une sorte de synthèse, une étude de fonction nécessitant des développements limités en 0 et en $+\infty$. Cette étude de fonction comporte une suite de questions dans l'esprit de celles que l'on trouve dans les sujets de Baccalauréat[20], avec étude d'une fonction auxiliaire, encadrement, calcul de valeur approchée pour un point que l'on ne peut déterminer explicitement (extremum de la fonction d'origine). La dérivée de la fonction de départ peut s'écrire à l'aide de la fonction auxiliaire mais cette relation, relativement complexe, n'est pas fournie par le texte comme ce serait le cas dans un problème de terminale. Il y a donc une petite évolution qui entre en jeu ici. Le texte sollicite *lui-même* un développement limité en zéro et un autre en $+\infty$, avant de demander une étude locale en zéro et les équations de trois droites asymptotes ainsi que les positions relatives courbe/asymptote. Ce découpage de la tâche en deux sous-tâches (calcul puis interprétation) constitue une aide fournie aux étudiants.

A travers cet environnement, on discerne une volonté de présenter aux étudiants des exercices engageant des pratiques qui restent dans la filiation de celles du lycée, et à travers lesquelles ils puissent retrouver certains de leurs « repères » de terminale. Mais on ne distingue pas une *programmation* particulière des tâches, permettant de répéter certaines d'entre elles, en sollicitant à chaque fois plus ou moins d'autonomie selon un scénario donné. L'ordre dans lequel sont présentés les exercices, le fait qu'une réponse ou une indication soit donnée, ou non, semble ici intervenir de façon un peu aléatoire. Les objectifs d'apprentissage ne se dégagent pas toujours très clairement de la suite d'exercices, certains thèmes essentiels étant

[18] Ce serait une classique question de cours, si l'énoncé n'imposait pas des conditions particulières sur f(0) et sur f '(0), superflues, car le résultat reste valable et se démontre de la même façon dans le cas le plus général.
[19] Mais la fonction est très simple, définie par $f(x)=2x/(1+x^2)$, ce qui enlève au développement limité son caractère de nécessité. Une discussion des méthodes possibles s'imposerait.
[20] Même s'il s'agit ici d'une fonction comportant un terme en « Arctangente ».

sous représentés par rapport aux exercices envisageables sur ce thème (exemple : théorème de Rolle et formule de Taylor). Enfin, les concessions faites en matière de recherche d'une certaine continuité des pratiques par rapport au lycée, avec notamment une présence très majoritaire de tâches purement algorithmiques, font que la portée de ces exercices reste assez limitée. Même au sein des très rares exercices portant sur des objets et des situations un peu plus généraux, on « décolle » très peu du cours. Il n'y a pas de dimension critique et réflexive qui soit engagée au sein du questionnement.

IV/ ETUDE DES FICHES DE L'UNIVERSITE DE LILLE.

A/ PRESENTATION GENERALE DES FICHES DE LILLE.

Les fiches pédagogiques mises au point par l'équipe de Lille constituent un environnement riche et original d'activités multiples exploitant diverses pistes pour un apprentissage plus *actif* et *interactif*. Elles mettent en valeur la variété et la complexité possibles du travail mathématique dès les débuts de l'université. Couvrant largement le programme de DEUG A première année[1], elles se constituent tout à la fois, d'exercices, de résumés de cours, de questionnaires à choix multiples, de travaux pratiques sur ordinateur et de programmes d'étude (séquences didactiques) destinés aux enseignants. Un dispositif par ateliers (étudiants travaillant en petit groupes) est parfois utilisé, et joue dans cet environnement un rôle *crucial.*

Les fiches d'exercices sont de deux types : il y a celles destinées aux *travaux dirigés* en classe et les fiches d'*auto-apprentissage.* Ces dernières ont pour objectif de *déléguer* les parties purement algorithmiques de l'apprentissage au travail personnel des étudiants[2] et les réponses aux questions posées sont alors fournies. Les questionnaires à choix multiples peuvent être utilisés pour provoquer des sondages d'opinion et des débats contradictoires, favorisant ainsi un travail critique. Ils permettent aussi d'aborder des notions indépendamment du cours, d'effectuer des mises au point sur des connaissances antérieures (ayant trait par exemple aux nombres réels). Les travaux pratiques sur ordinateur peuvent être précédés d'un travail personnel de préparation, et sont suivis d'un travail de synthèse et de réflexion, finalisé au sein d'un compte-rendu personnel qui laisse une certaine *autonomie* à l'étudiant.

L'intention exprimée des auteurs de ces fiches pédagogiques est de permettre aux étudiants d'accéder à une certaine maîtrise du formalisme, tout en donnant *sens* à ce formalisme par le biais de contextes, de situations variées, d'établir des liens entre les différents aspects, formels, graphiques, géométriques et algorithmiques du travail mathématique. L'étude qualitative des équations différentielles occupait à cet égard, jusqu'à ces dernières années, une place privilégiée et *emblématique* au sein de ces fiches, faisant l'objet d'un scénario didactique très complet, dont les grandes lignes s'inspiraient d'un travail initial de M.Artigue et V.Gautheron[3], mené à l'université de Paris VII. Ce scénario s'appuyait au départ sur des

[1] Avec en outre un développement important de l'étude qualitative des équations différentielles.
[2] Il s'agit de se dégager en partie de ces tâches algorithmiques pour consacrer davantage de temps à un travail plus qualitatif, laissant une place plus importante au questionnement.
[3] Se référer à l'ouvrage : « Systèmes différentiels, étude graphique. » par M.Artigue et V.Gautheron, Cedic, Fernand Nathan, 1983.

activités sur les courbes et les fonctions[4], puis des situations de problèmes tirées de la physique et amenant des équations différentielles. Ensuite prenaient place en alternance, des séances de travaux dirigés, centrées sur une vision *géométrique* de la famille de solutions (étude des champs de pentes, symétries et translations conservant l'équation différentielle...) ou plus standards (résolution explicite)[5], des cours magistraux permettant de dresser des *bilans*[6], de dégager des *méthodes générales* d'étude[7], et enfin des séances de travail sur ordinateur (possibilité de conjecturer, de justifier...), des devoirs à la maison ou des interrogations écrites en classe.

Cet enseignement sur les équations différentielles cristallisait les préoccupations essentielles dont tentent de s'inspirer l'ensemble des fiches pédagogiques de Lille. Il pouvait, selon le vœu des auteurs, apporter des connaissances nouvelles tout en suscitant des activités plus riches qu'un travail algorithmique répétitif. Il devait ainsi mettre en valeur une épistémologie plus authentique de l'activité mathématique (comment apprendre des mathématiques, prendre conscience du pourquoi et du comment), en donnant aux étudiants *l'initiative du questionnement* afin qu'ils puissent trouver en eux-mêmes les moyens d'obtenir les réponses correctes et de donner sens à leurs réponses.

B/ CARACTERISTIQUES GENERALES DE L'ENVIRONNEMENT ETUDIE EN ANALYSE.

Les fiches de Lille nous offrent, à travers une organisation systématique, un panorama assez complet des différents niveaux de rupture *potentiels* en Analyse dans la transition entre le secondaire et le supérieur. Cela peut permettre d'ailleurs une objectivation de ces difficultés, qui apparaissent souvent dans les autres environnements de manière plus sporadique et accidentelle, au détour d'un exercice donné, et constituent alors des « *points aveugles* ».

Ainsi, les exercices de la fiche « *Formules et graphiques*[8] », qui permettent de préparer le travail sur les équations différentielles, constituent des activités qualitatives originales que l'on ne trouve pas dans un environnement de lycée[9] et qui sont susceptibles de poser bien des problèmes aux étudiants. Elles peuvent s'avérer cruciales pour le développement d'une certaine flexibilité cognitive. Au sein de l'ensemble des fiches, un accent particulier est d'ailleurs mis sur les aspects graphiques et géométriques et les changements de cadres éventuels[10]. Cette préoccupation de faire travailler les étudiants dans le cadre graphique à chaque fois que c'est possible (en dehors des fiches sur les équations différentielles, voir par exemple la fiche « *Sens de variation* », ou celle sur les fonctions réciproques[11]) semble ici

[4] En vue de rompre, selon M.Rogalski, « avec un concept de fonction étroitement lié à la seule notion de formule et de tableau de variation, pour accéder à un aspect plus géométrique et plus qualitatif ».
[5] Ou encore, permettant de comparer l'apport de l'étude qualitative et de la résolution explicite, par un travail critique en petits groupes.
[6] Institutionnalisation des notions de barrière, de zone piège, de solution maximale, de prolongement de solutions.
[7] Quelles questions se poser, dans quel ordre, quels moyens pour répondre ?
[8] Références : Fonc.Ex.002.04.
[9] Alors qu'elles sont théoriquement envisageables à partir des seules connaissances du lycée.
[10] Entre les cadres algébrique et graphique mais aussi entre les cadres algébrique et numérique (exemple : problèmes d'approximation numérique par utilisation d'une formule de Taylor, fiche Fonc.Ex.001.05).
[11] Références respectives : Fonc.Ex.003.03 et Fonc.Ex.004.03.

omniprésente. Et il y a là un fort contraste avec les environnements d'exercices issus d'autres universités, assez *pauvres* en général au niveau de l'utilisation de ce cadre.

Les activités de nature plus formelle, engageant en général un niveau de généralité élevé sont également très présentes au sein de ces fiches. Elles sont d'ailleurs parfois d'une difficulté excessive pour le public d'étudiants actuel ; une fiche entière est ainsi consacrée aux raisonnements à ε près[12], qui ne sont souvent plus guère pris en considération au niveau des exercices dans les autres universités. Les fiches ayant plus spécifiquement trait à la notion de dérivée[13] (en dehors de la fiche d'entraînement au calcul de fonctions dérivées), sont composées à plus de 75% d'exercices portant sur des objets généraux (classes de fonctions). Une place importante est consacrée au travail sur des conjectures[14], pour lequel une certaine culture, spécifique de l'enseignement supérieur, de la démonstration et du contre-exemple est nécessaire. Un travail spécifique, relatif aux problèmes de nature logique (en lien avec le travail de formalisation) est *isolé* au sein un certain nombre de fiches conçues à cet effet[15], des fiches *« Résumé de cours »* complètent ce dispositif[16].

Tous ces exercices présentent un large éventail du niveau de difficulté, dont le « centre de gravité » se situe cependant beaucoup plus près, selon nous, des niveaux les plus élevés que des niveaux les plus bas. En effet, la *dichotomie*, affirmée au sein de ces fiches, entre exercices « purement algorithmiques » et exercices suscitant la réflexion, ne se réduit pas à une opposition entre exercices « faciles » et exercices « difficiles », bon nombre d'exercices laissés à la charge du travail personnel des étudiants posant des problèmes techniques délicats pour le public actuel[17]. Cependant, il convient aussi de reconnaître que les problèmes algorithmiques font parfois l'objet d'une prise en charge particulière au sein de *fiches méthodes* qui décrivent de façon détaillée les situations que l'on peut rencontrer et les stratégies à adopter en conséquence. C'est notamment le cas dans les deux petits livrets respectivement intitulés : *« Comment chercher une primitive ? »* et *« Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode »*[18].

Cet environnement de fiches pédagogiques présente donc les aspects les plus marqués d'une évolution forte des rapports au savoir, telle qu'on l'imagine *« idéalement*[19] *»* dans la transition

[12] Référence Fonc.Ex.005.03.

[13] Fiche Fonc.Ex.016.01 intitulée : « Fonctions continues et fonctions dérivables », fiche Fonc.Ex.015.03 intitulée : « Théorème de Rolle, Théorème des accroissements finis », fiche Fonc.Ex.001.05 intitulée : « Formule de Taylor ».

[14] Exemple : les conjectures sur la dérivée de la fiche Fonc.Ex.005.03 (« Si f'(x) tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, alors f(x) tend vers une limite quand x tend vers $+\infty$ », réciproque de cette proposition,... etc.).

[15] Les fiches sur l'utilisation des quantificateurs, notamment la fiche Fonc.Ex.013.03 intitulée : « Quantificateurs et limites » et la fiche Rais.Ex.004.01 intitulée « Exercices de compréhension sur les formules quantifiées ».

[16] Elles portent sur le « langage des quantificateurs » (fiche Rais.RC.002.01), « l'utilisation des symboles logiques dans la rédaction mathématique » (fiche Rais.RC.001.01), les « démonstrations et connecteurs logiques » (fiche Rais.RC.003.01), les « démonstrations et quantificateurs » (fiche Rais.RC.004.01).

[17] Voir par exemple la fiche Fonc.Pr.005.02 sur le calcul de limites, qui se présente comme une fiche de « révisions » alors que les calculs proposés nécessitent un *recul* sur les techniques de base enseignées au lycée que les étudiants n'ont pas, en général. Il suffit de se référer aux calculs de limites effectivement sollicités dans les manuels de lycée ou les épreuves du bac (précédemment analysés) pour voir qu'ils n'y sont pas préparés.

[18] Références Suit.RC.001.03 et Prim.RC.001.01.

[19] Tout dépend du point de vue selon lequel on se place : la richesse conceptuelle, l'entrée possible dans des problématiques et des pratiques nouvelles constituent à la fois une opportunité (du point de vue du travail mathématique *théoriquement* envisageable), et une source de rupture, dans la transition institutionnelle.

secondaire /supérieur : complexification des tâches, rôle accru des changements de cadre, élévation des niveaux de généralisation et de formalisation, élargissement du champ fonctionnel, questionnement nouveau des notions, mise en évidence de connections entre différentes branches des mathématiques,... etc. Pour tenter de gérer cette rupture multidimensionnelle très affirmée avec l'enseignement secondaire, cet environnement se fonde sur une organisation structurée des fiches d'exercices, qui ont des fonctions diverses, et la présence de résumés de cours et de travaux pratiques sur ordinateur. La problématisation (non artificielle) des notions, les différents *éclairages* apportés, de nature graphique ou numérique, sont par ailleurs à considérer, du point de vue de l'apprentissage, comme des facteurs de continuité avec l'enseignement secondaire.

Mais ce qui distingue radicalement ces fiches, du point de vue de la forme, d'un environnement d'exercices de lycée, c'est, au delà des grandes lignes « bien tracées » de quelques scénarios d'apprentissage (équations différentielles, accès à la formalisation...) ou de méthodes générales (calcul de primitives, étude de la convergence de suites...), une certaine absence d'aides à la résolution plus locales et de découpages assez fins des tâches complexes (par ailleurs plus nombreuses). Le problème qui se pose, est cependant de savoir si une telle prise en charge est *conciliable* avec la nature nouvelle[20] des exercices proposés, la volonté de conserver aux situations toute leur signification et d'amener les étudiants à davantage de réflexion personnelle et d'autonomie dans le travail, objectif avoué de ces fiches.

C/ ETUDE DETAILLEE DE QUELQUES FICHES CENTREES SUR LA DERIVEE ET REPRESENTATIVES DE L'ENVIRONNEMENT ETUDIE.

1°) Une précision préalable sur le choix des fiches analysées.

Précisons tout d'abord que nous n'avons pas fait le choix d'analyser ici les fiches relatives aux *équations différentielles*, parce que l'ensemble du dispositif constitué autour de ce thème représente une excroissance dans l'environnement considéré, ce qui pose le problème de la représentativité de ces fiches par rapport à cet environnement. Il convient de noter que ce dispositif constitue ici un *mode d'entrée* possible dans le monde de l'Analyse, qui permet effectivement de faire sentir aux étudiants une approche qualitativement nouvelle à travers des situations qui peuvent prendre sens pour eux. Cependant, le problème de la reproductibilité de ce type de scénario didactique, exprimé en termes de moyens matériels (heures d'enseignement notamment) et concernant d'autres thèmes mathématiques, reste entier, ce qui justifie également notre choix méthodologique.

Nous centrons donc notre analyse sur quelques fiches concernant notamment le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis, la formule de Taylor, les développements limités, le sens de variation, les raisonnements à ε près avec la notion de dérivée.

[20] En particulier lorsqu'il s'agit d'exercices induisant une certaine généralité, une démonstration formelle ou la recherche de contre-exemples, un questionnement plutôt que l'application mécanique de procédures.

2°) Quelques fiches mettant en évidence des ruptures fortes.

Des fiches d'exercices telles que celles qui s'intitulent : « *Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis* », « *Fonctions continues et fonctions dérivables* », ou encore : « *Localisation des zéros d'une fonction* »[21] sont tout particulièrement en rupture avec les environnements d'exercices de lycée[22]. Elles sont constituées pour l'essentiel d'exercices ayant trait à des situations générales (c'est le cas de onze exercices sur quatorze dans la fiche sur le théorème des accroissements finis), les quelques fonctions usuelles qui apparaissent servant surtout d'exemples ou de contre-exemples à des propriétés à établir. La raison en est simple : bon nombre de ces exercices constituent presque des compléments du cours, s'inspirant de quelques thèmes classiques et très emblématiques de la *culture universitaire* (interpolation linéaire, condition nécessaire et suffisante de stricte croissance, théorème de Rolle généralisé, polynômes d'interpolation de Lagrange, théorème de Darboux...).

Cela induit un niveau de formalisation assez élevé, certaines lettres utilisées pouvant matérialiser des *constantes* du problème posé (fonction s'annulant en ***a*** et ***b***), d'autres des *variables* (la fonction dépend de ***x***), et d'autres encore des *paramètres* (ordre de dérivation ***n*** d'une fonction, paramètre ***A*** à déterminer pour que l'on puisse appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire φ...). Il y a aussi des lettres qui changent de statut en cours d'exercice : par exemple, dans certains exercices on est amené à appliquer le théorème des accroissements finis entre deux points, puis à faire tendre l'un ou l'autre de ces deux points (ou les deux !) vers une certaine limite. Ces points passent du statut de *constante* à un statut de *variable*, et il faut penser dans ce cas que le « c » (ou le « θ ») de la formule des accroissements finis est une fonction (implicite) des bornes, donc devient lui aussi une variable. C'est notamment le cas dans les deux exercices suivants :

Ex 4. Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle $[a,b[$, dérivable sur $]a,b[$.

1) On suppose que $f'(x)$ tend vers une limite finie l quand x tend vers a, montrer que f est dérivable (à droite) en a, et que $f'_d(a) = l$.

2) Que peut-on dire en supposant cette fois que $f'(x)$ tend vers une limite infinie.

Ex 6. Calculer $\lim_{x\to+\infty}(\text{ch}\sqrt{x+1} - \text{ch}\sqrt{x})$ et $\lim_{x\to+\infty}((x+1)^{1+1/(x+1)} - x^{1+1/x})$.

Exercices 4 et 6 extraits de la fiche : « Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis »

Le même phénomène se produit lorsque l'étudiant doit déduire une propriété générale d'un résultat établi pour une donnée du texte fixée au départ, mais de façon quelconque :

Ex 10. Soit $f: [a,b] \to \mathbf{R}$, continue sur $[a,b]$, deux fois dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. On suppose qu'il existe un nombre M tel que $(\forall x \in]a,b[)\ |f''(x)| \leq M$.

1) Soit $x \in]a,b[$ et $A_x \in \mathbf{R}$. On considère la fonction $\varphi_x: [a,b] \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi_x(t) = f(t) - A_x(t-a)(b-t).$$

[21] Références respectives : Fonc.Ex.015.03, Fonc.Ex.016.01, Fonc.Ex.014.02.

[22] On pourrait citer d'autres fiches également. Notons à cet égard que la version des fiches de Lille sur laquelle nous avons travaillé est cependant la plus récente (Octobre 1997).

a) Montrer qu'on peut choisir A_x de façon que $\varphi_x(x) = 0$; c'est ce choix qu'on fait dans la suite de la question 1).

b) Trouver deux valeurs distinctes x_1 et x_2, appartenant à des intervalles à préciser, telles que $\varphi'_x(x_1) = \varphi'_x(x_2) = 0$. En déduire l'existence d'une valeur x_3, dans un intervalle à préciser, telle que $\varphi''_x(x_3) = 0$.

c) En déduire que $|A_x| \leq \frac{M}{2}$.

2) Déduire de la question précédente que $(\forall x \in [a, b])\ |f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

Exercice 10 de la même fiche. Constantes, variables et paramètre : un statut changeant (on fixe la valeur du paramètre A_x selon x en 1°)a), et l'élément x, constant en 1°), devient variable en 2°).

Dans cet environnement de démonstrations générales, presque à chaque exercice correspond un contexte et des difficultés qui lui sont *propres*, et il n'y a plus guère de place pour un travail de répétition, de routinisation systématique des tâches comme au lycée, avec une évolution des énoncés par « petites touches » d'un exercice à l'autre. Il se peut même que l'étudiant doive, pour effectuer un exercice, appliquer un résultat général et *non vu en cours*, issu d'un exercice précédent, ce qui suppose une certaine appropriation de ce résultat pourtant nouveau. Exemple : appliquer le théorème de Rolle *généralisé* (sous l'hypothèse suivante : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$) pour établir que le polynôme P_n intervenant au numérateur de la dérivée n-ième de $f(x) = \ln(1+x^2)$ a toutes ses racines réelles et distinctes.

Concernant les indications locales, elles ne sont fournies qu'au « compte-gouttes » et ne prennent en considération que les difficultés les plus élevées de l'exercice. Par exemple, s'il faut utiliser une définition formelle de limite, appliquer le théorème des accroissements finis à une fonction peu évidente (en l'occurrence à $x \to f(x)/x$ pour voir qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = f(c)/c$), cela est indiqué. Mais s'il faut, par exemple[23], effectuer un raisonnement par récurrence, appliquer plusieurs fois de suite le théorème de Rolle ou sommer des inégalités, cela n'est pas forcément suggéré, car il y a des indices apparents de la nécessité de ce type de démarche (la propriété à établir dépend d'un entier naturel n, ou bien concerne la valeur en un point pour une dérivée d'ordre supérieur à 1, ou encore, c'est une somme de termes qui apparaît dans l'expression d'une suite à étudier).

Dans la fiche intitulée *« Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis »*, l'étudiant sait qu'il lui faudra appliquer *quelque part* au sein de l'exercice l'un de ces théorèmes, mais dans la plupart des cas on ne lui dit ni où, ni selon quelles *modalités*, ni surtout *comment* faire usage du résultat obtenu par cette procédure pour répondre au problème posé. C'est à lui seul de le deviner. Dans d'autres fiches, qui ne portent pas ce titre, il faut aussi appliquer l'un de ces théorèmes, et là, plus rien ne l'indique.

De tout cela, il s'ensuit que bien des tâches proposées dans ces quelques fiches sont de nature complexe et nécessitent souvent de faire des *choix* personnels. Nous sommes très loin de cette gestion « pas à pas » des difficultés techniques, parfois rencontrée dans les énoncés des exercices de manuels de lycée, et très souvent dans les sujets de baccalauréat.

[23] Exercices 12, 1, 7 de la fiche d'exercices intitulée : « Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis ».

Il convient aussi de remarquer la présence de questions ouvertes situées au terme de certains exercices, et sollicitant un point de vue critique (questions du style : *« Que peut on dire si on remplace telle hypothèse par telle autre ? », « Comment modifier l'énoncé pour obtenir telle chose ? »*). On voit bien là, à travers ces questions difficiles[24], comment le désir de solliciter une réflexion personnelle, dans une culture de questionnement du savoir, s'oppose à la constitution de canevas d'aide très directifs, qui se justifiaient davantage dans l'optique du lycée, de familiarisation à des procédures algorithmiques efficaces. L'étude de conjectures, la recherche d'interprétations graphiques relèvent de la même problématique, le recours au cadre graphique jouant d'ailleurs un rôle de levier pour l'étude de certaines conjectures. C'est notamment le cas dans la fiche intitulée : *« Suites et Fonctions. Raisonnement à ε près »*[25] :

Ex 9. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a, +\infty[$. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1) Si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, alors $f(x)$ tend vers une limite quand $x \to +\infty$.
2) Si $f(x)$ tend vers une limite quand $x \to +\infty$, alors $f'(x)$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.
3) Si f est bornée et si $f'(x)$ tend vers une limite l quand $x \to +\infty$, alors $l = 0$.
4) Si f tend vers une limite quand $x \to +\infty$, alors $f'(x)$ ne peut pas tendre vers une limite non nulle quand $x \to +\infty$.
5) Si f est bornée, f' est bornée.
6) Si f est décroissante et tend vers 0 quand $x \to +\infty$, alors $f'(x)$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

On notera cependant ici que l'utilisation elle-même du cadre graphique n'est pas toujours suggérée, et pose aussi certains problèmes encore inhabituels au sortir du lycée (interprétations de *« $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = k$ »* ou *« f' est bornée »* par exemple). Quant aux conjectures elles-mêmes, leur étude nécessite aussi d'autres moyens que le recours au cadre graphique : l'utilisation du raisonnement à ε près, comme le suggère le titre de la fiche, mais aussi des références personnelles telles que la connaissance de fonctions un peu *pathologiques*, $x \to \sin(x^2)/x$ ou $x \to \sin(1/x)$) en l'occurrence, que l'on ne rencontre guère au lycée. Le problème de la prise en charge dans l'apprentissage de tous ces points de rupture à travers la pratique de tels exercices reste entier, le questionnement tel qu'il est proposé ici laissant encore dans l'ombre bien des aspects.

La fiche intitulée *« Formule de Taylor[26] »* (au singulier) ne comprend que cinq exercices, ce qui ne permet pas un entraînement répétitif aux tâches les plus standards sur ce thème[27], d'autant que ces quelques exercices portent sur des sujets tout de même assez variés. L'exercice n°1 demande d'établir sur R_+ un encadrement de ln(1+x) par des fonctions polynômes et pose le problème d'un encadrement similaire sur]-1,0[. Les exercices n°2 et n°4 concernent des problèmes d'approximation numérique, l'exercice n°3 a trait, sous la forme de questions d'algèbre linéaire, à l'application de la formule de Taylor aux polynômes :

[24] Le fait d'ouvrir la question laisse à l'étudiant, en fonction de son intuition première, soutenue par une expérience de l'Analyse encore bien légère, le choix entre deux types de prospection, tentative de démonstration ou recherche d'un contre-exemple, radicalement différentes.
[25] Référence Fonc.Ex.005.03.
[26] Référence Fonc.Ex.001.05.
[27] Encadrements fonctionnels, approximation numérique, calcul de la somme de certaines séries : $\Sigma_{k=0,..\infty} x^k/k!$ pour tout réel x, $\Sigma_{k=1,..\infty} (-1)^{k+1}x^k/k$ pour tout réel x de]–1,1], étude de la position relative courbe/tangente (cas d'une fonction convexe sur un intervalle). Certaines de ces tâches sont d'ailleurs ici manquantes.

Ex 3. Soit $k, n \in \mathbf{N}$ tels que $1 \leq k \leq n$, et $a \in \mathbf{R}$. On note $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, et $f : \mathcal{P} \to \mathbf{R}^{k+1}$ définie par $f(P) = (P(a), P'(a), \ldots, P^{(k)}(a))$.

1) Montrer que f est une application linéaire surjective.
2) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$.
3) Étant donné $Q \in \mathcal{P}$, trouver tous les $P \in \mathcal{P}$ tels que $f(P) = f(Q)$.

Enfin, l'exercice 5, très « classique » au niveau DEUG A, porte sur la majoration du terme $|f'|$ lorsque $|f|$ et $|f''|$ sont bornées sur R, f étant de classe C^2 sur R. Il est complété par deux questions d'ordre critique : *« Peut-il arriver que f et f' soient bornées sans que f'' le soit ? »* et *« Peut-il arriver que f' et f'' soient bornées sans que f le soit ? »*, auxquelles il faut répondre sans aide de l'énoncé.

Dans tous ces exercices, l'étudiant garde complètement à sa charge les conditions d'utilisation de la formule de Taylor-Lagrange (choix de l'ordre, et des points[28]) ; il n'y a pas de progressivité des exercices, notamment de ce point de vue. On voit bien que l'objectif des auteurs est surtout de mettre en évidence une certaine *richesse* des liens existant entre la formule de Taylor et diverses situations, voire diverses branches des Mathématiques, et non de cibler le travail sur une ou deux tâches bien précises en vue de les rendre routinières pour l'étudiant.

Notons cependant que cette fiche d'exercices ne se fixe pas pour objectif de faire aussi travailler les étudiants sur l'idée d'un choix nécessaire à effectuer entre la formule de Taylor-Young et celle de Taylor-Lagrange, selon que la propriété à établir est de nature *locale* ou *globale*. Toutes les situations proposées induisent le choix de la formule de Taylor-Lagrange, alors qu'indépendamment du travail purement algorithmique de calcul des développements limités de fonctions usuelles, il existe aussi des exercices, éventuellement de nature générale, et nécessitant l'utilisation de la formule de Taylor-Young[29].

Remarquons enfin que le dernier exercice de cette fiche nécessite, tel qu'il est posé, encore beaucoup d'initiative de la part des étudiants :

Ex 5. Soit f de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. On suppose que f et f'' sont bornées, et on pose $M_0 = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f''(x)|$. Pour $x \in \mathbf{R}$ et $a > 0$, on applique la formule de Taylor à f entre x et $x + a$, et entre x et $x - a$. Montrer la relation $|f'(x)| \leq \frac{1}{a}M_0 + \frac{a}{2}M_2$; en déduire que f' est bornée et que $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Peut-il arriver que f et f' soient bornées sans que f'' le soit ? Peut-il arriver que f' et f'' soient bornées sans que f le soit ?

Ainsi, appliquer la formule de Taylor entre x et x-a peut se faire de deux façons, en écrivant : $f(x-a) = f(x) - af'(x) + a^2/2\, f''(c)$, ou bien encore : $f(x) = f(x-a) + af'(x-a) + a^2/2\, f''(c)$, avec $c \in]x-a, x[$. La tentation de choisir cette seconde voie est grande chez certains étudiants en

[28] Sauf dans le dernier exercice, où l'on demande d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre x et x+a puis entre x et x-a.

[29] Par exemple, « montrer que la fonction g définie par $g(x)=f(x)/x$ si $x\neq0$ et $g(0)=f'(0)$ est de classe C^1 sur R si f est de classe C^2 sur R avec $f(0)=0$ », « calculer $\lim_{h\to0} [2f(x_0+3h)-3f(x_0+2h)+f(x_0)] / 3h^2$ pour f de classe C^2 sur $]-a,a[$ et $x_0\in]-a,a[$ $(a>0)$ » ou prouver « qu'il existe $\alpha>0$ tel que $(\forall x\in]-\alpha, \alpha[)$ $x+x^2/4 \leq e^x-1 \leq x+2x^2/3$ ».

raison du fait que x-a< x. En effet, dans la formule de Taylor usuellement donnée, f étant une fonction de classe C^n ***sur*** l'intervalle ***[a,b]*** qui admet une dérivée d'ordre n+1 ***sur]a,b[***, on a : $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) +\ldots+ (b-a)^n f^{(n)}(a) /n! + (b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c) /(n+1)!$, et les deux réels a et b vérifient donc implicitement $\boldsymbol{a<b}$ dans ce contexte. Or il se trouve que le fait d'appliquer la formule de Taylor d'une de ces deux manières, ou de l'autre, n'est pas indifférent du point de vue de la réussite de la question : *« montrer que* $|f'(x)| \leq M_0/a + aM_2/2$ *pour tout réel x »*. Mais la réalisation de cette question nécessite elle-même une certaine autonomie dans le travail technique (soustraire les identités, utiliser les inégalités triangulaires...).

Pour résoudre la question suivante, il faut d'abord remarquer le caractère *quelconque* du réel a>0 dans l'inégalité précédente, ce qui induit alors une inégalité nouvelle, indépendante de a : $|f'(x)| \leq \text{Inf}\,\{M_0/a + aM_2/2 \,;\, a \in R_+^*\}$. C'est là encore une situation où une notation du texte, a, après avoir désigné une *constante* du problème, doit prendre un statut de variable, le calcul du majorant pouvant s'effectuer ensuite par l'étude de la fonction $x \to M_0/x + xM_2/2$ sur R_+^*. Il y a donc ici concomitance de deux difficultés, l'une de nature plus conceptuelle, et l'autre de nature plus technique, qui ne sont pas du tout prises en charge par l'énoncé, alors qu'elles seraient tout à fait inhabituelles au lycée. Elles participent de ces « petits sauts », de ces microruptures, qui passent souvent inaperçus dans la transition secondaire/supérieur et ne font pas l'objet d'un apprentissage spécifique à l'université (il n'en irait pas de même au lycée).

3°) Les développements limités : simplicité apparente d'une prise en charge.

Les *cinq* fiches[30] relatives à l'apprentissage des développements limités et leurs applications fournissent un panel assez large d'exemples, avec une présentation structurée mettant bien en relief les différents *objectifs* et niveaux de *difficulté* envisageables.

Il y a une fiche portant sur les développements limités de 39 fonctions différentes et constituée de huit exercices, avec pour chacun un thème différent : somme, produit, quotient, et enfin composée de deux développements usuels pour les thèmes respectifs de quatre de ces exercices, développements limités de fonctions usuelles en d'autres points réels que 0, puis à l'infini pour deux autres exercices. C'est donc là un entraînement spécifique, presque spécialisé, au calcul de développements limités, qui est proposé aux étudiants, et dans des cas en général assez *simples.* Ce type de *progression,* facile à imaginer pour des parties très algorithmiques du programme (c'est le cas ici), est à signaler, puisqu'on n'en rencontre pas très fréquemment s'agissant d'autres thèmes, comme cela a été souligné au-dessus.

Une autre de ces fiches, constituée de neuf exercices portant seulement, cette fois, sur quatorze développements limités, propose au contraire un panel *plus varié* de tâches, mais sans répétition de celles-ci. Ces dernières concernent essentiellement les *applications* des développements limités (étude de branches infinies, étude locale d'une courbe paramétrée, développement limité d'une fonction réciproque non explicitable, d'une fonction satisfaisant une équation différentielle dont les solutions ne sont pas explicitement calculables,... etc.).

Enfin, deux fiches destinées au travail *personnel* des étudiants (11 exercices au total, regroupant 39 calculs de développements limités, avec les réponses) doivent leur permettre de

[30] Références : DévLim.Ex.001.04, DévLim.Ex.002.03 et Ex.003.01 et DévLim.Pr.001.06 et Pr.002.03.

reprendre sur d'autres exemples le travail effectué en travaux dirigés à partir des deux autres fiches précédemment évoquées.

Cependant, force est de reconnaître que cette banque d'exercices, qui se centre une fois de plus sur la mise en évidence de la variété des situations susceptibles d'être étudiées, et le fait ici selon un mode de présentation très *hiérarchique* et *ordonné*, ne prend pas davantage en compte les difficultés techniques effectives de ces exercices, dont le traitement reste à la charge des enseignants[31]. Aucun exercice ne se fixe pour objectif, notamment, de problématiser des questions telles que celle relative à la *baisse de l'ordre* d'un développement limité en cours de calcul, à sa *planification* selon l'usage que l'on veut en faire et les simplifications que l'on peut prévoir, en lien avec, par exemple, une propriété de parité. Ainsi, par exemple, le rôle joué dans une étude locale (dérivabilité, branche infinie) par les deux premiers termes du développement limité (équation d'une tangente, d'une asymptote oblique), et du premier terme non nul qui les suit (position relative entre courbe et tangente ou asymptote, présence d'un extremum ou d'un point d'inflexion) n'est pas souligné par un questionnement adapté. Cette question peut être, cependant, le point de départ d'un scénario d'exercice particulier[32], pouvant même aboutir à l'institutionnalisation de théorèmes secondaires. Notons que ce *phénomène* que nous venons d'observer : une technique donnée peut ensuite faire l'objet, *ou non*, au niveau du cours, d'une institutionnalisation du théorème qui lui correspond (la « technologie » au sens de Chevallard), est bien davantage observable au niveau de l'enseignement universitaire que dans l'enseignement secondaire où le corpus de théorèmes à enseigner est circonscrit *à l'avance*, du fait de la présence de programmes officiels. Cette *variabilité* des contenus enseignés va induire une variabilité des pratiques effectives au sein de l'institution, mais influence surtout l'apprentissage lui-même. Prenons l'exemple du théorème de comparaison globale des fonctions[33], qui était enseigné par M.Rogalski en première année de DEUG A à l'université de Lille[34], et ne l'est pas dans d'autres universités. C'est un outil non indispensable, mais dont l'*efficacité* peut changer radicalement le rapport d'un étudiant au problème de comparaison de fonctions sur un intervalle, selon qu'il en dispose ou non.

La cinquième des fiches de Lille sur les développements limités (à traiter en travaux dirigés) s'intitule : *« Exercices de compréhension sur les développements limités »* et pose le problème de cette notion vue dans sa dimension « objet » (en particulier, indépendamment de la formule de Taylor-Young qui permet le calcul pratique des développements limités usuels). La définition d'un développement limité et une certaine expérience des problèmes de comparaison de fonctions et des équivalents sont au cœur de ces exercices de réflexion, à nouveau très emblématiques d'une *culture* de type universitaire. Presque d'un exercice à l'autre, voire d'une question à l'autre, c'est une idée nouvelle (qualitative et non triviale à ce niveau d'apprentissage) qui est requise pour résoudre le problème posé : particularité des fonctions $x \to x^2$ et $x \to |x|^{1/2}$ vis à vis de la notion de développement limité en zéro, comportement en 0 et en l'infini, selon les paramètres p et q, des fonctions du type $x \to x^p \sin^q(1/x)$, ou encore interprétation de l'hypothèse : « $(\forall n \in N) \lim_{x\to 0} f(x)/x^n = 0$ » en

[31] Qui, en l'occurrence, travaillent beaucoup en équipe, ceci expliquant peut-être cela.
[32] Cette idée est exploitée dans les feuilles d'exercices de l'université de Valence, précédemment évoquées.
[33] Enoncé : « Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $]a,b[$, à valeurs réelles, et $x_0 \in]a,b[$. Si on a : $f(x_0)=g(x_0)$ et $f'(x) \geq g'(x)$ sur $]a,b[$, alors $f(x) \leq g(x)$ sur $]a, x_0[$ et $f(x) \geq g(x)$ sur $]x_0,b[$ ».
[34] Il fait l'objet d'une fiche intitulée : « Exercices utilisant le théorème de comparaison » (Réf : Fonc.Pr.007.02)

termes de développement limité, par introduction d'une fonction ε : « $(\forall n \in N)$ $f(x) = x^n.\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x)=0$ »,... etc.

L'exercice 1 de cette fiche, que nous présentons ci-dessous, met bien en valeur certaines difficultés conceptuelles inhérentes à la notion de développement limité, qui restent agissantes même dans un contexte algorithmique :

Ex 1. Cinq étudiants ont trouvé, pour la même fonction f, les expressions suivantes en cherchant un développement limité de f au voisinage de 0 :

(a) $f(x) = 2 + x^3\varepsilon_1(x)$

(b) $f(x) = 2 + x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$

(c) $f(x) = 2 + x^4 + x^3\varepsilon_3(x)$

(d) $f(x) = 2 + x^4 - 3x^5 + x^5\varepsilon_4(x)$

(e) $f(x) = 2 + x^4 + x^2\varepsilon_5(x)$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Sachant que la réponse (a) est juste, indiquer pour chacune des autres si elle est : fausse, juste, plus précise que a), moins précise que a)...

Cet exercice tente d'isoler et de soumettre aux étudiants un problème de comparaison des ordres de grandeurs au voisinage de zéro. Mais la situation évoquée reste *virtuelle*, ce qui pose des problèmes inattendus : si l'on peut dire avec certitude que la réponse (b) est nécessairement fausse, il est difficile de juger de façon vraiment satisfaisante les autres items. En effet, il est bien exact que l'expression présentée en (a) peut se mettre sous la forme indiquée en (c) ou en (e) par un choix judicieux des fonctions ε_3 et ε_5, mais pour des raisons évidentes ces expressions données en (c) et (e) ne peuvent constituer un développement limité ! Les mentions *« réponse plus précise que... »* (ou *« moins précise que... »*) d'une part, et *« réponse juste »* d'autre part, ne sont pas exclusives l'une de l'autre, un développement limité même « moins précis » se devant de rester correct (en tant que développement limité). Quant à la réponse proposée en (d), qui est, elle, acceptable en tant que développement limité d'*une* fonction à l'ordre 5, on ne peut dire qu'elle correspond à une réponse plus précise que (a) que si l'on sait déjà qu'elle est exacte en tant que développement limité *de la fonction f...* or rien dans l'énoncé de l'exercice tel qu'il est présenté ne permet d'en juger[35].

4°) Un exemple de fiche sollicitant des activités graphiques.

La fiche intitulée « Sens de variation »[36] présente quant à elle un type de tâche *théoriquement* possible au lycée, mais que l'on ne rencontre pas, de fait, dans les manuels de lycée : tracer la courbe de la fonction dérivée (respectivement, d'une primitive particulière) relative à une fonction dont la courbe représentative est fournie par l'énoncé. Nous reviendrons plus longuement sur ce type de tâche qui est exploitée dans l'un des tests soumis aux étudiants

[35] Précisément parce que la seule information que l'on a, concernant la fonction f, à savoir : $f(x)=2+x^3\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$, ne permet pas d'obtenir un développement limité d'ordre 5 de f.
[36] Référence Fonc.Ex.003.03.

(chapitre VI de cette thèse), mais il convient d'en souligner déjà succinctement quelques difficultés que cumulent les exercices de la fiche.

Remarquons d'abord qu'il s'agit là d'une tâche de production, qui nécessite un contrôle à divers niveaux, puisqu'il convient de tracer une courbe dans sa *totalité* en tenant compte à la fois des comportements locaux (points de discontinuité ou de non dérivabilité de la fonction dont la courbe représentative est donnée), globaux (variations) et asymptotiques (limites aux bornes du domaine, branches infinies) de la courbe d'origine. Cette tâche se démarque donc nettement des tâches de reconnaissance, ou d'associations de courbes deux à deux, déjà analysées au chapitre IV de cette thèse, comme on en rencontre dans les manuels de lycée, et qui ne demandent en général que l'identification d'un ou deux éléments du graphe, qui sont bien mis en valeur sur le tracé fourni.

Par ailleurs, il convient de noter que les courbes présentées dans cette fiche de Lille sont assez complexes (et donc difficiles à modéliser par des expressions analytiques). Ici, chaque courbe se compose au moins de trois ou quatre tronçons différents sur chacun desquels trouver une expression analytique plausible de la fonction reste, dans l'absolu, envisageable (pour l'expert), mais (au moins en partie) très délicat pour l'étudiant[37]. Les courbes ont des *caractéristiques* d'une grande variété : présence de points anguleux, pentes ou demi pentes horizontales ou verticales, présence de paliers constants et de parties affines ou courbes, points de discontinuité, tronçons croissants ou décroissants, présence d'asymptotes horizontales, verticales ou obliques. Il en résulte alors des difficultés également très variées pour le tracé sollicité de la courbe de la fonction dérivée ou d'une primitive. Ainsi, les points anguleux de la courbe d'une fonction se traduisent par des discontinuités et des points de non définition pour la courbe de sa dérivée, les demi pentes verticales par la présence d'asymptotes verticales, un extremum local en un point de dérivabilité par une annulation et un changement de signe de la dérivée en ce point. On ne peut rien déduire sur les variations de la dérivée à partir des variations de la fonction d'origine, ce qui a pour conséquence qu'une fonction décroissante sur un intervalle pourra avoir une dérivée croissante sur cet intervalle, phénomène assez « perturbant » a priori.

Le passage inverse, d'une fonction donnée à une de ses primitives, amène au contraire, au niveau local, des phénomènes de « *régularisation* » : par exemple, une fonction seulement continue sur R va avoir des primitives dérivables sur R. Mais cela ne signifie pas pour autant que le tracé de la courbe représentative d'une primitive soit plus aisé. Par exemple, une certaine incertitude (pouvant faire l'objet d'un travail *critique*) apparaît, s'agissant des *branches infinies* : ainsi, si $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, où a est un réel, la courbe représentative d'une primitive F de f peut présenter une asymptote ou une branche parabolique de coefficient directeur a (*cas typiques* : $F(x) = ax+(1/x)$ et $F(x) = ax+\ln(x)$). D'autre part, si la fonction d'origine f est décroissante (et positive) sur un intervalle, une de ses primitives F sera croissante sur l'intervalle.

La plupart de ces phénomènes se produisent, dans les situations proposées aux étudiants au sein de cette fiche de l'université de Lille, et l'énoncé n'apporte ici aucune aide particulière aux étudiants. Il fixe cependant, pour le passage d'une fonction à une de ses primitives, des

[37] Si toutefois il en avait l'idée, puisque rien ne suggère ici cette démarche qui n'est d'ailleurs pas celle attendue.

conditions précises qui permettent de réduire à un seul « *type* » de courbe le résultat sollicité : unicité de la primitive par la précision de sa valeur en 0 et, dans le cas où la fonction d'origine est discontinue, la demande d'une courbe représentant une primitive de la fonction d'origine sur *chaque intervalle* où cette dernière est *continue*[38], cette primitive devant être elle-même *continue sur R*.

[38] Cette précision est de nature à diriger un peu le travail des étudiants, sans toutefois constituer une aide en tant que telle. C'est plutôt le souci de présenter un énoncé assez *rigoureux* dans sa forme qui semble ici prédominer.

V/ CONCLUSIONS CONCERNANT L'ETUDE DE FEUILLES DE TRAVAUX DIRIGES ISSUES DE DIVERSES UNIVERSITES.

Alors que les exercices et les problèmes présents dans les manuels de lycée, et plus encore dans les sujets de Baccalauréat, se centrent le plus souvent sur la mise en fonctionnement à un niveau technique de quelques connaissances bien identifiées dans des contextes très ciblés, les environnements d'exercices des fiches de travaux dirigés utilisées dans différentes universités mettent en lumière un réseau plus complexe de pratiques.

Les tâches algorithmiques sont encore très présentes, mais d'une technicité en général plus élevée qu'au lycée. L'entrée dans une Analyse démontrée, mettant en scène des activités de raisonnement relatives à des objets *généraux*, induit un bouleversement *culturel* majeur. Car elle s'accompagne de l'apparition de pratiques nouvelles, telles que la preuve de conjectures ou la recherche de contre-exemples, qui nécessitent des références plus riches et un travail transversal de réflexion critique visant à interroger le *fonctionnement* des mathématiques. Mais l'utilisation de théorèmes au quotidien, même relative à des fonctions usuelles *particulières*, dans la mesure où elle se réalise désormais dans des contextes et à des fins multiples[1], nécessite des choix personnels et des prises d'initiative fréquents et variés. C'est cette évolution qui apparaît le plus nettement au sein des feuilles de travaux dirigés que nous avons analysées.

Cependant, d'autres facteurs, certes plus ou moins faciles à détecter selon la richesse de l'environnement d'exercices considéré, concourent aussi à cette variabilité des pratiques : le degré de formalisation nécessité[2], l'intervention du cadre graphique pour réaliser des inférences[3], les contextes induits par un nouveau monde fonctionnel, le rôle plus développé des définitions,... etc. Cette *diversité* des paramètres susceptibles d'influencer le travail mathématique en DEUG A, et la *pluralité* des moyens[4] pouvant être mis en œuvre pour résoudre un problème donné rendent l'ensemble des pratiques et des enjeux d'apprentissage au niveau du DEUG A d'une *lecture* plus délicates pour l'étudiant. L'acquisition n'en est alors que plus difficile, surtout sur le court terme.

Dans chaque université, certains aspects au niveau *global*, notamment parmi ceux cités plus haut, sont davantage privilégiés, mis en perspective, que d'autres, et il en va de même à un niveau plus *local* (exemple : sur un chapitre donné, il y a une variabilité des théorèmes institutionnalisés, des méthodes présentées en cours, qui n'existe pas, au moins théoriquement, au lycée, où les programmes sont précis et directifs).

---

[1] Voir par exemple la formule de Taylor, qui peut servir dans des tâches d'approximation numérique, de calcul de sommes de séries, de décomposition de polynômes, pour la démonstration d'inégalités fonctionnelles ou le contrôle des variations d'une fonction,... etc.

[2] C'est, par exemple, essentiellement dans les fiches de l'université de Lille que l'on trouve des exercices mettant en jeu tout à la fois la notion de dérivée et une définition formelle de limite.

[3] Au lycée, il s'agissait plutôt d'*interprétations* graphiques classiques et élémentaires (présence d'une tangente verticale, d'une asymptote, position relative de la courbe...) faisant suite aux calculs (idoines) sollicités.

[4] Par exemple, une inégalité peut s'établir algébriquement ou par étude de fonction (avec possibilité de tableaux de variations en chaîne), par utilisation de la formule des accroissements finis ou de celle de Taylor (ordres plus élevés), par le théorème de comparaison globale des fonctions. S'agissant d'une suite $u_n = f(n)$ avec f monotone, par comparaison avec une intégrale. Une inégalité peut aussi s'interpréter comme propriété de convexité,... etc.

Par exemple, dans le polycopié d'exercices de l'université de Nantes, ce sont les pratiques de type purement *algorithmique* qui sont privilégiées, et à un niveau très local, le théorème du point fixe (outillé par l'inégalité des accroissements finis), la méthode de recherche et de calcul approché des racines réelles d'une fonction par dichotomie (via l'étude des variations de cette fonction) occupent une place importante. Une certaine *continuité* avec les pratiques du secondaire semble être ici recherchée. Les fiches de l'université de Lille donnent au contraire une place importante (que l'on ne retrouve pas dans les autres environnements) aux aspects « conceptuels » les plus délicats de la transition, et au travail formel (raisonnements à ε près).

Cependant, on peut aussi isoler des constantes d'un environnement à l'autre, autrement dit il y a des pratiques institutionnelles centrales identifiables[5], en début de DEUG A. Par exemple, le travail algorithmique fondé sur des *méthodes générales* ou des notions spécifiques du programme de la première année du DEUG A (calcul de primitives, de développements limités, étude de nouvelles fonctions...) remplit un espace respectable au sein des feuilles d'exercices quelle que soit l'université considérée. De la même façon, des pratiques telles que *« Appliquer le théorème de Rolle »* (respectivement la formule des accroissements finis ou celle de Taylor-Lagrange) *« ... à telle fonction entre tels points »* (précision éventuelle) s'avèrent très emblématiques des environnements d'exercices en première de DEUG A, dont elles constituent des jalons. Cela ne va d'ailleurs pas sans induire parfois des *effets de contrat* nuisibles au développement d'une certaine flexibilité cognitive, certaines tâches pouvant se réaliser par d'autres moyens, ce que ne soulignent guère, dans l'ensemble, les questionnements proposés[6].

Les fiches de l'université de Lille, qui tentent de prendre en charge les enjeux les plus exigeants et délicats que l'on puisse envisager dans la transition entre le lycée et l'université (sans toutefois négliger les autres) constituent une banque de donnée témoin indiquant ce que l'on peut *potentiellement* rencontrer en première année de DEUG A. Elles permettent ainsi de mettre en évidence l'usage relativement *pauvre* qui est fait du cadre graphique, et la rareté, dans plusieurs des environnements analysés, des *changements de cadres* fructueux entre l'algébrique et le graphique. Elles mettent aussi en exergue une certaine *carence* au niveau du questionnement critique et de la problématisation des situations d'exercices, même si le dispositif de Lille utilise, il est vrai, des moyens plus variés et élaborés qu'une classique feuille d'exercices de travaux dirigés.

Les fiches de l'université de Lille, en dévoilant la diversité des pratiques envisageables de début de DEUG A, nous suggèrent aussi que l'apprentissage de ces pratiques variées requièrent des solutions techniques *adaptées en conséquence*, donc également très diversifiées. Des pistes sont proposées : approche graphique et qualitative pour l'étude d'équations différentielles, avec conception de travaux pratiques sur ordinateur, fiches thématiques prenant d'abord en charge de façon *séparée* les divers aspects du travail formel pour un apprentissage progressif de ce travail, résumés de cours assez exhaustifs exposant les principales méthodes algorithmiques,... etc. Le *foisonnement* constaté des pratiques montre

[5] Confirmées au sein de divers sujets d'examen parcourus, même si nous n'en avons pas fait ici une analyse détaillée. Une certaine spécificité s'exprime cependant aussi, dans chaque université, du point de vue du contenu de ces sujets d'examen, qui restent à l'image des pratiques réelles traduites par les feuilles d'exercices.
[6] Sans compter le caractère très formel et artificiel que revêt parfois ce type de procédure.

donc la nécessité d'un travail à plusieurs niveaux que les fiches de Lille tendent à organiser. Mais, en tenant compte d'un maximum de dimensions très *qualitatives* de la transition (le « *noyau dur* » de la transition), ces fiches nous montrent aussi que le nombre et la complexité des pratiques peuvent évoluer (au moins en théorie) dans des proportions exorbitantes, une prise en charge *locale* des sauts conceptuels et techniques s'avérant alors, au niveau du questionnement, bien délicate. Cependant, dans la pratique, cette *« explosion des possibles »*, bien que déjà observable, reste encore en partie larvée dans les feuilles d'exercices issues des autres universités, qui ne mettent souvent en valeur que *certains* aspects de la transition.

Les fiches de travaux dirigés observées mettent dans l'ensemble assez largement en évidence, au moyen de questions et d'exercices *répétitifs*, le travail de « routinisation » nécessaire à l'acquisition des techniques algorithmiques de base, principalement celles relevant de *méthodes générales*. Par contre, on ne retrouve plus, dans l'ensemble, cette gestion pas à pas (observée dans les manuels de lycée) des difficultés techniques, à présent aussi plus nombreuses, au moyen de canevas d'exercices sollicitant très *progressivement* une autonomie plus importante. Une attention particulière à cet aspect de l'apprentissage est cependant présente au sein des feuilles d'exercices de l'université de Jussieu-Paris 7, qui font donc exception à la règle.

Concernant les tâches relevant d'un apprentissage « plus conceptuel », cette dimension d'entraînement systématique reste peu observable dans les fiches étudiées. Les aides à la résolution locales sont assez frustes, et laissent souvent dans l'ombre bien des aspects délicats de la transition. Signalons toutefois un effort plus important dans ce domaine au sein des fiches de l'université de Marne la Vallée. Une certaine difficulté à *guider* le travail des étudiants de façon satisfaisante sans réduire l'intérêt de l'exercice s'exprime notamment en ce qui concerne les exercices portant sur des problématiques et des objets généraux. Les interprétations graphiques, d'une nature très différente de celles qui interviennent dans un environnement d'exercices de lycée[7], sont sollicitées sans indications particulières, comme des tâches allant de soi.

La présence d'aides à la résolution très précises et directives apparaît en partie comme *antinomique*, *contradictoire*, avec la demande institutionnelle nouvelle qui est faite aux étudiants, d'une réflexion personnelle et d'une prise d'initiative individuelle plus importantes. Par exemple, les *découpages* des questions à l'aide de sous-questions intermédiaires jouant un rôle de relais, comme on en trouve dans les manuels de lycée, et davantage encore dans les sujets de Baccalauréat, ne semble plus guère avoir sa place dans une culture universitaire s'orientant davantage vers un questionnement et une utilisation réfléchie des connaissances et ne relevant plus exclusivement d'applications simples et immédiates de théorèmes et de techniques élémentaires. Des scénarios d'aide à la résolution tenant compte de ces exigences nouvelles restent cependant à concevoir dans les débuts de l'enseignement universitaire en DEUG A, notamment en vue d'améliorer l'efficacité du travail quotidien en séances de travaux dirigés.

[7] Voir ce qui a été dit un peu plus haut.

VI/ ORGANIGRAMMES COMMENTES DE L'ENVIRONNEMENT DE LA DERIVEE, AU LYCEE ET EN PREMIERE ANNEE DE DEUG A.

Les deux organigrammes présentés ci-après permettent de résumer sommairement les principales relations qui se tissent entre les différentes notions, théorèmes, techniques et tâches, dans l'environnement de la dérivée, au lycée (classes de premières et terminales scientifiques) et à l'université (première année de DEUG A).

L'organigramme relatif au lycée est assez simple, avec un *« noyau conceptuel »* que nous avons subdivisé en deux parties : les notions de dérivabilité et de nombre dérivé en un point[1], avec leurs définitions usuelles, par limite du taux d'accroissement et par approximation affine, constituent la première partie, et la notion de fonction dérivée (avec les diverses formules de dérivation), la seconde partie.

La première partie de ce « noyau conceptuel » (page de gauche) renvoie *plutôt*[2] aux aspects « locaux » (étude de la dérivabilité en un point, équations de tangentes,... etc.), et la seconde partie (page de droite), *plutôt*[3] aux aspects « globaux » de la notion de dérivée et de ses applications (étude des variations, inégalités des accroissements finis,... etc.). Conformément à ce que nous avons observé sur un plan quantitatif au sein des manuels de lycée, il y a un fort déséquilibre entre ces deux aspects, au profit du « global » sur le « local », ce qu'illustre bien l'idée émise dans cette thèse, selon laquelle les différentes définitions de la dérivabilité en un point ont plus un statut *culturel* qu'opérationnel au lycée (contrairement à la notion de fonction dérivée). On peut constater que si la notion de fonction dérivée et les formules de dérivation sont à la source des principaux thèmes développés au lycée (variations, primitives et intégrales, équations différentielles,... etc.), c'est l'étude des variations elle-même et la construction d'un tableau de variations qui représentent, elles, le *centre de gravité* effectif des activités sollicitées. Le « fléchage » partant de ces deux rubriques desquelles beaucoup d'autres découlent, est en effet le plus fourni.

L'organigramme relatif à la première année de DEUG A est très sensiblement plus complexe, avec un *foisonnement* des rubriques (très variées) et surtout du fléchage, qui exprime une multiplicité de relations, de connections diverses. En outre, il faut tenir compte du fait qu'un certain nombre de rubriques de l'organigramme relatif au lycée (ayant trait en particulier à l'étude globale de fonctions) ont été ici *résumées*, de façon à « faire tenir » l'environnement observé sur une seule double page. Cela signifie que le décalage réel entre les deux niveaux d'apprentissage, du point de vue de la complexité du contenu et des relations qui se tissent, est plus important encore que celui que l'on peut constater ici.

---

[1] Nous avons vu que ces deux notions sont présentées *conjointement* au lycée, l'objectif principal étant d'ordre opérationnel (calculer en certains points les nombres dérivés de fonctions *particulières*, s'ils existent), et non pas « purement » théorique (étudier « en général » le caractère dérivable, ou non, d'une fonction en un point).

[2] Cette légère restriction vient du fait que la définition par approximation affine n'est mise en valeur dans sa dimension *locale* qu'en théorie. Comme il a été vu, les applications, en première S (situées ici dans la partie *gauche* du tableau), mettent souvent en jeu un travail technique au niveau *global*, pour des fonctions particulières très simples (exemple : contrôle de l'erreur par majoration algébrique du reste sur un intervalle donné).

[3] L'étude des extrema locaux constitue une exception.

Le « noyau conceptuel », constitué de trois parties, est beaucoup plus riche que celui de l'organigramme du lycée. La première de ces parties (subdivisée en deux sous-parties) reprend le noyau conceptuel « de base » qui a été défini dans le premier organigramme, avec les deux définitions de la dérivabilité et du nombre dérivé en un point (ici enrichies du point de vue graphique de la tangente), et la notion de fonction dérivée, les formules générales de dérivation (avec ici, en outre, la formule de dérivation de l'application réciproque). Cette première partie intègre aussi les dérivées successives (encore d'une utilisation très marginale au niveau du lycée) et la formule de Leibniz. La deuxième partie du noyau conceptuel de cet organigramme concerne le théorème de Rolle, la formule et les inégalités des accroissements finis, et la troisième partie, les trois formules de Taylor usuelles en DEUG A (deux de nature globale, une de nature locale).

Naturellement, dans l'optique d'une Analyse démontrée, un nouveau type de relation, du type *« outille la preuve de… »*, apparaît, et contribue largement à enrichir le réseau de connections entre les différentes rubriques, et notamment entre celles du noyau de l'organigramme (présence de divers liens d'implications entre le théorème de Rolle, la formule des accroissements finis, celle de Taylor-Lagrange,… etc., niveaux de généralité différents).

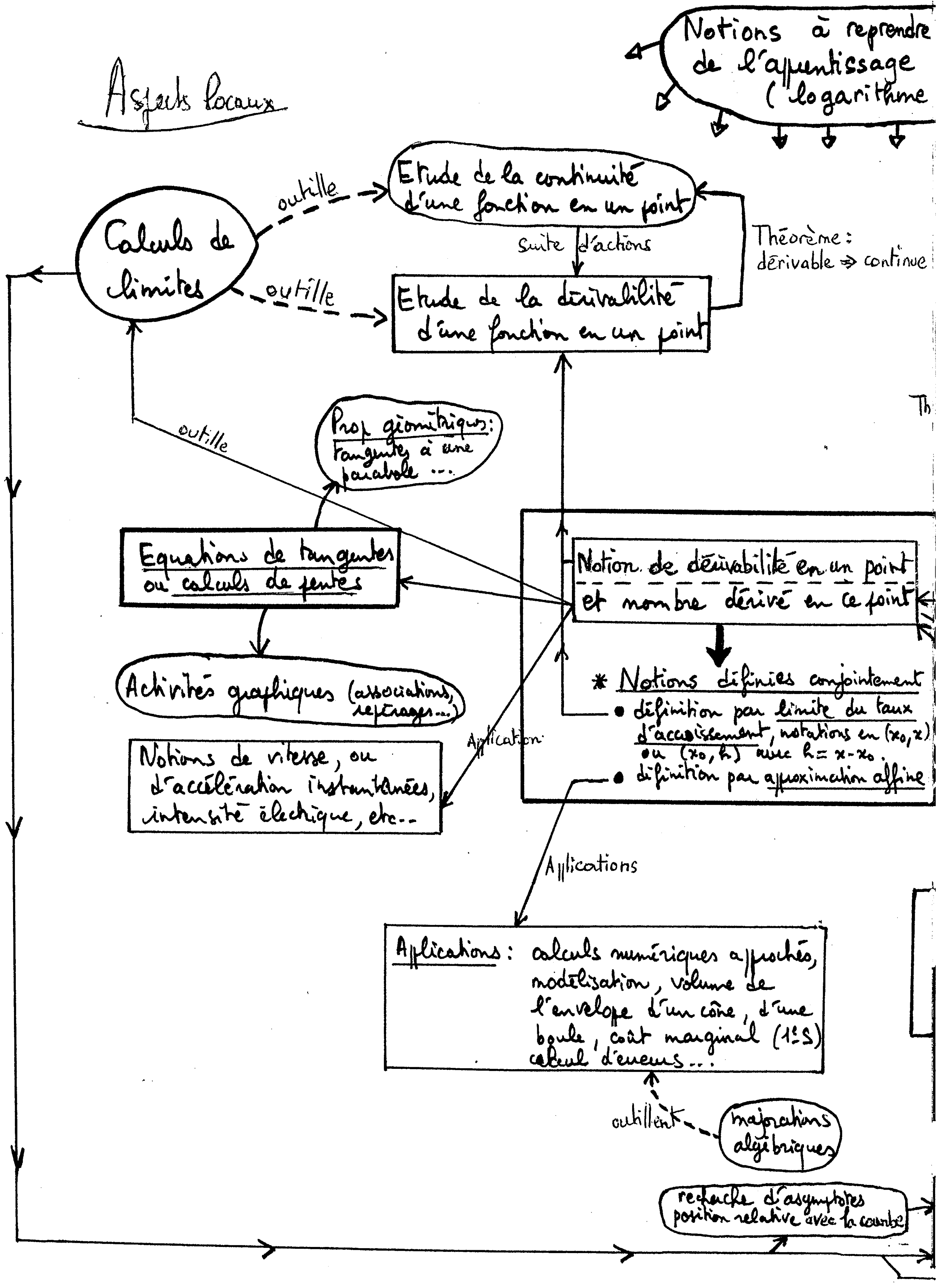
Notons par ailleurs que la transition du « global » vers le « local », naturelle[4], se concrétise dans cet environnement, et au niveau du noyau de l'organigramme, par le fléchage de la formule de Taylor-Lagrange vers la formule de Taylor-Young, la première impliquant la seconde. Cependant, ce type de transition apparaît à d'autres niveaux, par exemple dans le fait que le théorème des accroissements finis peut servir à outiller le calcul de limites dans des exercices théoriques (d'où un fléchage entre ces deux rubriques). Pour des raisons de commodité de lecture, nous avons donc fait cette fois le choix de situer les aspects globaux *plutôt*[5] sur la page de gauche de l'organigramme, et les aspects locaux, *plutôt* sur la page de droite. Il convient de signaler qu'un léger rééquilibrage semble s'opérer entre la part du « local » et celle du « global », cette dernière restant cependant majoritaire.

[4] Les passages inverses, du « local » au « global », requérant une démarche de raisonnement et des moyens techniques particuliers, il n'était pas envisageable de les faire figurer ici.

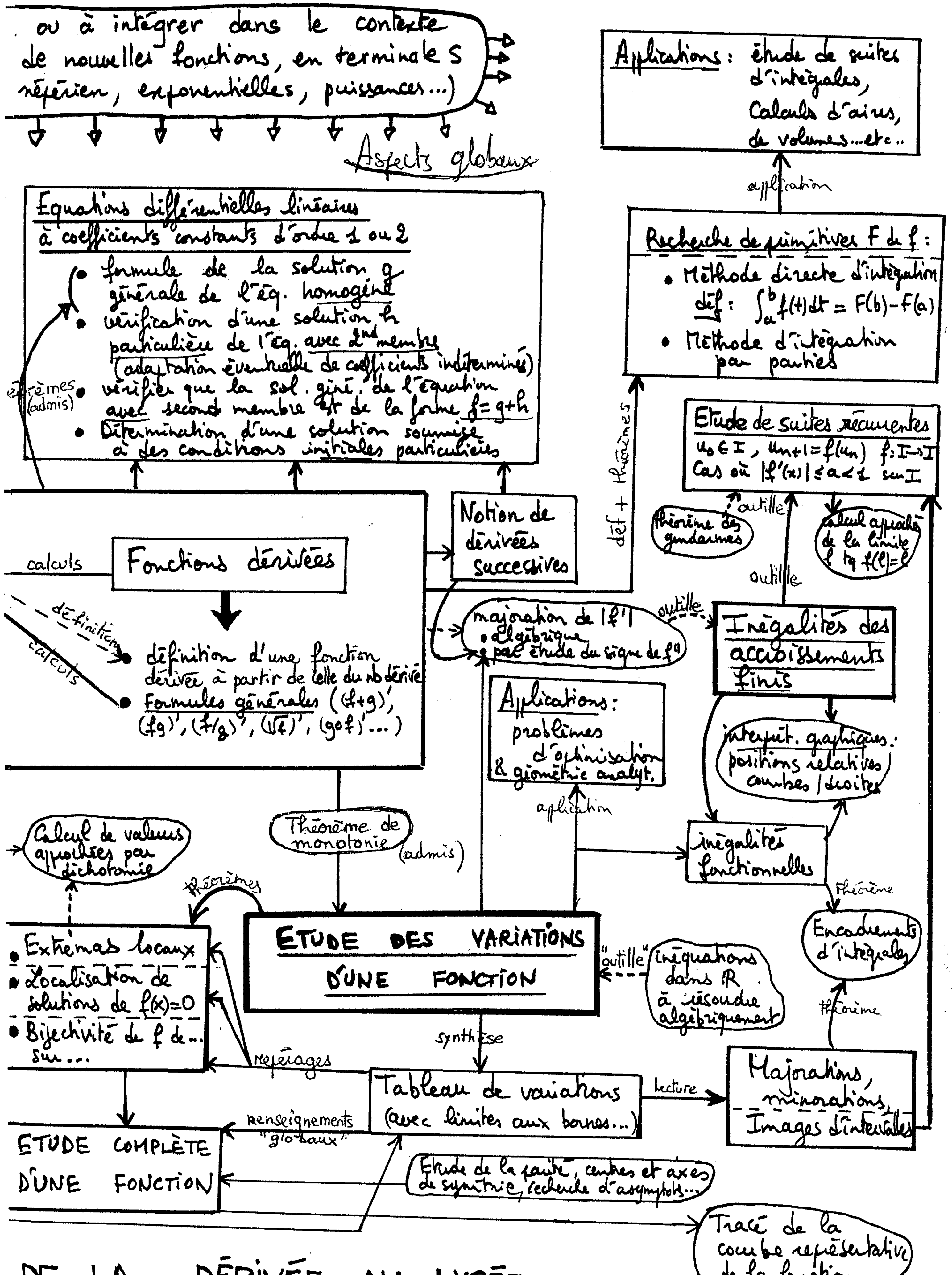
[5] La nécessité, du fait de la richesse de l'environnement étudié, de disposer de la totalité de l'espace laissé par la double page que nous consacrons à cet organigramme, et la densité du réseau de connections, nous ont cependant empêché de dissocier davantage, d'une page à l'autre, les aspects globaux et les aspects locaux.

ORGANIGRAMMES :

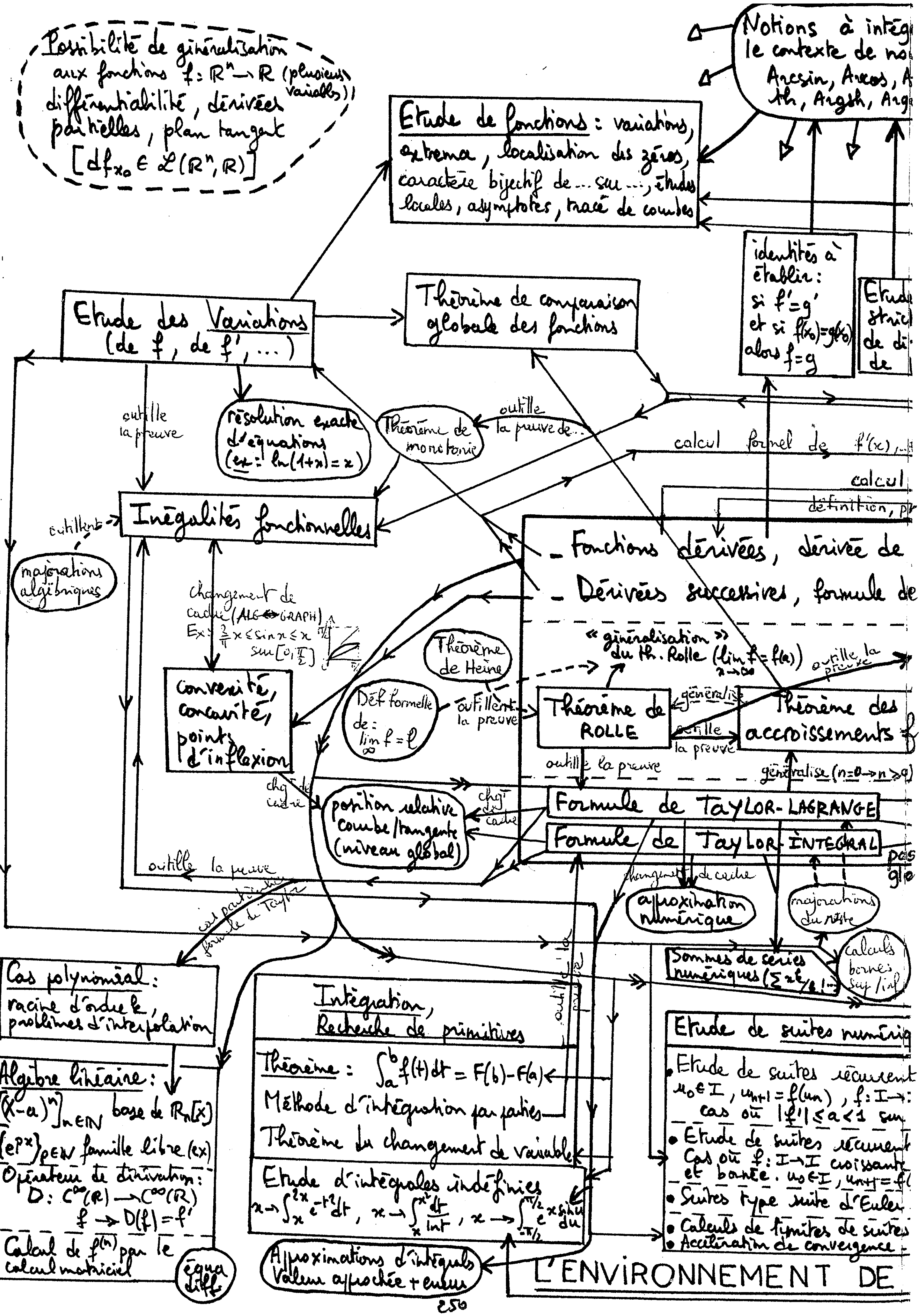
Aspects locaux

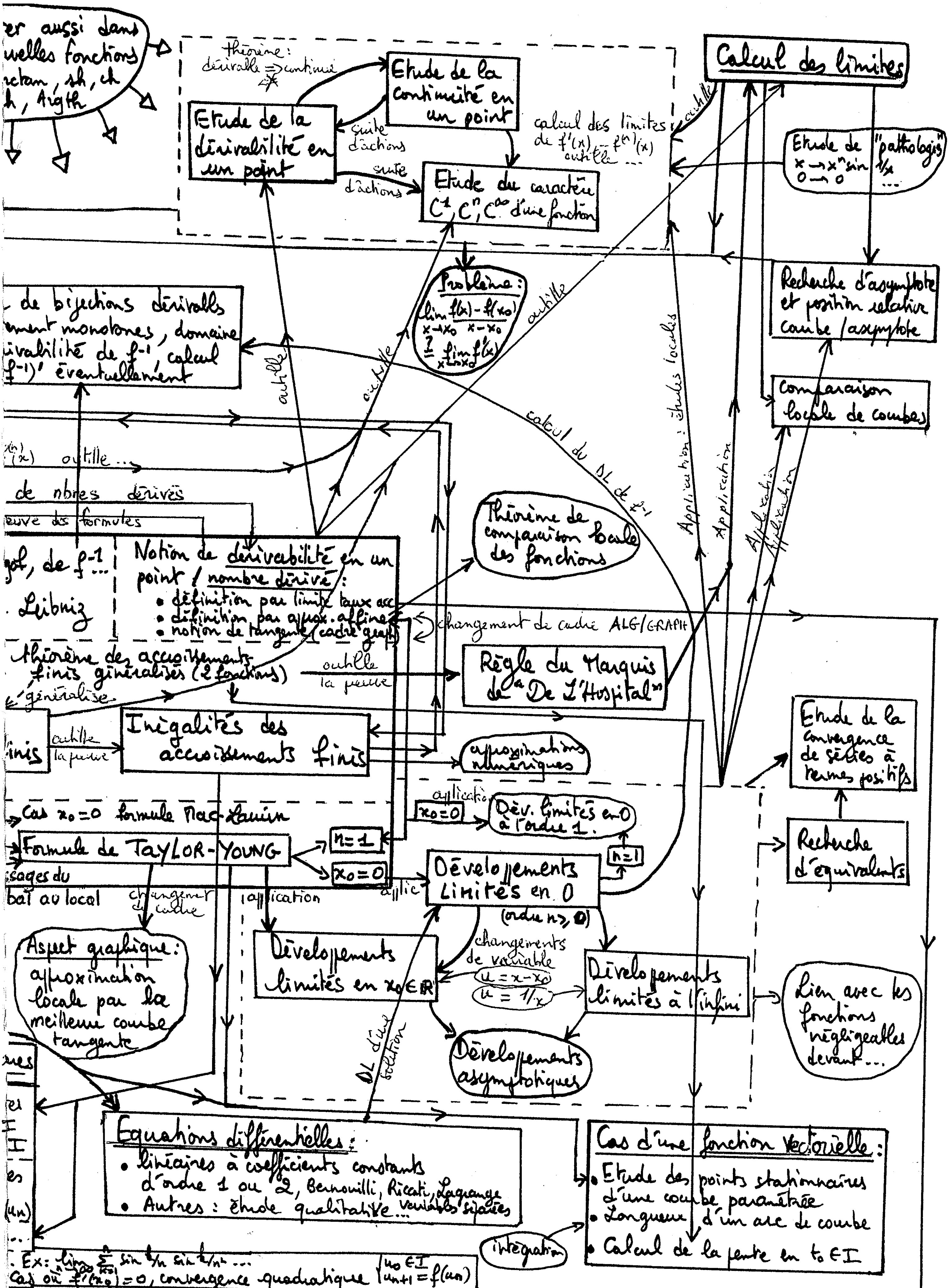


L'ENVIRONNEMENT



DE LA DÉRIVÉE AU LYCÉE


Possibilité de généralisation aux fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (plusieurs variables)) différentiabilité, dérivées partielles, plan tangent $[df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]$
Notions à intég… le contexte de no… Arcsin, Arccos, A… th, Argsh, Arg…
Etude de fonctions : variations, extrema, localisation des zéros, caractère bijectif de … sur …, études locales, asymptotes, tracé de courbes
identités à établir : si $f' = g'$ et si $f(x_0) = g(x_0)$ alors $f = g$
Etud… stric… de di… de
Etude des Variations (de f, de f', …)
Théorème de comparaison globale des fonctions
outille la preuve
résolution exacte d'équations (ex : $\ln(1+x) = x$)
Théorème de monotonie
outille la preuve de…
calcul formel de $f'(x)$, …
calcul
définition, p…
outillent
Inégalités fonctionnelles
majorations algébriques
Changement de cadre (ALG ⟷ GRAPH)
Ex : $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
Fonctions dérivées, dérivée de …
Dérivées successives, formule de …
« généralisation » du th. Rolle ($\lim_{x \to \infty} f = f(a)$)
Théorème de Heine
outille la preuve
convexité, concavité, points d'inflexion
Déf formelle de : $\lim_{\infty} f = \ell$
outillent la preuve
Théorème de ROLLE
généralise
outille la preuve
Théorème des accroissements f…
outille la preuve
généralise ($n = 0 \to n \geq 0$)
chgt de cadre
position relative courbe/tangente (niveau global)
chgt de cadre
Formule de TAYLOR-LAGRANGE
Formule de TAYLOR-INTEGRAL
pas… glo…
outille la preuve
changement de cadre
approximation numérique
majorations du reste
cas particulier formule de Taylor
outille la preuve
Sommes de séries numériques ($\sum x^k/k!$ …)
calculs bornes sup/inf
Cas polynomial : racine d'ordre k, problèmes d'interpolation
Intégration, Recherche de primitives
Théorème : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$
Méthode d'intégration par parties
Théorème du changement de variable
Etude d'intégrales indéfinies
$x \to \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$, $x \to \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, $x \to \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{x \sin u}\,du$
Etude de suites numériq…
Etude de suites récurrent… $u_0 \in I$, $u_{n+1} = f(u_n)$, $f : I \to$ … cas où $|f'| \leq a < 1$ sur…
Etude de suites récurren… Cas où $f : I \to I$ croissante et bornée. $u_0 \in I$, $u_{n+1} = f($…
Suites type suite d'Euler
Calculs de limites de suites
Accélération de convergence
Algèbre linéaire : $[(X-a)^n]_{n \in \mathbb{N}}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$
$\{e^{px}\}_{p \in \mathbb{N}}$ famille libre (ex)
Opérateur de dérivation : $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $f \to D(f) = f'$
Calcul de $f^{(n)}$ par le calcul matriciel
équa diff
Approximations d'intégrales Valeur approchée + erreur
L'ENVIRONNEMENT DE



LA DERIVÉE À L'UNIVERSITÉ (DEUG A-1ère année)

CHAPITRE VI : ETUDE DES RAPPORTS PERSONNELS A LA DERIVEE DES ELEVES ISSUS DE TERMINALES S. TESTS D'ENTREE A L'UNIVERSITE DE MARNE-LA-VALLEE.

I/ INTRODUCTION. CONDITIONS EXPERIMENTALES.

Nous nous proposons maintenant, de mettre à l'épreuve différentes hypothèses effectuées sur la transition secondaire/supérieur en Analyse au sein de la partie théorique initiale de cette thèse, à travers l'étude des réponses fournies par des étudiants entrant en DEUG A première année à l'université de Marne la Vallée à des tests portant plus particulièrement sur la notion de dérivée.

Deux tests différents ont été réalisés, correspondant à deux promotions différentes de néo étudiants, l'un ayant eu lieu lors de la rentrée de septembre 1995 et l'autre lors de celle de septembre 1996. Le public était essentiellement constitué de bacheliers scientifiques récents, de la session de juin de la même année, les redoublants de première année de DEUG n'étant pas convoqués à ce test. Quelques étudiants ayant déjà réalisé une année d'études au niveau post bac (notamment de « médecine ») et (plus rarement) certains bacheliers issus de sections techniques participaient à ce test, mais leur proportion globale n'excédait pas 5% de l'effectif.

Lors des deux sessions, c'est une centaine d'étudiants qui ont subi le test, une semaine avant le début des cours de DEUG, et ils disposaient à chaque fois de leur calculatrice personnelle pour l'épreuve. Aucun programme de révisions ne leur avait été donné, et ils n'étaient pas prévenus en particulier du fait que le test ne porterait que sur l'Analyse et se centrerait plus spécialement sur la notion de dérivée. Ils ne disposaient d'aucune information précise sur les enjeux exacts de ce test. On trouvera un exemplaire de chacun de ces tests en annexe de cette thèse.

II/ PRESENTATION GENERALE DES TESTS DE SEPTEMBRE 1995 et 1996.

A/ MODE DE PRESENTATION.

Précisons tout d'abord que nous effectuons en premier lieu une analyse du contenu et des résultats relatifs au test de septembre 1996 (paragraphe C/ de ce chapitre), avant de procéder à une étude partielle du test de septembre 1995 (paragraphe D/ de ce chapitre), qui sera ici seulement utilisé pour affiner certains résultats du test de 1996. En effet, avec le recul, certains choix d'exercices et de formulations retenus en 1995 ne se sont pas avérés suffisamment pertinents, et la majeure partie des résultats obtenus ayant pu être récupérés à travers le test de 1996, par ailleurs plus riche d'enseignements, cette façon de procéder nous a semblé judicieuse.

D'autre part, pour chacun des deux tests, nous avons choisi de procéder à une présentation de notre travail « exercice par exercice », c'est à dire que l'analyse à priori relative à un exercice est immédiatement suivie des résultats issus du dépouillement des réponses apportées par les étudiants dans cet exercice. Nous pensons que ce mode de présentation améliore la lisibilité de ce travail en évitant la présentation « en bloc », particulièrement ennuyeuse, de la totalité de l'analyse a priori relative au test.

La présentation d'un exercice donné commence par un paragraphe présentant les objectifs d'évaluation du concepteur (nous-mêmes). Les réponses correctes « standards » sont fournies avec d'autant plus de précision qu'elles demandent un développement particulier, et situées en général au sein de l'analyse a priori en même temps que les réponses attendues de la part des étudiants. Cependant, elles peuvent aussi faire l'objet d'un paragraphe spécial au cas où des possibilités (nettement distinctes) de traitement du problème posé nous apparaissent et demeurent accessibles à l'élève (voir l'exercice 1 du test de septembre 1996). Enfin, les choix (formulation, présentation d'une représentation graphique...) retenus pour chaque exercice sont naturellement discutés (en lien avec les intentions du concepteur) surtout si ils prennent une forme particulière.

Au niveau de l'analyse des résultats, les réponses les plus fréquentes sont présentées en priorité. Une étude croisée des réponses fournies au sein d'une même copie aux divers exercices d'un même test complète cette analyse. Les problèmes de compatibilité entre les réponses fournies au sein d'un même exercice sont étudiés. Des tableaux statistiques récapitulatifs présentent les types de réponses les plus fréquents, des extraits de copies d'élèves illustrent notre propos.

Nous concluons au paragraphe E/ sur l'ensemble des deux tests, ce qu'ils nous apprennent du fonctionnement des étudiants à l'entrée à l'université, des connaissances générales et des types de procédures qu'ils emploient, en lien avec l'environnement de lycée dont ils proviennent.

B/ CONNAISSANCES REQUISES POUR LES DEUX TESTS.

1°) Continuité.

Les exercices proposés dans les deux tests sont en adéquation avec les quelques « matériaux » dont disposent les élèves de terminales scientifiques pour répondre à des questions standards bien ciblées, ayant trait à la continuité de fonctions usuelles particulières.

Bien que n'ayant pas accès au niveau formel du concept de continuité en un point, les étudiants disposent en effet d'un certain corpus de définitions, de théorèmes généraux (admis), de techniques classiques (calculs de limites), et d'une perception graphique de la continuité (courbe « sans sauts »), leur permettant de fonctionner localement pour résoudre ces problèmes élémentaires concernant des fonctions bien spécifiées (dans le programme de terminale S : « le langage de la continuité »). Une cohérence plus globale restant à construire ultérieurement pour traiter, notamment, des problèmes ayant trait à des classes de fonctions et non plus à des fonctions isolées, il est intéressant de voir à travers les exercices des deux tests proposés si l'on peut pointer déjà certains conflits en germes qui risquent de se manifester ultérieurement dans la transition secondaire/supérieur.

Les étudiants sont ici censés connaître comme définitions :

- celle selon laquelle : *« Pour une fonction f, définie sur un intervalle I contenant le réel a, on dira que f est continue en a si f admet une limite finie en a »*, équivalente au fait d'avoir : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, puisque si f, définie au point a, admet pour limite λ en a, cela signifie en particulier que f(a) = λ selon la définition en vigueur au lycée (celle par les voisinages pointés n'étant plus au programme),
- la définition d'une fonction continue sur un intervalle I (« continue en tout point de I »),
- la définition du prolongement par continuité d'une fonction en un point.

Les principaux théorèmes auxquels les étudiants peuvent avoir recours sont :

- le théorème (admis) affirmant que : *« Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur I »*, qui nous livre tout un « stock » de fonctions continues (voir le manuel de terminale S de la collection « Terracher », p.67),
- tout théorème s'en déduisant, concernant notamment les fonctions usuelles qui ont le bonheur d'être dérivables (ainsi, par exemple, « *Les fonctions polynômes sont continues en tout point.* »), ou concernant les opérations sur les fonctions usuelles (« *toute somme, tout produit... etc. de fonctions usuelles dérivables, donc continues, est une fonction dérivable donc continue* »).

Voilà ce qui, principalement, « outille » de façon efficace (pour l'étude d'un large panel de fonctions) le travail des élèves issus de terminales scientifiques autour des problèmes de continuité, tout en contournant soigneusement les difficultés du concept, et suffit théoriquement à l'accomplissement des questions relatives à ce sujet jalonnant les deux tests.

2°) Dérivabilité.

Les connaissances générales et les savoir-faire susceptibles d'être mobilisés, investis par les étudiants dans les exercices proposés concernent :

- la définition du nombre dérivé en un point sous la forme « limite du taux d'accroissement », éventuellement en distinguant limites à gauche et à droite,
- les résultats généraux relatifs aux opérations sur les fonctions dérivables et aux dérivées de fonctions usuelles (formules de dérivation).
- le théorème de monotonie liant signe de la dérivée sur un intervalle et sens de variation de la fonction sur cet intervalle (tableaux de variations).
- le théorème assurant l'existence d'un extremum là où la dérivée s'annule et change de signe (à lire sur le tableau de variations).

Les résultats généraux, fortement algorithmiques, relatifs aux opérations sur les fonctions dérivables, s'ils doivent être employés ici et là pour répondre à diverses questions, pourraient selon nous de prendre une place assez considérable au sein des réponses des étudiants, étant donné l'importance qu'ils ont pu revêtir en classes de terminale (en particulier pour l'étude de fonctions usuelles). On s'attend ainsi à voir des calculs de limites de fonctions dérivées en lieu et place de ceux des limites de taux d'accroissement correspondant qui sont théoriquement sollicités, sans précautions particulières.

Par ailleurs, l'appréciation visuelle (graphique) du caractère « dérivable » d'une fonction en un point, à travers la perception de la présence de tangentes, verticales ou non, ou de demi tangentes à gauche et à droite, peut être utilisée ici et là par les étudiants afin de confirmer ou de découvrir certains résultats. Cependant, en l'absence de toute consigne du texte allant dans ce sens, il est assez douteux qu'une grande majorité d'étudiants ait spontanément recours à ce type de considération (hypothèse sur le degré d'autonomie au sortir des classes de lycée). En revanche, certains exercices sollicitant explicitement la lecture de nombres dérivés à partir d'une représentation graphique qui est fournie permettront d'évaluer les capacités des étudiants dans ce domaine.

C/ PRESENTATION DU TEST DE SEPTEMBRE 1995.

Le premier des cinq exercices du test de 1995 ne porte pas du tout sur la notion de dérivée. Son analyse et les résultats qui lui sont relatifs ne seront donc pas présentés dans le cadre de cette thèse.

Le deuxième exercice consiste pour l'étudiant à présenter divers exemples de fonctions non dérivables en un point. Ce que nous pensons notamment mettre en exergue ici c'est le peu de variété des exemples et des situations de référence qui sont à la disposition de l'étudiant en début de DEUG 1ère année.

Le troisième exercice, portant notamment sur la définition de la dérivabilité par approximation affine, assez peu pertinent dans sa formulation, sera également laissé de côté dans cette thèse.

Le quatrième exercice porte sur l'étude de la continuité et de la dérivabilité au point d'abscisse 1 d'une fonction définie par deux expressions paramétrées distinctes à gauche et à droite de ce point. Il s'agit d'un exercice assez classique et scolaire, marqué par une attente institutionnelle forte au niveau du DEUG (investissement de la définition du nombre dérivé par limite du taux d'accroissement à gauche et à droite en 1). La présence des paramètres en fait un exercice délicat pour un élève de terminale scientifique. Ce même exercice est posé également dans le test de septembre 1996, sous une forme différente, et, en un sens qui sera précisé ultérieurement, plus pertinente. Nous effectuerons d'abord une analyse détaillée de l'exercice tel qu'il a été présenté sous cette seconde forme en 1996, avec les résultats correspondant issus du dépouillement des réponses fournies par les étudiants. Pour comparaison, nous nous livrerons ensuite à une rapide analyse des résultats obtenus avec la forme de questionnement donnée dans ce test de 1995.

Le cinquième et dernier exercice propose une activité graphique (production d'une courbe) et deux variantes sont présentées. La première consiste à extrapoler la courbe représentative de la dérivée f 'd'une fonction f à partir de celle de f et la seconde, à extrapoler au contraire la courbe représentative d'une fonction f à partir de celle de sa dérivée f '(et d'une donnée supplémentaire : $f(0) = 1$). L'une ou l'autre des deux variantes est imposée aléatoirement à chacun des étudiants participant au test, de telle sorte que, globalement, une moitié des étudiants présents a travaillé sur une variante et l'autre moitié de l'effectif sur la seconde variante. Les résultats relatifs à chacune de ces variantes de cet exercice seront présentés en détail après l'analyse a priori de ces deux variantes.

D/ PRESENTATION DU TEST DE SEPTEMBRE 1996.

Ce test se compose de trois exercices, le premier d'entre eux constituant la reprise annoncée de l'exercice 4 du test de septembre 1995, sous une formulation légèrement différente.

Le deuxième exercice du test de septembre 1996 fait travailler les étudiants sur une nouvelle notion, celle de *nombre dérivé symétrique* en un point, et les liens, similitudes et différences qu'elle entretient avec la notion de nombre dérivé au sens classique. Il démarre sur l'étude des régularités (continuité, dérivabilité) d'une fonction particulière, de période 1, dont l'expression analytique sur une certaine période est donnée ($f(x) = x(1-x)$ sur $[0,1[$). Paire, cette fonction admet en 0 (et par suite en tout point) une dérivée symétrique, alors qu'elle n'est pas dérivable sur R au sens classique. Bien qu'assez simple, elle ne rentre pas dans le champ usuel de fonctions sur lequel on est amené à travailler au lycée, et pour faciliter le travail qui sera ici demandé à l'étudiant, nous en fournissons une représentation graphique[1].

Ce qui est visé à terme, dans cet exercice, c'est l'accès, à partir de cette étude de cas, à une petite généralisation de propriétés rencontrées pour la fonction f. Cette généralisation porte sur le fait que toute fonction paire possède une dérivée symétrique en 0 sans être nécessairement dérivable en 0, et que l'existence d'une dérivée au sens « classique » en un point induit celle d'une dérivée symétrique en ce point, sans qu'il y ait de réciproque.

Enfin, l'exercice 3 de ce test fait travailler les étudiants à partir de la représentation graphique[2], présentée dans l'énoncé, d'une certaine fonction dont l'expression analytique n'est, dans un premier temps, pas fournie. Il s'agit pour eux de « lire » les propriétés de régularité de cette fonction (continuité, dérivabilité) sur un intervalle fermé borné, et de mentionner les extrema rencontrés (avec les pentes respectives). On donne ensuite l'expression analytique de cette fonction (dont le graphe était en fait le demi cercle supérieur de centre I(2,0) et de rayon 1 dans le plan rapporté à un repère orthonormé), et l'étudiant doit confronter le fruit de son interprétation graphique avec les résultats « rigoureux » issus du calcul et des théorèmes généraux applicables à cette fonction usuelle.

C'est donc un travail mettant en relief la fonction de contrôle, de vérification de l'adéquation entre différents résultats, qui est ici sollicité de la part de l'étudiant, en même temps qu'une attitude critique vis à vis du graphe présenté par la calculatrice, qui, pour des raisons liées à la discrétisation du tracé, n'est pas conforme à ce que l'étudiant doit en attendre compte tenu de l'expression analytique de cette fonction.

[1] Fournie par l'écran de la calculatrice TI 92.
[2] Idem.

III/ LE TEST DE SEPTEMBRE 1996.

A/ PRESENTATION DE L'EXERCICE 1.

1°) Objectif visé. Intentions du concepteur.

Le but de cet exercice est de repérer, d'étiqueter, chez les étudiants, les comportements, les idées qui sont les leurs devant une situation assez classique : celle du recollement de deux expressions pour une même fonction, mettant en jeu le concept en formation de continuité en un point et ses liens avec la notion, a priori mieux assise, de dérivabilité en un point. Il nous faudra le cas échéant juger des problèmes de cohérence qui peuvent être mis en relief à travers les réponses des étudiants, et de la façon dont ces derniers gèrent (ou non) les éventuels conflits pouvant apparaître. En particulier, on veut voir si le travail purement algébrique qui est a priori sollicité chez l'étudiant va rester en conformité avec des résultats généraux du cours tels que, par exemple, le fait que la dérivabilité en un point d'une fonction implique sa continuité en ce point. Il s'agit plus généralement d'analyser les relations qu'entretiennent ces énoncés avec le travail technique de l'élève. Ce faisant, on veut déterminer si, et comment, le manque de structuration, un certain « éparpillement » des connaissances de terminale, dont on a fait l'hypothèse dans l'analyse théorique de cette thèse, est ici à l'œuvre.

2°) Différentes possibilités de traitement du problème posé.

Ayant perçu le fait que la fonction f est clairement dérivable en tout point $x_0 \neq 1$, comme fonction numérique usuelle (polynôme ou fraction rationnelle) sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1,+\infty[$, l'exercice consiste à trouver un système de deux équations liant les paramètres a et b, constituant une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait dérivabilité en 1, l'une de ces deux égalités exprimant la continuité en 1. Une fois résolu, ce système aboutit à la donnée d'un seul couple de réels (a,b) réalisant la condition de dérivabilité en 1.

On peut procéder en donnant d'abord la condition : $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$, de continuité en 1, qui aboutit à l'égalité : $a+1 = b$, puis en disant que si cette condition est déjà satisfaite, il y a dérivabilité de f en 1 si $\lim_{x\to 1+} f'(x)$ et $\lim_{x\to 1-} f'(x)$ existent, sont finies et égales, ce qui conduit alors immédiatement à l'égalité : $\lim_{x\to 1-} (2ax-1) = \lim_{x\to 1+} (-b/x^2)$, c'est-à-dire à l'équation : $2a-1 = (-b)$. Le système, après résolution donne : $a = 0$ et $b = 1$.

C'est là, sans aucun doute, la procédure canonique la plus simple, celle qui nécessite le moins de calculs, puisque la dérivation des expressions concernées est immédiate. Mais, force est de reconnaître que si elle sera peut-être largement utilisée par les étudiants (compte tenu de cette simplicité soulignée), ce sera nécessairement sans la justification théorique idoine, qui permet ici d'assimiler limite de la dérivée et nombre dérivé grâce au théorème des accroissements finis, dès lors que la continuité en 1 est assurée. En effet, d'une part ce théorème n'est pas connu des étudiants au sortir du lycée, et d'autre part, il n'y a aucune raison qu'ils éprouvent le besoin de justifier de quelle que façon que ce soit cette assimilation qui paraît naturelle au stade d'apprentissage du concept de dérivée qui est le leur.

Une autre méthode pour résoudre le problème posé consiste à exprimer la condition exacte de dérivabilité en 1 : « $\lim_{x\to 1^-} (f(x)-f(1))/(x-1)$ et $\lim_{x\to 1^+} (f(x)-f(1))/(x-1)$ existent, sont finies et égales », c'est-à-dire à utiliser la définition de la dérivabilité. Cependant, si cette méthode très « académique » reste, cette fois, théoriquement accessible à un élève issu d'une terminale scientifique au niveau des justifications, elle risque de s'avérer pour lui, en contrepartie, plus délicate à gérer sur un plan technique, sans qu'il puisse comprendre l'intérêt de ce surplus de difficulté technique (il y a donc bien des chances qu'il ne choisisse pas cette voie). La première de ces deux limites : $\lim_{x\to 1^-} (ax^2-x+1-a) / (x-1)$ (= $\lim_{x\to 1^-} a(x+1)-1$), vaut $(2a-1)$, après factorisation et simplification de l'expression initiale. Cependant, ce travail peut être ici avantageusement remplacé par le calcul du terme $g'(1)$, où $g(x) = ax^2-x+2$ sur R, puisque l'expression polynomiale de $f(x)$ vaut pour tout $x \leq 1$ (encore faut il s'en apercevoir !).

La seconde limite vaut : $\lim_{x\to 1^+} ((b/x)-a-1) / (x-1)$, et n'est donc pas finie en général. A partir de là, deux possibilités s'offrent à celui qui a fait le choix de passer par la limite du taux d'accroissement :

- soit il pense à tenir compte d'emblée de la condition de continuité : $a+1 = b$, ce qui lui permet alors d'identifier le taux de f à droite en 1 avec celui de la fonction $x\to b/x$, donc avec le nombre dérivé de $x\to b/x$ en 1, pour aboutir alors à la seconde condition de dérivabilité de f en 1 : $2a-1 = -b$,
- soit il essaye d'exprimer le fait que $\lim_{x\to 1^+} ((b/x)-a-1) / (x-1)$ doit être finie, et retrouve par le calcul, après réduction au même dénominateur de la fraction, l'égalité $a+1 = b$ traduisant à la fois l'existence d'un facteur $(x-1)$ au numérateur de la fraction et la continuité de f en 1 ; puis il termine de même.

Ces procédures sont l'une et l'autre assez délicates, car elles nécessitent une certaine initiative personnelle, et les difficultés techniques inhérentes à la seconde procédure semblent en particulier très importantes. Toute procédure mettant en jeu les limites à gauche et à droite en 1 du taux d'accroissement de f, c'est à dire la définition exacte des nombres dérivés correspondants, nous semble d'ailleurs peu accessible à ces étudiants, susceptible de concourir à bon nombre d'impasses ou d'erreurs de calcul : termes à identifier, factorisations à reconnaître, obligation d'effectuer des calculs algébriques sur des expressions paramétrées et de commencer à discuter des conditions sur les paramètres avant l'achèvement du calcul, ... etc. Notons enfin que la réussite à l'item 1 de cet exercice conditionne naturellement celle des autres items qui doivent s'effectuer sans nouveaux calculs. La réponse est : « *oui, pour* $b = a+1$ *et* $a \neq 0$ » à l'item 2, « *non, car toute fonction dérivable sur R est continue sur R* » à l'item 3, et « *oui, pour* $b \neq a+1$ » à l'item 4.

3°) Analyse a priori.

Nous avons posé le problème de la continuité et de la dérivabilité de la fonction f *sur R*, et non pas seulement au point d'abscisse 1, afin de déceler un éventuel amalgame des étudiants, entre les raisons de la continuité ou de la dérivabilité de f en 1 et celles de la continuité ou de la dérivabilité en tout point x_0 distinct de 1.

On peut s'attendre en effet à ce que certains étudiants affirment que f est continue ou dérivable sur R quelles que soient les valeurs des paramètres a et b, puisque les fonctions usuelles $x\to ax^2-x+2$ et $x\to b/x$ sont respectivement continues et dérivables sur R et R^*, donc en particulier pour $x \leq 1$ et $x > 1$, respectivement. Nous fondons cette hypothèse sur certains travaux bien connus à propos du concept de fonction (ceux d'A.Sfard[1] en particulier), qui montrent la difficulté de certains étudiants à détacher l'objet « fonction » d'une expression algébrique (notamment). Cet amalgame les amènerait ici, non pas à considérer la fonction f comme une entité unique, définie par deux expressions distinctes, selon le domaine où l'on se place, mais à ne voir dans le problème que *deux* fonctions usuelles distinctes, bien séparées, la fonction $f_1 : x \to ax^2-x+2$ et la fonction $f_2 : x \to b/x$. Dans cette analyse a priori nous identifions cet amalgame comme un « niveau 0 » correspondant à la non compréhension du problème posé. Inversement, certains étudiants ne s'intéresseront peut-être qu'à la condition de continuité ou de dérivabilité de la fonction au point d'abscisse 1 (la seule qui débouche sur une activité de calcul consistante). Il sera difficile d'affirmer alors que ces étudiants ne savent pas distinguer le problème qui leur est posé de celui de l'étude de la continuité ou de la dérivabilité au point 1. Ils peuvent très bien avoir perçu l'idée que les théorèmes généraux règlent d'emblée la question en tout point distinct de 1 et oublient de le préciser, jugeant cela de peu importance.

Comme nous l'avons exprimé en partie B/ (présentation des tests), cette situation d'exercice, très classique, est marquée à un niveau de DEUG 1ère année par une forte attente institutionnelle portant sur l'investissement des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point, et du nombre dérivé à gauche et à droite en ce point, donc de la notion de limite. Or cette notion n'est encore qu'en gestation chez les étudiants concernés venant de passer le baccalauréat. Ainsi, si l'on peut penser que bon nombre d'entre eux trouveront, pour le problème posé de la continuité en 1, la réponse correcte, leur argumentation ne fera pas nécessairement intervenir la notion de limite comme on peut s'y attendre. Rappelons ici que le cours de terminale affirme que l'on peut identifier limite et valeur de la fonction en un point réel x_0 lorsque ces deux termes existent et sont finis, et que cela caractérise alors la continuité de f en x_0. Une compréhension un peu approximative de ce principe aboutit au fait que certains étudiants ne discernent guère limite et valeur au point, ce qui peut les amener à poser ici le problème en termes de « raccord » entre les deux expressions usuelles, $f_1(x) = ax^2-x+2$ et $f_2(x) = b/x$, de la façon suivante : *« f est continue en 1 si on a $f_1(1) = f_2(1)$, c'est à dire si $a+1 = b$ ».* Le concept de limite peut donc s'estomper, dans ce type de problèmes ne mettant en jeu, au fond, que des fonctions usuelles, au profit d'une approche plus efficace dans un champ de pratiques niveau terminale.

Du côté des conditions de dérivabilité en 1, nous avons vu plus haut que la seconde méthode (utilisation de la définition du nombre dérivé, donc de la limite du taux d'accroissement) risque sans doute de paraître inutilement compliquée aux étudiants, outre le fait qu'elle présente de fortes difficultés techniques. On s'attend donc à divers types de gestion du problème, faisant plutôt intervenir les dérivées f_1' et f_2'des deux fonctions : $f_1(x) = ax^2-x+2$, et $f_2(x) = b/x$ et mettant en jeu des conditions de raccordement du type « $f_1'(1) = f_2'(1)$ » ou, plus rarement, du type : « $\lim_{x\to 1^-} f_1'(x) = \lim_{x\to 1^+} f_2'(x)$ », éventuellement assorties de la condition supplémentaire « $f_1(1) = f_2(1)$ »[2]. Bon nombre d'étudiants estimeront sans doute qu'une condition du style : « $f_1'(1) = f_2'(1)$ » traduit la dérivabilité de la fonction f en 1, et est donc suffisante à exprimer à la fois la dérivabilité et la continuité de f en 1, car la dérivabilité

---

[1] Ibid.

[2] Auquel cas l'étudiant peut aboutir à la solution correcte.

en un point implique la continuité en ce point. Nous savons que cette condition n'exprime la dérivabilité de f en 1, que via le théorème des accroissements finis qui n'est applicable que si f est *continue en 1*, mais l'étudiant, lui, l'ignore !

Cependant, c'est précisément parce que la dérivabilité nécessite préalablement la continuité que d'autres étudiants se sentiront obligés d'ajouter la condition : « a+1 = b », de continuité en 1, parmi les conditions de dérivabilité en 1, sans pour autant s'avérer capables de dire pourquoi cette condition de continuité n'apparaît pas spontanément dans la condition exprimée de dérivabilité, d'égalité des nombres dérivés $f_1'(1)$ et $f_2'(1)$ ou des deux limites : $\lim_{x\to 1^-} f'(x)$ et $\lim_{x\to 1^+} f'(x)$. Nous revenons dans ce qui suit sur les conflits possibles au moment de traiter les items 2, 3, 4, suite à une réponse erronée à l'item 1, du type : *« f est dérivable en 1 si et seulement si 2a-1 = -b »*.

4°) Justification de la formulation retenue pour le problème posé.

Comme nous l'avons indiqué plus haut (B/ Présentation générale des tests), cet exercice avait déjà été proposé lors du test de septembre 1995, mais sous une forme assez différente. On demandait alors de déterminer, d'une part les valeurs des paramètres a et b pour lesquelles la fonction f est continue en 1, et d'autre part celles pour lesquelles f est dérivable en 1, comme si les deux propriétés n'avaient aucun lien entre elles, rien n'étant fait en effet pour inciter les étudiants à mettre ces propriétés en rapport l'une avec l'autre. Ce travail là était laissé à l'initiative de l'étudiant, de sorte que le conflit latent entre le théorème de cours : « *toute fonction dérivable en un point est continue en ce point* » et les résultats éventuels issus du calcul avait de bonnes chances de ne jamais éclater. De fait, c'est ce qui se produisit, comme nous le verrons en partie D/ (qui traite de l'étude du test 1995), un certain nombre d'étudiants isolant l'un de l'autre les deux problèmes, de la continuité et de la dérivabilité en 1, et donnant une *unique* condition pour chacun d'eux (en général : *« f est continue si b = a+1 »*, et *« f est dérivable si 2a-1 = -b »*).

C'est la raison pour laquelle nous avons fait le choix en 1996 d'une nouvelle formulation, a priori plus pertinente, car nous permettant d'étudier le comportement de l'étudiant dans les circonstances les plus favorables, où on l'incite à envisager les interactions entre « continuité » et « dérivabilité » par l'étude systématique des différentes situations possibles relativement à ces deux notions. Elle permet en particulier d'envisager « noir sur blanc » à travers l'item 3 : *« Existe-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles f est dérivable mais non continue sur R ? »*, une situation en contradiction flagrante avec le théorème de cours précité. Cette formulation nous semble susceptible de faire éclater de nombreux conflits, dont nous voulons voir s'ils seront gérés par l'étudiant, et de quelle manière : Comment, si on donne *« 2a-1 = -b »* comme condition de dérivabilité de f sur a, b pour l'item 1, parce que l'on estime cette condition suffisante à assurer aussi la continuité de f, accepter dans l'item 2 que la fonction f, même uniquement continue, vérifie une condition a+1 = b qui n'est pas apparue dans la condition de dérivabilité ? Et comment expliquer qu'il existe des couples (a,b) de réels vérifiant à la fois : *« 2a-1 = -b »* et *« $b \neq a+1$ »*, alors qu'aucune fonction dérivable n'est discontinue ? D'un point de vue général, l'indépendance des deux conditions algébriques : *« b = a+1 »* et *« 2a-1 = -b »* est source de conflit, puisque « continuité » et « dérivabilité » ne sont pas des notions indépendantes !

A cet égard, l'item 4 (recherche des couples de paramètres tels que f ne soit ni continue, ni dérivable) pose un problème de nature *logique*, la réponse correcte étant : *« $b \neq a+1$ »* et non pas, contrairement aux apparences, *« $b \neq a+1$ »* et *« $2a-1 \neq -b$ »*, puisqu'une fonction non continue en un point est nécessairement non dérivable en ce point (recourir à la proposition contraposée[3]).

Cependant, il est également possible de voir graphiquement, sur un exemple, quelle propriété, *autre que la dérivabilité en 1*, traduit la condition *« $2a-1 = -b$ »*, dans le cas où l'on a pourtant *« $b \neq a+1$ »*, pour bien comprendre en quoi la condition *« $2a-1 \neq -b$ »* ne doit pas figurer pour cet item 4, bien que la condition de non continuité *« $b \neq a+1$ »* ne l'implique pas :

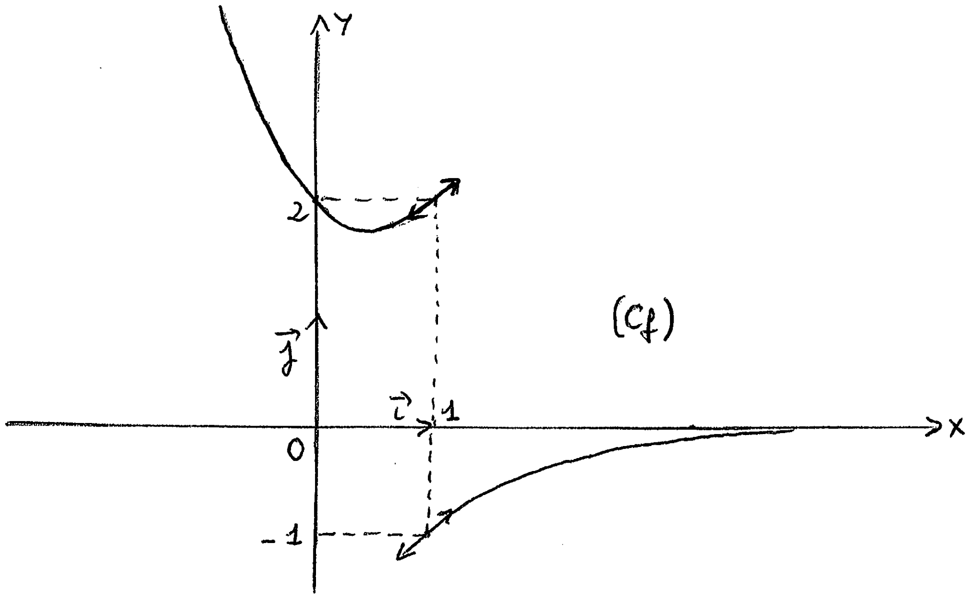


Schéma obtenu pour a = 1 et b = -1, valeurs vérifiant : « 2a-1 = -b » et « b ≠ a+1 ».

Ce petit travail d'investigation par une représentation graphique effectuée dans un cas particulier est à la portée de l'étudiant et peut lui donner l'intuition du processus : *« continuité de f en 1 »* et *« égalité des limites de f ' à gauche et à droite en 1 »* impliquent *« dérivabilité de f en 1 »*, même si la preuve formelle de cet état de fait ne lui est pas encore accessible, compte tenu de ses connaissances actuelles. On s'attend cependant fort peu à voir se développer dans les copies d'étudiants analysées ce type de considération graphique, hors de toute sollicitation de la part de l'énoncé.

5°) Récapitulatif : Quelques types de gestions possibles pour cette question.

Nous posons dans ce qui suit : $Tf(x) = (f(x)-f(1)) / (x-1)$, $f(x) = ax^2-x+2 = f_1(x)$ pour $x \leq 1$, et $f(x) = b/x = f_2(x)$ pour $x>1$. On peut tenter de dresser un tableau récapitulatif des procédures que nous pensons voir utilisées par les étudiants dans cet exercice :

[3] Une difficulté particulière de cet item tient dans le fait qu'il n'y a pas, cette fois, de contradiction évidente entre cette réponse erronée et les réponses fournies aux autres items.

Combinaisons entre les divers points de vue sur ↓	Amalgame entre f et les fonctions usuelles f_1 et f_2 (niveau formel)	Algébrisation complète du problème posé (plus de limites)	Algébrisation partielle-sensibil. au repère (<u>$x \leq 1$</u>) sémiotique	Solutions canoniques (point de vue analyse)
Etude de la continuité :	f_1 et f_2 sont continues sur R et R* donc f est continue sur R	$f_1(1) = f_2(1)$	$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$	$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ $(= f(1))$
Etude de la dérivabilité :	f_1 et f_2 sont dérivables sur R et R* donc f est dérivable sur R	$f_1'(1) = f_2'(1)$	$\lim_{x\to 1^+} f'(x)$ (ou $\lim_{x\to 1^+} Tf(x)$) vaut $f'(1)$ ($f'(1)$ étant *posé* égal à $f_1'(1)$).	limites de f ', ou bien du taux Tf, à gauche et à droite en 1 sont égales.

B/ <u>ANALYSE DES REPONSES FOURNIES A L'EXERCICE 1</u>.

1°) Résultats généraux.

On rencontre ici un taux assez élevé de réponses formelles, de niveau « zéro » identifié plus haut dans l'analyse a priori, traduisant un amalgame entre la fonction f et les fonctions usuelles $f_1 : x \to ax^2-x+2$ et $f_2 : x \to b/x$. Ainsi, 48% d'étudiants considèrent la fonction f comme dérivable sur R car ces deux expressions usuelles, ax^2-x+2 et b/x, sont elles-mêmes formellement dérivables :

Soit f' définie par $\begin{cases} f'(x) = 2ax - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f'(x) = \dfrac{-b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

donc pour tout $x \in]-\infty ; 1]$ f est dérivable

et pour tout $x \in]1 ; +\infty[$ f est dérivable .

<u>Extrait de la copie de Claire M.</u>

Cependant, il n'y a en comparaison que 24% des étudiants (moitié moins) qui affirment que f est continue sur R parce que les fonctions f_1 et f_2 le sont sur R et R* respectivement. Il semble donc que le fait de pouvoir *dériver* les expressions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ influence de façon prépondérante la démarche de l'étudiant au profit de cet argumentation formelle (niveau 0), comme sans doute le fait qu'il est nettement plus aisé de déterminer les limites à gauche et à droite en 1 de f que de son taux d'accroissement.

Certains étudiants tentent cependant d'argumenter leur affirmation, comme par exemple Claire L., qui précise que f est bien dérivable sur R puisque f(x) = b/x seulement pour x >1 et 1>0. A l'inverse, Julien M. estime justement que f n'est dérivable en 0 pour aucune valeur des paramètres a et b du fait de cette expression en b/x qui entre en jeu dans la définition de f. On voit donc que les erreurs liées à l'amalgame entre la fonction f et les fonctions usuelles f_1 et f_2 prennent des formes assez variées.

Les résultats précédents sont en partie responsables de ce que très peu d'étudiants (16% de l'effectif) réussissent à obtenir les conditions correctes de dérivabilité de f en 1, alors qu'une majorité assez nette d'entre eux (62% de l'effectif) obtiennent la condition correcte de continuité de la fonction f en 1. L'autre raison de cela tient dans le fait que presque tous les étudiants ayant choisi de traiter le problème de la dérivabilité de f en 1 par considération de la définition du nombre dérivé par la limite du taux d'accroissement (22% de l'effectif) ont échoué dans leur tentative (erreurs de calcul, abandon...) comme nous l'avions prévu dans notre analyse a priori[4]. Dans le même temps, l'expression de la condition de continuité au point d'abscisse 1, sous une forme ou sous une autre, a systématiquement abouti, en revanche, à l'obtention de l'égalité : « a+1 = b ». Les étudiants ayant réussi l'étude de la dérivabilité en 1 ont le plus souvent procédé par raccordement des expressions $f_1(x) = ax^2-x+2$ et $f_2(x) = b/x$ et de leur dérivées au point 1 :

On pose le système suivant :

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ f_1'(x) = f_2'(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ax^2-x+2 = \dfrac{b}{x} \\ 2ax-1 = -\dfrac{b}{x^2} \end{cases}$$

Par résolution du système par la méthode de substitution, on a : $\begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$

Extrait de la copie de Sébastien D. : une solution acceptable.

[4] Deux étudiants seulement aboutissent à un résultat correct, mais ils n'ont pas réellement travaillé sur l'expression du taux d'accroissement qu'ils avaient introduit. Ils se sont rapidement reconnectés à la valeur en 1 des fonctions dérivées f_1' et f_2'.

Stéphanie P., sensible au fait que $f(x) = ax^2-x+2$ *pour x ≤1*,[5] en déduit que : $f'(x) = 2ax-1$ *pour x ≤1*, puis que : $f'(1) = 2a-1$, avant d'exprimer ce qui est pour elle, ici, la condition de dérivabilité en 1 : $\lim_{x\to 1+} f'(x) = f'(1)$ aboutissant à l'équation : $2a-1 = -b$. Même si elle obtient finalement l'équation sur a et b attendue, son argumentation est cette fois incorrecte, puisqu'elle suppose l'existence de $f'(1)$ pour l'obtention de la condition de dérivabilité de f en 1. En outre, cette condition finale est incomplète puisque Stéphanie P. a oublié d'y joindre la condition « $a+1 = b$ » de continuité de f en 1.

si $x \leq 1$: $f'(x) = 2ax - 1$.

si $x > 1$ $f'(x) = \dfrac{-b}{x^2}$.

$f'(1) = 2a-1$.

$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \dfrac{-b}{x^2} = -b$.

f est derivable sur IR si $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = f'(1)$.

soit $2a - 1 = -b$.

Extrait de la copie de Stéphanie P.

D'autres étudiants oublient eux aussi la condition de continuité de f en 1 dans l'expression qu'ils présentent de la condition de dérivabilité en 1, mais ici, le nombre d'erreurs de ce type est limité, du fait du questionnement qui incite les étudiants à *juxtaposer* les conditions de continuité et de dérivabilité de f en 1 : « *Valeurs de a et b pour lesquelles : (1) f est continue et dérivable sur R ?* ». Ainsi sera-t-il intéressant d'étudier pour comparaison (en partie D) les réponses fournies pour le même exercice dans le test de 1995 (les conditions sollicitées de continuité et de dérivabilité en 1 sont alors dissociées dans le questionnement). Il est probable que dans ces circonstances, l'oubli de la condition de continuité sera plus fréquent, et révélera peut-être de façon plus flagrante des gestions séparées, sans articulations, de l'étude de la continuité d'une part, et de celle de la dérivabilité d'autre part.

Mais revenons à présent sur les erreurs commises par les étudiants qui tentent d'étudier la dérivabilité de f en 1 à l'aide de la définition du nombre dérivé par limite du taux d'accroissement. Matthieu H. confond sans précaution particulière les taux d'accroissement de f en 1, à gauche et à droite, avec les nombres dérivés en 1 des fonctions : $f_1 : x \to ax^2-x+2$ et $f_2 : x \to b/x$, ce qui, bien sûr, lui évite le calcul effectif de taux d'accroissement. Il ne s'est donc pas aperçu du fait que l'on n'a pas a priori $f(1) = b$, mais plutôt $f(1)= a+1$, et que c'est seulement la condition de continuité de f en 1 ($b = a+1$) qui permet en fait de se ramener préalablement à l'égalité des nombres dérivés de f_1 et f_2 en 1.

[5] Repère sémiotique sur lequel se basent certains étudiants pour justifier l'extension à x=1 de la formule de dérivation de f(x) obtenue à partir de l'expression $f(x)=ax^2-x+2$ valable pour $x\leq 1$. Ce cas avait été prévu dans notre analyse a priori (voir tableau récapitulatif).

Ayant donc trouvé immédiatement (mais uniquement) l'équation 2a-1 = –b, il effectue cependant très correctement chacun des items en intégrant la condition de continuité à la condition de dérivabilité pour une raison purement théorique : la dérivabilité implique la continuité. A l'inverse, Smaïl N. qui a effectivement tenté de réaliser les deux calculs de taux d'accroissement, trouve, lui, que la fonction n'est jamais dérivable en 1 car il estime que la limite à droite en 1 du taux d'accroissement de f est toujours infinie (techniquement, il n'a pas repéré que, pour b = a+1, numérateur et dénominateur se simplifient par x-1, permettant ainsi d'obtenir une limite finie).

Notons que 8% des étudiants ne débrouillant pas l'indétermination des taux d'accroissement concluent ici à la nullité des limites de ces taux. C'est beaucoup, même si cette erreur recoupe (en partie) un obstacle de nature épistémologique bien identifié concernant les rapports entre deux infiniment petits (évanouissement de la valeur dans le passage à la limite[6]) :

(1) f est continue sur IR ssi f est continue en 1

ssi $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

ssi $\lim_{x \to 1^-} ax^2 - x + 2 = \lim_{x \to 1^+} \frac{b}{x}$

ssi $a + 1 = b$

f est dérivable sur IR ssi f est dérivable en 1

ssi $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

ssi $\lim_{x \to 1^-} \frac{ax^2 - x - a + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{b}{x} - b}{x - 1}$

ssi $0 = 0$

donc f est dérivable sur IR pour tout a et b

Extrait de la copie de Delphine D.

2°) Problèmes de compatibilité et spécificités des items.

Un certain nombre d'étudiants (24% de l'effectif) ayant donné une condition de continuité de f en 1 correcte : « *b = a+1* », tout en affirmant que f est dérivable sur R pour toutes valeurs de a et b réels, il se pose alors un problème de *compatibilité* entre ces deux affirmations. Comment, en effet, une fonction peut elle être *dérivable* pour toutes les valeurs de a et b, si elle n'est pas *continue* lorsque b ≠ a+1 ? Même si cette contradiction n'apparaissait pas d'emblée aux étudiants, on pouvait penser que la présence de l'item 3 la mettrait un peu plus loin en pleine lumière. Or apparemment il n'en est rien.

---

[6] In « Une histoire des Mathématiques. Routes et dédales », A.Dahan-Dalmedico & J.Peiffer ; Points Sciences, S49, Le Seuil, Paris, 1986.

D'une part, il y a beaucoup d'étudiants (38% de l'effectif) qui se sont contenté de traiter l'item 1, et près de la moitié d'entre eux appartient à la catégorie de ceux qui prétendent que f est dérivable sur R pour tous réels a et b, et continue seulement pour les couples (a,b) vérifiant *« $b = a+1$ »*. D'autre part, ceux qui appartiennent à cette catégorie et qui ont bien effectué tous les items, ont presque tous répondu que f est *dérivable non continue* sur R, pour tous les couples de réels (a,b) tels que l'on ait : *« $b \neq a+1$ »*, ne remettant pas en cause cette réponse grâce à l'argument de nature théorique : *« f dérivable en x_0 $\Rightarrow$ f continue en x_0 »*. Il y a donc un cloisonnement et un manque de flexibilité entre les divers types d'argumentation, qui aboutissent au fait que les conflits restent larvés.

(2) Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout a et b
alors il n'existe pas de valeurs de a et b pour lesquelles
f est continue mais non dérivable sur $\mathbb{R}$

(3) f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $a+1 = b$
donc si $a+1 \neq b$ alors f est dérivable mais non
continue sur $\mathbb{R}$.

Extrait de la copie de Delphine D.

Quant aux étudiants qui n'ont pas effectué les items 2, 3, 4, comment interpréter leur absence de réponse ? Ont ils entrevu une contradiction dans leurs réponse, et, ne sachant y remédier, préféré passer à un autre exercice ? Ou au contraire, ont ils estimé que le problème n'avait plus d'intérêt après la réponse donnée à l'item 1, le traitement des autres items ne revenant qu'à « croiser » les conditions trouvées à l'item 1 et leur négation ? On ne dispose pas d'éléments de réponse sur ce problème, mais il convient de noter tout de même qu'il y a, en proportion, fort peu d'étudiants ayant correctement traité l'item 1 et s'abstenant de répondre aux autres items.

On peut s'interroger sur les raisons qui font qu'il n'y ait pas davantage d'étudiants faisant référence, pour s'autocontrôler, au théorème qui affirme que *« toute fonction dérivable en un point est continue en ce point »*. L'explication est sans doute à rechercher dans l'écologie difficile de ce théorème au sein de l'environnement de terminale scientifique : d'une interprétation délicate pour l'élève, il reste peu utile dans la pratique courante des exercices au lycée, où l'on traite essentiellement de fonctions usuelles qui sont clairement de classe C^{∞} sur leur domaine de définition. Ce théorème n'est guère articulé dans le cours avec d'autres résultats et y apparaît alors essentiellement comme un point de « dogme » à connaître. Même démontré, il s'intègre mal à l'expérience (concrète et personnelle) de l'élève de lycée, et la recherche de fonctions continues, non dérivables en un point, n'est pas dans les objectifs du programme. On se contente le plus souvent de présenter en cours aux élèves la fonction $x \rightarrow |x|$, *de référence*, comme contre-exemple de la réciproque de ce théorème.

De fait, on constate à travers les réponses fournies à l'exercice 1, que seulement un tiers des étudiants citent ici ce théorème (essentiellement du fait de la présence de l'item 3), et que parmi eux, il y en a un certain nombre (8% de l'effectif) qui n'ont traité *que* l'item 3 (de façon correcte)... peut-être avaient-ils repéré la contradiction entre le résultat annoncé par le théorème et ce qu'ils auraient voulu répondre à l'item 1 ? Ce fait peut laisser penser qu'il y a sans doute davantage d'étudiants qui auraient été eux aussi susceptibles de citer ce théorème, s'ils n'avaient fait le choix de dire (pour d'autres motifs, en apparence tout aussi respectables) que f est continue sur R lorsque « $a+1 = b$ » (condition d'égalité des limites en 1), et dérivable pour tous réels a,b (de part et d'autre de 1, on a des expressions usuelles dérivables). Comme ces derniers sont largement majoritaires vis à vis des précédents, cela semble abonder dans le sens de notre interprétation d'une écologie plus délicate de ce théorème reliant dérivabilité et continuité.

Insistons ici sur le fait que les conflits restent occultés (cela est sans doute lié au mode de questionnement : évaluation écrite), ce qui ne signifie pas forcément que les étudiants n'ont pas décelé une contradiction dans leur réponse. Mais c'est nettement l'idée de *choix* qui se dégage de ces réponses : les uns ou les autres utilisent tel élément de *l'outillage* de terminale plutôt que tel autre, ce qui semble abonder dans le sens de l'hypothèse (issue de la partie théorique de cette thèse) d'un manque d'organisation des connaissances. Relevons en outre que certaines réponses fausses (et très répandues, à hauteur de 24% de l'effectif), telles que : *« f est continue et dérivable sur R pour tous les réels a et b »* ne sont en elles-mêmes susceptibles d'engendrer aucun conflit d'un item à l'autre.

Retenons encore que, corrélativement à ces résultats, les théorèmes généraux de continuité et de dérivabilité portant sur les fonctions polynômes ou la fonction de référence $x \to 1/x$ sont les plus fréquemment cités ou sous-entendus. Ils le sont moins souvent dans les copies qui s'attachent à analyser précisément, par des calculs de limites détaillés, les (vrais) problèmes de continuité et de dérivabilité (en 1) qui se posent, que dans celles qui prétendent traiter la question de façon « plus ou moins globale ».

3°) Réponses minoritaires, mais significatives d'un certain rapport au savoir.

On trouve dans quelques copies des propositions erronées du style : *« La fonction est continue sur R si et seulement si elle est dérivable sur R »*, *« La fonction est définie, donc dérivable sur R »*, ou encore : *« Pour être continue, f doit être dérivable »*. Derrière de telles affirmations, il y a sans doute l'habitude de travailler presque exclusivement sur des fonctions indéfiniment dérivables là où elles sont définies, et l'ambiguïté liée au fait que ce sont les fonctions (usuelles) dérivables qui, pour l'essentiel, alimentent le stock de fonctions continues connues au niveau des classes terminales (ce qui n'est a priori qu'une condition suffisante prenant dans la pratique l'allure d'une condition nécessaire).

Très peu de copies (4% de l'effectif) tentent d'utiliser le cadre graphique ou géométrique pour résoudre le problème posé. Signalons cependant la proposition originale d'Alexandra A. qui aurait pu lui permettre de trouver la solution correcte au problème posé si elle l'avait poussée jusqu'au bout :

Supposons f dérivable en 1. Alors $f(x) = ax^2 - x + 2$ et $f(x) = \frac{b}{x}$ ont la même tangente au point d'abscisse 1.

$y = (2a - 1)x - a + 2$ est la tangente de $f(x) = ax^2 - x + 2$

$y = -bx + 2b$ est la tangente de $f(x) = \frac{b}{x}$

f est dérivable en 1 si :

$(2a - 1)x - a + 2 = -bx + 2b$

C'est-à-dire si :

$$\begin{cases} 2a - 1 = -b \\ 2b = 2 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 - 2a \\ 2b = 2 - a \end{cases} \quad \text{IMPOSSIBLE}$$

Cette démarche fort intéressante nous rappelle ici que l'élève entretient une certaine familiarité avec les équations de tangentes, qui peut être utilisée dans certains cas comme *levier* pour résoudre certains problèmes, même si l'on peut penser ici qu'Alexandra ne contrôle sans doute pas complètement sa méthode. Elle « tombe juste », parce qu'à travers l'égalité des deux équations de tangentes, ce n'est pas seulement l'égalité des coefficients directeurs donc des nombres dérivés en 1 de $x \to ax^2\text{-}x\text{+}2$ et de $x \to b/x$ qui est exprimée, mais aussi celle des ordonnées à l'origine qui, en évitant que les deux tangentes soient parallèles mais distinctes évite aussi une discontinuité de f en 1.

Odile I. estime quant à elle que « *f n'est pas continue pour les valeurs de b grandes* » (et par exemple a = 1) « *... car alors les deux parties de la courbe se séparent* » (ce qui n'est pas faux, mais reste assez vague). Elle poursuit en disant que « *f n'est pas dérivable lorsque sa courbe admet des demi tangentes de pente infinie* » (modèle réducteur fondé sur le champ de référence des fonctions de terminale). Pour elle, cela ne peut se produire que pour des valeurs de a et b simultanément très grandes (confusion entre variable et paramètres), donc « *la fonction ne peut être à la fois non continue et non dérivable* » (résultat faux).

Enfin, on relève quelques copies introduisant une condition sur x pour avoir dérivabilité sur R (confusion, là encore, des rôles respectifs de la variable et des paramètres), quelques copies incompréhensibles, et une ou deux fois des erreurs de logique, comme chez Mandfred D. :

(2) D'après le raisonnement du (1), pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$: $b = a+1$, mais que f soit non dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $2a-1 \neq 0$.

$$\begin{cases} 2a-1 \neq 0 \\ b = a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \frac{1}{2} \\ b \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

(4) f n'est pas dérivable et non continue sur $\mathbb{R}$

pour : $\begin{cases} 2a-1 \neq 0 \\ b \neq a+1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a \neq \frac{1}{2} \\ b \neq \frac{3}{2} \end{cases}$.

En dehors de l'erreur sur la condition de dérivabilité, due à la reconnaissance erronée d'un taux d'accroissement nul, on constate que Manfred oublie en cours de route la condition de continuité dans l'item 2 et celle de non continuité dans l'item 4 (il croit à chaque fois les traduire) et obtient, suite à d'autres erreurs (comme le fait de comptabiliser la condition de non dérivabilité dans l'item 4), la même condition dans les items 2 et 4, résultat qu'il ne remet pas en cause.

4°) Tableaux récapitulatifs des réponses des étudiants.

	Tous items	Item 1 seul	Item 3 seul	Items 1-3	Rien
Taux de réalisation	23%	38%	8%	25%	6%

Taux de succès	**Etude Des méthodes utilisées :**	Niveau « zéro » (formel)	Valeurs en 1 égales (raccord)	Identific. Limite en 1^+/ valeur en 1	Solution canonique (limites en $1^+, 1^-$)	Item 3 seul, ne dépendant pas de f	Taux de non réponse
62%	Etude f continue	24%	28%	22%	12%	8%	6%
16%	Etude f dérivable	48%	22%	12%	4%	8%	6%

Etude de la dérivabilité	Taux d'utilisation	Avec succès	Avec échec	Valeur nulle pour f '(1)
Utilisation de la définition du nbre dérivé (lim du taux)	22%	2%	20%	8%

Commentaire : Corrélativement aux pourcentages (24% et 48%) de procédures de *« niveau zéro »* respectivement relatives à la continuité et à la dérivabilité en 1, on trouve 24% de réponses du type : *« f est continue et dérivable sur R pour tous réels a, b »*, et 24% de réponses du type : *« f est continue sur R pour tous réels a, b vérifiant a+1 = b, et dérivable sur R pour tous réels a, b »*.

C/ PRESENTATION DE L'EXERCICE 2.

1°) Objectif visé. Intentions du concepteur.

L'exercice 1 devait permettre de jauger les stratégies de résolution adoptées par les étudiants, orientant leur travail technique et outillées par les énoncés généraux dont ils disposent, issus du cours de terminale. L'objectif était aussi de voir au passage quel rôle ces énoncés peuvent jouer vis à vis d'un certain contrôle de la cohérence, d'observer si des conflits apparaissent, s'ils sont gérés par l'étudiant et si oui, comment. Il nous a permis en outre de mieux cerner chez les étudiants l'état des rapports entre les dimensions « locale » et « globale », le rôle de l'algébrique et la place réelle que peut prendre à leur stade la notion de limite dans un tel exercice.

L'exercice 2 porte essentiellement sur la comparaison entre nombre dérivés et nombres dérivés symétriques, mais commence là encore par l'étude conjointe de la continuité et de la dérivabilité. Il requiert les mêmes acquis des classes terminales (cf. B/2°), mais présente cette fois une entrée mixte (registres graphique et algébrique) offrant ainsi à l'étudiant des possibilités d'inférence plus explicites, d'aller-retour entre le travail algébrique et l'interprétation graphique grâce à la représentation graphique fournie par l'énoncé. Périodicité et parité (sous-jacente) de f constituent ici le moteur de ces phases d'aller-retour entre calculs et graphique. Et naturellement, l'expression de f(x) n'est fournie que sur l'intervalle [0,1[du fait de cette périodicité, ce qui peut être source de difficultés pour qui n'utilise pas bien ces possibilités d'inférences offertes par le graphique. C'est bien ce niveau de flexibilité (en rapport avec l'analyse théorique de cette thèse), que nous souhaitons en particulier tester chez le public concerné, en l'absence de toute indication du texte.

Cependant, une certaine diversité des voies possibles pour effectuer cet exercice existe, et reste théoriquement à la portée des étudiants de ce niveau : interprétation graphique directe ou évaluation préalable de f(x) sur]-1,0] par parité pour l'étude des nombres dérivés en 0, calcul par la définition ou recours à la symétrie de la parabole pour le calcul de $f_s'(1/2)$,... etc. Notre objectif est donc ici d'observer si, dans ces circonstances assez favorables[1], où le recours au cadre graphique reste encore *implicitement* suggéré (mais non *explicitement* conseillé, comme ce pourrait être le cas au lycée), où d'autres méthodes de résolution sont également possibles, et où le niveau de technicité demeure raisonnable (l'expression polynomiale à la base de la fonction est simple), l'étudiant arrive, d'une manière ou d'une autre, à résoudre les problèmes qui lui sont posés.

Mais à travers cet exercice, nous souhaitons aussi jauger la capacité de l'étudiant à à intégrer dans son travail une notion nouvelle, qui vient d'être introduite, en l'occurrence celle de dérivée symétrique (question 2°).

La dernière question, s'appuyant sur l'étude préalable de l'exemple proposé en 1°) et 2°), vise à juger chez l'étudiant récemment issu du lycée, des possibilités d'accès à une « petite » généralisation de la situation entrevue en 2°) : il s'agit de comparer dérivée et dérivée symétrique en un même point.

Nous voulons tester ici sa capacité à envisager une problématique plus générale, à réaliser une démonstration sans difficulté technique majeure et à trouver lui-même un contre-exemple *simple* correspondant à un problème *élémentaire*. Rappelons que si ce type de démarche, *qualitativement*, contraste nettement avec ce qui est habituellement demandé à un élève de lycée, ainsi que nous l'avons mentionné dans la partie théorique de cette thèse, il n'en demeure pas moins que la question 3°)c), sous une forme il est vrai légèrement différente, a fait l'objet d'un exercice « étoilé[2] » (n°21 p.154) du manuel « Déclic » de terminale S.

2°) Justification de la présence d'une représentation graphique dans l'énoncé.

Il s'agit en l'occurrence, non seulement de favoriser chez l'étudiant la réalisation d'inférences à partir du graphique, mais aussi :

- de lui faire gagner du temps en évitant qu'il ne concentre une partie de ses efforts sur l'étude (limitée à [0,1[) de la fonction $x \to x(1-x)$, ce qui ne serait d'aucun intérêt, compte tenu des objectifs visés,
- de mettre l'accent sur le fait que ce n'est pas la fonction $x \to x(1-x)$ définie sur R qui est en jeu ici, mais une toute autre fonction (on a d'ailleurs ajouté en traits discontinus une partie de la représentation graphique de $x \to x(1-x)$ en dehors de [0,1[pour attirer

[1] Choisies ainsi afin de jauger plus précisément la rupture supposée ici entre secondaire et supérieur.
[2] Donc répertorié comme plus délicat que la majorité des exercices.

l'attention sur ce point), et d'éviter ainsi tout malentendu ou incompréhension concernant l'énoncé, la fonction $x \to x(1-x)$ étant, elle, non périodique sur R,

- de permettre précisément à l'étudiant de bien visualiser cette périodicité de f qui peut être source de simplification et de vérification pour les calculs à effectuer.

3°) Analyse a priori de la première question.

Nous voulons donc tout d'abord jauger chez l'étudiant, par cette première question, sa capacité à détacher l'objet « fonction » de l'expression algébrique donnée, les amalgames éventuels entre la fonction proposée et la fonction polynomiale qui à x associe x(1-x), définie sur R, relevant de ce que nous avons identifié comme *« niveau zéro »* dans notre analyse de l'exercice précédent. S'ils ne peuvent plus guère se situer au niveau graphique, des amalgames entre les deux fonctions peuvent encore persister, selon nous, au niveau de l'argumentation ou des calculs.

Au niveau de l'argumentation, on peut s'attendre à des idées simplificatrices, du type : *« les propriétés de continuité et de dérivabilité de la fonction $x \to x(1-x)$, qui est celle concernée sur [0,1[, se répercutent par périodicité sur R »*, sans attention particulière sur ce qui se passe aux points à coordonnées entières. Au niveau des calculs, la tentation est grande, surtout en vue d'établir la preuve d'une régularité que l'on perçoit déjà comme une évidence sur le graphique fourni, d'identifier le calcul de $\lim_{x\to 0} f(x)$ avec celui de $\lim_{x\to 0} x(1-x)$ (sans distinguer limites à droite et à gauche), et de conclure (fort nécessairement !) à la continuité de f en 0. Cela, d'autant plus que l'expression de f(x) en dehors de [0,1[n'est pas fournie par l'énoncé et reste délicate à calculer pour l'étudiant sans indications du texte, et ce, même sur [-1,0[où il suffit de raisonner par parité : pour $x \in [-1,0[$, on a successivement les égalités : $f(x) = f(-x) = (-x).(1-(-x)) = -x(1+x)$ car $-x \in]0,1]$.

Le même type de procédure sera d'ailleurs peut-être également tentée pour l'étude de la dérivabilité de f (calcul de la limite en 0 du taux d'accroissement de $x \to x(1-x)$), mais cette fois le résultat obtenu est en contradiction avec l'interprétation graphique. L'étudiant s'en apercevra-t-il ? Et comment gérera-t-il alors la contradiction ? Précisément, un autre objectif du questionnement est ici d'évaluer sa capacité à contrôler graphiquement ses résultats ou au contraire à s'aider du tracé pour savoir ce qu'il doit démontrer, et à interpréter correctement les phénomènes de continuité et de dérivabilité.

Ainsi, cette première question doit être l'occasion de voir si les étudiants arrivent à identifier les problèmes de différente nature qui se posent ici, et à les traiter tour à tour à l'aide des arguments idoines : étude sur]0,1[, étude en 0, généralisation à R par l'argument de périodicité. Sur]0,1[on doit effectivement invoquer un argument « global », l'expression polynomiale de f(x) correspondant alors bien à une fonction usuelle continue et dérivable. Pour l'étude en 0, en revanche, il s'agit plutôt d'exhiber le calcul des limites de f (continuité), et du taux d'accroissement de f (dérivabilité) en 0^+ et 1^-. En effet, l'expression de f(x) nécessitée pour ces calculs s'identifie alors à x(1-x) ; on peut utiliser ensuite l'argument de périodicité pour dire que les limites en 1^- sont égales à celles en 0^- et être en mesure alors de conclure sur le problème de la continuité et de la dérivabilité de f en 0.

Gageons cependant que, à l'instar de ce que l'on a pu observer dans l'exercice 1, un certain nombre d'étudiants ne formaliseront pas le problème en termes de limites, mais tenteront de façon plus intuitive d'examiner des conditions de raccordement du type : *« f(0) = f(1) »* (continuité), *« f '(0) = f '(1) »* (dérivabilité) en prenant pour la fonction f l'unique expression : f(x) = x(1-x).[3]

La complexité manifeste du problème et la nécessité (en résultant) d'une certaine prise d'initiative par l'étudiant, qui doit faire appel successivement à des arguments qualitativement très divers (utilisation du graphique, théorèmes généraux, expression de conditions locales) pour résoudre le problème posé, sont, selon notre analyse théorique, en rupture avec les seules exigences du niveau terminale. Il sera à notre charge de le vérifier.

4°) Choix effectués pour la deuxième question.

L'objectif de cette question est de faire déterminer par les étudiants quelques nombres dérivés symétriques et les nombres dérivés « classiques » qui leur correspondent, en les choisissant de telle sorte que :

- d'une part, les calculs soient assez simples pour qu'une proportion raisonnable d'étudiants puissent réaliser ensuite, sur de bonnes bases, une analyse critique des résultats (question 3°),

- d'autre part, les procédés de calcul à utiliser, tout en restant simples, soient variés (on ne procède pas ici en 0, comme en ¼ ou ½), et que l'on retrouve les deux situations qui nous intéressent pour l'étude des conjectures de 3°) : égalité de $f'(x_0)$ et de $f_s'(x_0)$ en cas d'existence du premier de ces termes (voir $x_0 = ½$ ou $x_0 = ¼$), et possibilité d'existence de $f_s'(x_0)$ seul, dans le cas contraire (voir $x_0 = 0$).

Ainsi, nous nous sommes limités à l'évaluation des nombres dérivés et dérivés symétriques en des points de l'intervalle [0,1[, afin qu'il ne soit pas nécessaire d'invoquer une nouvelle fois l'argument de périodicité pour cette question. En effet, cet argument, que peu d'étudiants, sans doute, auront convenablement exploité en 1°), serait crucial pour l'évaluation d'un nombre dérivé tel que, par exemple, $f_s'(5/4)$, car la détermination de f(x) sur un intervalle tel que [1,2[est beaucoup trop délicate pour le public concerné. Ainsi, nous nous retrouverions, selon toute vraisemblance, devant un nombre très faible de réponses correctes, ce qui ôterait alors tout pertinence à l'exercice proposé, et en particulier à la dernière question, dont la réussite est largement conditionnée par celle des calculs demandés ici en 2°).

Une dernière remarque : nous demandons le calcul de $f_s'(1/4)$, afin que les élèves n'imaginent pas que l'on a systématiquement $f_s'(x) = 0$ (c'est ici le cas pour $x_0 = 0$ <u>et</u> $x_0 = ½$).

---

[3] S'agissant de tester la dérivabilité de f en 0 et 1, poser le problème en ces termes (« A-t-on : f '(0) = f '(1) ? ») est naturellement très maladroit (et même *formellement* incorrect), mais aboutit cependant bien au fait que f n'est pas dérivable aux points d'abscisses entières (le nombre dérivé de x→x(1-x) valant 1 en 0 et –1 en 1).

5°) Analyse a priori de la deuxième question.

Le premier écueil à signaler concernant cette question (et d'ailleurs la suivante) tient au fait qu'il faille ici pour l'étudiant travailler directement avec la notion *nouvelle* de nombre dérivé *symétrique*, ce qui pourrait d'emblée provoquer chez lui un « blocage », indépendamment du niveau de difficulté des questions posées.

Le calcul de $f_s'(0)$ ne requiert pas les mêmes savoir-faire que celui des deux autres nombres dérivés symétriques. Sous réserve de déceler la parité de f, qui est implicite (découle de l'hypothèse de périodicité de l'énoncé), mais peut s'observer par simple lecture de la courbe, il est assez aisé de voir que $f_s'(0)$ (égal à $\lim_{h\to 0} (f(h)-f(-h)) / (2h)$) est nul (on a un taux d'accroissement nul avant tout passage à la limite, puisque $f(h) = f(-h)$). Faute de cela, on peut prévoir des erreurs de la part des étudiants, dans le calcul du terme $f_s'(0)$, erreurs liées à la nécessité de déterminer alors, préalablement, l'expression de f(x) pour tout $x\in]-1,0]$. Il y a notamment celle qui consiste à ne pas distinguer limites de f à droite et à gauche en 0 et à prendre x(1-x) comme expression unique de f(x) pour ce calcul, ce qui amène alors à écrire :
$f_s'(0) = \lim_{h\to 0} (f(h)-f(-h)) / (2h)) = \lim_{h\to 0} (h(1-h)-(-h)(1+h)) / (2h) = \lim_{h\to 0} (2h)/(2h) = 1$.

Concernant à présent la détermination de $f_s'(1/2)$ et de $f_s'(1/4)$, on peut penser qu'elle sera finalement plus aisée pour les étudiants, car il n'y a aucun argument de parité ou de périodicité qu'il soit utile d'invoquer. On se situe sur l'intervalle [0,1[où l'expression de f(x) est fournie par l'énoncé, et il suffit donc d'effectuer scrupuleusement un calcul simple, de nature algébrique :

$f(1/2 + h) - f(1/2 - h) = (1/2 + h).(1/2 - h) - (1/2 - h).(1/2 + h) = 0$, donc on a : $f_s'(1/2) = 0$, et :
$f(1/4 + h) - f(1/4 - h) = (1/4 + h).(3/4 - h) - (1/4 - h).(3/4 + h)$
$= 3/16 - h/4 + 3h/4 - h^2 - 3/16 - h/4 + 3h/4 + h^2 = h$, donc on a :
$f_s'(1/4) = \lim_{h\to 0} (h / 2h) = 1/2$

Une remarque : compte tenu de la symétrie de la parabole d'équation $y = x(1-x)$ par rapport à l'axe vertical d'équation $x = ½$, il est évident au départ que l'on a : $f(1/2 + h) = f(1/2 - h)$ pour tout h réel, et par suite, $f_s'(1/2) = 0$, mais il est peu probable que les étudiants invoquent directement cet argument de nature géométrique.

Nous pensons donc, conformément aux hypothèses exprimées dans notre étude théorique, que les deux derniers calculs seront, dans l'ensemble, bien réussis par les étudiants, car on reste dans une Analyse de type « algébrisée ». Le passage à la limite est ici évident et le recours au cadre graphique n'est pas indispensable, même s'il peut faciliter les choses. D'un point de vue purement naïf, il nous semble a priori, que le calcul des nombres dérivés « classiques », plus familiers, sera plus facile pour l'étudiant que celui des nombres dérivés symétriques. C'est certainement le cas pour ce qui est de $f'(1/2)$ et $f'(1/4)$, qui peuvent s'effectuer encore plus facilement que ceux de $f_s'(1/2)$ et $f_s'(1/4)$ à l'aide de la fonction dérivée $f'(x) = 1-2x$. Concernant les nombres dérivés de f en 0, cette appréciation est plus discutable. Il est certes exact que les étudiants sont supposés connaître l'interprétation graphique du nombre dérivé au sens « classique », et disposer ainsi d'un moyen de vérification « prêt à l'emploi » de leurs calculs, alors qu'il n'en est rien pour ce qui est du nombre dérivé symétrique[4]. Mais

[4] La visualisation de ce dernier, même si elle n'apparaît a priori pas très difficile à réaliser dans les exemples présentés, reste ici à la charge des étudiants, ce qui la rend tout de même beaucoup plus délicate pour eux.

techniquement, l'évaluation par le calcul des nombres dérivés de f à gauche et à droite en 0 est plus délicate que celle du nombre dérivé symétrique en 0, et l'on peut craindre que certains étudiants ne fassent qu'appliquer pour x = 0 la formule de la dérivée de f, valable sur]0,1[, f '(x) = 1-2x, pour évaluer f '(0). Il n'y a en revanche pas nécessité d'effectuer deux calculs distincts pour le calcul du nombre dérivé symétrique en 0, puisque f_s'(0) admet clairement une valeur nulle par parité de f, étant donné que l'on a : $\forall h \ \ f(h)=f(-h)$.

Il est important de rappeler que la dérivabilité de f sur R est censée avoir été étudiée dans la première question. Il sera donc intéressant de voir si la réponse donnée en 2°)b) en ce qui concerne l'étude du nombre dérivé (classique) de f en 0 est en accord avec celle du 1°)b). On peut penser en effet que certains étudiants ont hâtivement conclu à la dérivabilité de f sur R en question 1°)b), parce que $x \to x(1-x)$ est polynomiale. Mis en demeure, cette fois, d'étudier précisément existence et valeur éventuelle du terme f '(0), ils aboutiront peut-être dans leur tâche à une conclusion en contradiction avec la réponse donnée en 1°)b). S'en apercevront-ils ? Et si c'est le cas, comment géreront-ils cette contradiction ?

Enfin, concernant la comparaison demandée en question 2°)b) entre nombres dérivés et nombres dérivés symétriques, une question se pose : Comment, les étudiants qui ont effectué un calcul correct des f '(x_0) et des f_s'(x_0), interpréteront-ils le fait que f '(0) n'existe pas, alors que f_s'(0) existe et vaut 0, et tandis qu'ils ont trouvé par ailleurs que les f '(x_0) et les f_s'(x_0) existent en même temps et sont égaux pour $x_0 = ½$ et $x_0 = ¼$? Comme une erreur de calcul de leur part ? Y aura-t-il des étudiants « s'arrangeant » pour trouver également f '(0) = f_s'(0) par souci de cohérence ? Car l'expérience de ce genre de situation est nouvelle au sortir du lycée, et peut donc être perçue comme pathologique par les étudiants.

Il faut bien considérer ici que l'intention du concepteur, évidente pour l'expert, reste assez inaccessible pour l'étudiant, qui se contente simplement de répondre aux questions, telles qu'elles sont posées, une à une. Le fait qu'il n'y ait pas, d'un point de vue général, simultanéité de l'existence des termes f '(x_0) et f_s'(x_0), alors qu'ils semblent égaux à chaque fois qu'ils existent, est probablement déroutante et peut même constituer pour lui un paradoxe. Manifestement, il ne peut s'agir de la même quantité, mais d'un autre côté, il semble tout aussi indéniable qu'il existe un lien fort entre les deux termes ! La difficulté provient bien sûr du fait qu'il y a là-dessous une propriété relevant d'une simple implication, alors que l'élève de lycée a plutôt l'habitude, dans sa pratique d'une Analyse « algébrisée », d'identifier des quantités entre elles, donc de penser les choses en termes de notions équivalentes.

6°) Analyse a priori de la troisième question.

La conjecture a) est satisfaite, et on a : f_s'(0) = 0 pour toute fonction paire f. Il s'agit là de voir si les étudiants qui ont obtenu, d'une façon ou d'une autre, pour la fonction f considérée au début de l'exercice, f_s'(0) = 0, sont à présent capables d'envisager une généralisation simple de ce fait, sans toutefois faire d'amalgame entre la situation particulière étudiée et cette conjecture générale.

Si l'on a résolu la question 2°) de la façon la plus naturelle et économique (*« pour tout h, on a f(h) = f(-h), donc le taux est nul »*) c'est-à-dire sans rechercher au préalable l'expression de f(x) pour x élément de]-1,0], le passage du cas particulier au cas général ne modifie pas en rien l'argumentation à donner[5]. Dans le cas contraire, cette généralisation peut permettre à l'étudiant de pointer précisément l'argument de parité comme seule cause réelle du résultat obtenu en 2°). Les réponses fournies pour cette conjecture a) nous intéressent donc tout particulièrement venant d'étudiants n'ayant pu déterminer $f_s'(0)$ en question 2°), ou ayant commis une erreur dans ce calcul. Et nous voulons voir, par exemple, si cette conjecture livrant une condition suffisante d'existence de $f_s'(0)$ qui correspond au cas envisagé en 2°), peut permettre à de tels étudiants de revenir sur cette question.

La deuxième conjecture, quant à elle, est fausse (considérer pour contre-exemple la fonction étudiée précédemment) et doit permettre d'éclairer les résultats de 2°), autrement dit le fait que le nombre dérivé symétrique puisse exister en un point où le nombre dérivé « classique » n'existe pas. Insistons là encore sur le fait que le travail demandé ici serait assez inhabituel, *dans sa nature*, pour un élève de terminale, notamment parce que l'énoncé ne dit pas si la proposition est vraie ou fausse (il faut le déterminer soi-même), et parce qu'il y a nécessité d'identifier le contre-exemple ad hoc, et non pas de *vérifier* sur ordre de l'énoncé que telle ou telle fonction répond au problème posé.

Cependant, ce travail est sollicité dans les conditions les plus favorables pour l'étudiant, puisque le contre-exemple à trouver a déjà été présenté dans l'exercice. Pour peu que l'on ait répondu correctement à la question 2°), il ne devrait donc pas y avoir de difficulté majeure à l'identifier. Dans le cas contraire, un autre contre-exemple simple (fonction de référence) est accessible, la fonction $x \to |x|$, qui correspond à celui donné dans le cours de terminale pour montrer qu'une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point.

Ainsi, les conditions que nous avons créées ici doivent nous permettre de bien jauger l'importance de la rupture identifiée dans notre partie théorique, en ne mêlant pas aux difficultés dues au saut qualitatif identifié, des difficultés d'une autre nature, des difficultés techniques, par exemple, liées à la nécessité de « construire » soi-même le contre-exemple.

Venons en maintenant à la conjecture c. Nous avons donné dans l'énoncé, en rappel, les deux définitions du nombre dérivé en un point x_0, qui seront utiles à l'étudiant pour établir la validité de cette conjecture c), ce qui doit l'aider à percevoir le problème posé autant qu'à en entrevoir la solution : on dispose de trois expressions différentes faisant intervenir des limites, deux d'entre elles correspondant au nombre dérivé classique et la troisième au nombre dérivé symétrique ; il s'agit de trouver le lien entre ces termes.

Une solution correcte est : *« $(f(x_0+h) - f(x_0)) / h + (f(x_0) - f(x_0-h)) / h = (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / h$, donc sachant que $(f(x_0+h) - f(x_0)) / h$ et $(f(x_0) - f(x_0-h)) / h$ tendent vers une valeur finie commune qui est le nombre dérivé $f'(x_0)$, lorsque x tend vers x_0, on en déduit ainsi que $\lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / 2h = \frac{1}{2} [f'(x_0) + f'(x_0)] = f'(x_0)$ ».*

[5] Rappelons ici que le passage à la limite n'influençant pas le résultat obtenu, les confusions possibles entre le taux et sa limite sont sans conséquences.

En dépit de la simplicité de cette démonstration qui, là encore, ne met en jeu qu'une procédure *algébrique*, avec en particulier l'utilisation du théorème affirmant (sous certaines conditions, ici réalisées) que *« la somme des limites de deux fonctions est égale à la limite de la somme de ces fonctions »*, nous doutons qu'une forte proportion d'étudiants aboutisse à cette solution. Beaucoup n'iront pas jusque là, ou ne comprendront pas le problème posé. En particulier, on imagine mal que ceux qui ne font guère de différence entre continuité et dérivabilité (simultanément satisfaites pour la plupart des fonctions de terminale) puissent en faire une entre « dérivée » et « dérivée symétrique », d'autant qu'il s'agit d'une notion nouvelle pour eux, à intégrer.

En dépit de l'injonction : *« Justifiez soigneusement chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple »*, d'autres répondront sans doute, par manque d'habitude des problématiques générales, que cette conjecture est réalisée, au vu des seuls résultats du 2°), c'est-à-dire en se limitant à la fonction et aux points que l'on a donnés (généralisation abusive). Cela, peut-être parce qu'ils estimeront que le « jeu » consiste simplement ici à bien observer les calculs effectués en 2°) et à en tirer une « morale », cette observation tenant lieu de démonstration.

D/ ANALYSE DES REPONSES FOURNIES A L'EXERCICE 2.

1°) Résultats obtenus à la question 1.

Si l'on met à part les réponses incomplètes ou incohérentes (6% des copies) qui sont parfois difficiles à interpréter (comme : *« $f'(x) = 1-2x$, donc $f'(1/2) = 0$, donc f n'est pas dérivable au point d'abscisse ½ »*[6]), il convient d'abord de distinguer trois groupes d'étudiants, divisant l'essentiel du public (94%) en trois parties presque équitables :

1) les étudiants qui ne voient pas le problème posé aux points d'abscisse entière (32% de l'effectif), et ont recours à ce qu'on nommera une « *procédure globale* », traitant la situation en remarquant simplement la continuité et la dérivabilité de $x \to x(1-x)$ sur R, par exemple comme fonction polynôme ou comme produit de fonctions continues et dérivables sur R (« niveau 0 » déjà identifié dans l'exercice 1),

2) ceux qui repèrent qu'il y a un problème particulier de continuité et de dérivabilité à étudier au(x) point(s) d'abscisse 0 et/ou d'abscisse 1 (34% de l'effectif) et adoptent donc une « *procédure locale* » (calcul de limite, interprétation graphique en ces points),

3) ceux, enfin, qui analysent le problème en 0 et/ou en 1, *uniquement* pour la continuité ou *uniquement* pour la dérivabilité, et invoquent seulement un théorème général (applicable à la fonction $x \to x(1-x)$) dans l'autre cas (« *procédure mixte* », utilisée par 28% de l'effectif).

Si l'on considère l'ensemble des façons de traiter de la continuité ou de la dérivabilité de f adoptées par les étudiants, nous constatons donc que la proportion (46%) d'étudiants qui

[6] Sans doute une confusion entre « existence d'une pente horizontale » et « existence d'une pente verticale » comme cas de non dérivabilité en un point.

passent ainsi *« à côté du problème »*, dans l'un ou l'autre cas, se contentant d'appliquer un théorème général à $x \rightarrow x(1-x)$ (au mieux[7]), se répartit elle-même en deux sous-groupes : les étudiants qui affirment *directement* la continuité et la dérivabilité de f *sur R* par cet argument (tendance majoritaire : 34%) et ceux qui en déduisent seulement la continuité et la dérivabilité sur [0,1[, puis invoquent la périodicité de f pour étendre à R ces propriétés (12%).

Ces derniers ont donc bien identifié que l'expression f(x) = x(1-x) ne valait que pour x élément de [0,1[, mais pas le problème du « raccord » aux points d'abscisse entière. Citons un exemple pour chacun de ces deux cas mentionnés :

1) a) f est le produit de deux fonctions continues sur R :
la fonction f est donc continue sur IR
b) De même, f est le produit de deux fonctions dérivables sur IR :
elle est donc dérivable sur R.

Procédure globale, niveau 0 : copie de Jean-Vincent R. ; traitement correspondant à un « rituel » de terminale, avec amalgame total entre la fonction f et l'expression algébrique x(1-x).

a) la fonction f est continue sur IR
en effet la fonction polynome
$f(x) = x(1-x)$ est continue sur $[0,1[$
ainsi sur une periode f est continue
elle est donc continue sur IR tout entier

Niveau 0 + périodicité : extrait de la copie de Matthieu H.

Les 48% d'étudiants qui tentent d'étudier plus particulièrement le problème de continuité et/ou de dérivabilité en 0 (et/ou en 1) le font généralement (38% de cas) par un calcul (de limites ou de valeurs aux points). Il n'y a que 10% de l'effectif qui utilise un argument de nature graphique dans l'un ou l'autre des deux cas. Parmi ces individus, une légère majorité traite de cette façon le seul problème de la dérivabilité, réglant alors systématiquement la question de la continuité par un argument global (« niveau 0 » identifié ci-dessus), tandis que les autres traitent graphiquement à la fois le problème de la continuité et celui de la

[7] Car certains invoquent aussi des propriétés fausses, telles que « si f est définie sur R, f est continue sur R » ou bien : « si f est continue sur R, f est dérivable sur R ».

dérivabilité. Aucun étudiant n'a donc traité graphiquement <u>que</u> la question de la continuité, ce qui est sans doute la conséquence logique d'une meilleure familiarisation des étudiants au concept de dérivabilité qu'à celui de continuité[8]. Le traitement graphique de la continuité et de la dérivabilité est correct dans tous les cas.

1/a) La fonction f est continue sur ℝ car par définition de cette fonction, son ensemble de définition est ℝ.

b) f n'est pas dérivable sur ℝ car on constate graphiquement que la courbe forme un point anguleux à chaque période, et donc qu'il n'existe pas de tangente au niveau de ces points, ce qui prouve que f n'est pas dérivable ~~sur ces~~ pour ces points. f n'est pas dérivable pour les points qui ont une abscisse correspondant à un réel entier.

<u>procédure mixte</u> : Extrait de la copie de Claire C. ; « niveau 0 » (continuité : argument incorrect) et interprétation graphique (de la dérivabilité) correcte.

<u>Tableaux récapitulatifs</u> :

	Argument partiel ou incohérent :	Argument de « niveau 0 » :	Argument graphique ou calcul de limite	Totaux :
Réponses non interprétées :	6%	_	_	6%
Procédure globale :	_	32%	_	32%
Procédure mixte :	_	14%	14%	28%
Procédure locale :	_	_	34%	34%
Totaux :	6%	46%	48%	100%

[8] Et cela, bien que l'interprétation graphique du phénomène de continuité (telle qu'elle est présentée au lycée) soit a priori plus simple que celle de la dérivabilité.

	Argument « niveau 0 » :
Sans argument de périodicité :	34%
Avec argument de périodicité :	12%
Total :	46%

	Argument graphique ou bien calcul de limites :
Calculs de limites :	38%
Argument graphique :	10%
Total :	48%

Concernant à présent les calculs effectués (par 38% de la population) pour une étude locale de la continuité et de la dérivabilité, on relève une assez grande dispersion des démarches adoptées, surtout concernant la dérivabilité. Les différentes combinaisons possibles existant à partir des choix qui s'offraient à l'étudiant en sont manifestement la cause.

Pour la continuité, ces choix concernent ici : le fait d'étudier la fonction en 0, en 1, ou en 0 <u>et</u> en 1, de faire cette étude à gauche et/ou à droite ou seulement au point, et de prendre, ou non, systématiquement l'expression $f(x) = x(1-x)$ pour les calculs de limites, et si c'est le cas, d'invoquer pour ce faire, ou non, la périodicité de f. Pour la dérivabilité, il faut ajouter à cette liste le fait d'effectuer l'étude par le calcul de la limite de taux d'accroissement ou de la valeur de la dérivée de l'expression $x(1-x)$ au point considéré.

<u>Résultats concernant la question de la continuité de f :</u>

On constate que le fait de distinguer étude à gauche et à droite en 0 et/ou en 1 n'est en rien significatif quant à la réussite de cette question. En effet, certains étudiants distinguent limite à gauche et à droite de f en 0 (resp.1) mais utilisent de part et d'autre du point la même expression $f(x) = x(1-x)$, ce qui les amène à écrire des égalités trivialement satisfaites, ne traitant pas correctement le problème de raccordement, qu'ils peuvent avoir « bien posé » au départ :

Pour qu'elle soit continue sur tout $\mathbb{R}$ il faut :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$$

$$\to \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} x(1-x) = 0$$

$$\to \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} x(1-x) = 0$$

$\rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x(1-x) = 0$

$\rightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x(1.x) = 0$

Ainsi $f(x)$ est continue sur tout $\mathbb{R}$ car

$\lim_{x\to 1} d = \lim_{x\to 1} g \quad \lim_{x\to 0} d = \lim_{x \to 0} g$

Extrait de la copie de Suzanne A.

A l'inverse, ce problème de raccordement semble perçu par des étudiants ne distinguant pas nécessairement « à droite » et « à gauche » au point, ni même éventuellement « limite » et « valeur au point », mais apparemment sensibles à la périodicité de la fonction f :

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ \lim_{x\to 1} x(1-x) = 0 \end{array}\right\}$ donc f est continue en 1 et donc sur $1[1] = 0[1]$ pour des raisons de périodicité

donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Extrait de la copie de Christophe D.

f est continue si :

$f(0) = f(1)$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1(1-1) = 0$

Comme la fonction f est periodique de periode 1,

f est continue sur $\mathbb{R}$

Extrait de la copie de Stéphane C.

On ne trouve qu'une copie qui calcule (correctement d'ailleurs !) l'expression de f(x) sur [-1,0[et résout le problème posé ainsi.

Sensibles au repère sémiotique (intervalle *[0,1[*) de l'hypothèse donnée *« f(x) = x(1-x) sur [0,1[»*, les étudiants cherchent plus souvent à établir la continuité de f en 1 qu'en zéro[9] à travers un comportement visant une certaine efficacité dans un champ de pratiques familières au niveau terminale :

Cherchons si f est continue au point 0.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x(1-x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

f est continue en 0.

Cherchons si f est continue en 1 :

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x(1-x)$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 1-x = 0^+ \quad \text{soit} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$$

f est donc continue en 1.

f étant périodique, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Extrait de la copie d'Anne M. : étude locale différenciée en 0 et en 1 de la continuité (calcul de la limite de f *en* 0 en utilisant la seule expression x(1-x) pour f(x), étude précise *à gauche* en 1).

1°) a) La fonction f est un polynôme du second degré donc elle est continue sur $[0,1[$. Or elle est périodique de période 1 donc continue sur $\mathbb{R}$.

$\left(\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x(1-x) = 0 = f(1).\right)$

Extrait de la copie de Odile I. : étude locale uniquement en 1, en prenant x(1-x) comme expression de f(x) pour cette étude, sans distinguer continuité « à gauche en 1 » et « à droite en 1 ».

Résultats concernant la question de la dérivabilité de f :

Concernant la dérivabilité, il y a davantage de distinctions entre limites à gauche et à droite en 0 (ou en 1) du taux d'accroissement (22 des 38% ayant traité la question de la dérivabilité par

[9]L'expression *polynomiale* figurant dans l'énoncé pour f(x) est valable pour x = 0, donc certains estiment qu'il y a nécessairement continuité (et dérivabilité) de f en 0.

le calcul). Sans doute peut on effectuer à ce propos une hypothèse sur les différences de pratiques entre l'étude de la continuité en un point en terminale (qui concerne le plus souvent la possibilité d'effectuer un prolongement par continuité en bout d'intervalle), et celle de la dérivabilité pour laquelle il est plus souvent nécessaire d'envisager plusieurs étapes au calcul (cas notamment d'une fonction comportant une valeur absolue). Ces habitudes qui se forgent à travers les situations rencontrées ont une influence probable sur ce phénomène observé.

Paradoxalement, il y a aussi ici davantage de réponses incorrectes (notamment du type *« f est dérivable sur R »*). Elles sont dues en partie à l'association effectuée par les étudiants entre dérivabilité en un point et existence de limites finies à gauche et/ou à droite en ce point[10] pour le taux d'accroissement et en partie à des erreurs de calculs pour l'évaluation des limites de ce taux. Autrement dit l'icône « point anguleux » de la figure prototypique classique (présence de pentes distinctes à gauche et à droite en 0) n'est pas une connaissance toujours *disponible* chez l'étudiant.

On constate encore que les étudiants regardent la dérivabilité plutôt en 1 qu'en 0, à cause de l'hypothèse *« f(x) = x(1-x) <u>sur [0,1[</u> »*, voire même en 1^- uniquement, ce qui tend à renforcer l'erreur que nous venons de souligner. Les différentes possibilités de calcul de taux d'accroissement (à partir de cette seule expression) en 0, 1, en 0^+ ou 1^-, représentent 15% des démarches recensées.

b) f est dérivable sur [0;1[comme produit de fonctions dérivables.

<u>pour x = 1</u> : $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ $\lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)(-h) - 0}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} -1 - h = -1$

-1 est réel donc f est dérivable en 1

<u>Extrait de la copie de Stéphanie P.</u> : calcul correct de la limite en 1^- mais conclusion erronée.

Mais la démarche la plus fréquemment rencontrée ici (16%) consiste à calculer la limite du taux d'accroissement de x→ x(1-x) en 0 et en 1 et à les comparer, ce qui aurait dû mener les étudiants à une réponse correcte plus souvent[11], puisque la limite du taux d'accroissement de f à gauche en 0 et celle du taux d'accroissement de la fonction x→ x(1-x) en 1 sont égales par périodicité.

Il n'y a finalement que 4% des copies qui font intervenir directement (plus rarement avec une explication) f '(0) ou f '(1) calculé à partir de la fonction dérivée x→ 1-2x de x→ x(1-x) pour l'étude même de la dérivabilité de f en 0 ou en 1 (contre 34% qui passent par le calcul

[10] Certains étudiants procèdent pour la dérivabilité comme pour la continuité : ils savent que l'existence de limites finies à gauche et à droite au point, pour une fonction définie en ce point suffit à assurer la continuité de cette fonction en ce point, et pensent qu'il en est de même pour la dérivabilité au point si le taux d'accroissement en ce point admet des limites finies à gauche et à droite au point.
[11] Il y a ici des erreurs de calcul assez nombreuses de la part des étudiants.

d'un taux d'accroissement). Cela peut déboucher alors sur des égalités du type : f '(0) = 1 et f '(1) = -1 aboutissant à l'idée que f n'est pas dérivable en 0 parce qu'il n'y a pas raccordement des pentes. Dans ce cas, même si le raisonnement est incorrect (utilisation illicite de la fonction dérivée, absence de distinction entre les nombres dérivés à gauche et à droite) le résultat final est correct et la périodicité exploitée.

b) f n'est pas dérivable sur IR

en effet :

$f'(x) = -2x + 1$ sur $[0, 1[$

ainsi la limite du taux d accroissement

de f a droite en zéro est +1

et la limite du taux d'accroissement

de f à gauche en zéro est -1

(puisque f est périodique)

ainsi f n'est pas dérivable sur IR.

Extrait de la copie de Matthieu H. : ici, économie et finesse dans la résolution ; cet étudiant n'ignore pas la définition exacte des nombres dérivés de la fonction f (à gauche et à droite) en 0, mais les identifie de façon contrôlée avec les valeurs de la dérivée de x→x(1-x) en 0 et 1.

Mais d'autres copies proposent comme conditions de dérivabilité en 1 des conditions du type : *« lim $_{x\to 1}$ (f(x)-f(1))/(x-1) = f '(1) »* (avec f(x) = x(1-x) comme expression prise pour le calcul de f '(1) par dérivation et pour le calcul du taux d'accroissement). Cette condition aboutit alors à une évidence et l'étudiant conclut à la dérivabilité de f en 1.

Il y a 3% des copies qui empruntent sans erreur la démarche « canonique » : calcul de la limite du taux d'accroissement de f en 0^+ et 1^- par application de l'expression polynomiale donnée pour f sur [0,1[, puis utilisation *explicite* de la propriété de périodicité. Notons encore qu'aucun étudiant n'étudie ici la dérivabilité de f en 0 ou 1 par la limite de la fonction dérivée en 0 ou 1.

La moitié des étudiants effectuant des calculs pour l'étude de la dérivabilité citent *explicitement* l'argument de périodicité pour passer de la dérivabilité établie en 0 et sur]0,1[à la dérivabilité sur R, même si les autres l'utilisent *implicitement.* Par contre, l'étude de la continuité ou de la dérivabilité de f en 0 ou en 1 (par le calcul) est presque toujours effectuée sans recours explicite à l'argument de périodicité.

Notons enfin que seulement un quart (26%) des réponses relatives au problème de la dérivabilité peuvent être considérées comme correctes (aux problèmes de rigueur près, ci-dessus évoqués), tous arguments confondus (graphiques et calculs). Il y a à peu près la même proportion (25%) de réponses correctes à la question de la continuité (moins de réponses graphiques, plus de réponses correctes obtenues par le calcul).

Bilan global des diverses procédures :	Niveau 0 + réponses non interprétées :	Interprétation de nature graphique :	Calcul de limites :
Bilan / Continuité :	56% (50%+6%)	6%	38% (19% de succès) limites à g, à d :12%
Bilan / Dérivabilité :	48% (42%+6%)	14%	38% (12% de succès) limites à g, à d : 22%
Moyenne :	52% (46%+6%)	10%	38% (succès : 15,5%)

Procédures de calcul pour la continuité 38%	Résolution OK par limites à gauche, à droite	Résolution non correcte, par limites à g, à d.	Résolution OK, raccordement direct.	Résolution non correcte sans limites à g, à d.
En 0	1%	2%	-	8%
En 1	3%	2%	8%	3%
En 0 et en 1	-	4%	-	-
Condition type : valeurs ou limites égales en 0 et en 1	-	-	7%	-
Totaux :	4%	8%	15%	11%

Bilan des procédures de calcul (38%)	Procédure standard correcte :	Limite du taux finie en 0, 1, 0^+ ou bien 1^- :	Egalité des limites du taux en 0 et en 1 :	Application de l'expression f '(x) = 1-2x :
Dérivabilité :	3%	15%	16%	4%

2°) Résultats obtenus à la question 2.

On constate d'abord que la quasi totalité du public concerné (97%) intègre bien la définition du nombre dérivé symétrique en un point et ne la confond pas avec celle du nombre dérivé « classique » *pour la réalisation de ces calculs.*

Le bilan concernant les réponses fournies aux calculs de nombres dérivés est très contrasté, et les solutions proposées par les étudiants, peu variées, qu'elles aboutissent très majoritairement au résultat exact (comme c'est le cas pour ces nombres dérivés en ½ ou ¼) ou à un résultat faux (cas des nombres dérivés en 0). Les étudiants appliquent presque tous, très scrupuleusement, la formule du nombre dérivé symétrique et obtiennent le résultat correct pour $f_s'(1/2)$ et pour $f_s'(1/4)$ avec un taux de réussite semblable, de l'ordre de 75%. Même compte tenu du caractère très algébrique du calcul, cela nous surprend un peu du fait de la difficulté présumée à intégrer en situation d'exercice une notion nouvelle.

Cependant, si ce pourcentage n'est pas plus élevé encore, c'est pour des raisons très différentes dans les deux cas : étourderie dans le calcul de $f_s'(1/4)$ (un peu plus technique que celui de $f_s'(1/2)$) et, chose plus intéressante, identification erronée d'une forme indéterminée au cours du calcul de $f_s'(1/2)$. En effet, le numérateur du taux d'accroissement symétrique en ½ étant nul, et le dénominateur valant 2h, le fait de devoir faire tendre h vers 0 dans cette expression amène 21% des étudiants à conclure à l'indétermination, puis au fait que $f_s'(1/2)$ n'existe pas[12] :

$$* \; f_s'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(\frac{1}{2}+h) - f(\frac{1}{2}-h)}{2h} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{(\frac{1}{2}+h)(\frac{1}{2}-h) - (\frac{1}{2}-h)(\frac{1}{2}+h)}{2h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1/4 - h^2 - 1/4 + h^2}{2h} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{``0"}{2h} .$$

Cette limite n'existe pas. Donc $f_s'(\frac{1}{2})$ n'existe pas

Extrait de la copie de Sylvain D.

Concernant à présent le calcul de $f_s'(0)$, on constate cette fois que seulement 3% de la population aboutit au résultat correct (0) en remarquant la nullité du numérateur par parité, 88% des étudiants commettant l'erreur prévue dans l'analyse a priori, qui consiste à prendre x(1-x) pour expression de f(x), de part et d'autre de 0, et donc f(-x) = -x(1+x), ce qui donne au final une valeur de 1 pour $f_s'(0)$.

$$f_s'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h}$$

$$\begin{aligned} f(h) - f(-h) &= h(1-h) - (-h)(1+h) \\ &= h - h^2 + h + h^2 \\ &= 2h \end{aligned}$$

$$f_s'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{2h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Extrait de la copie de Christophe C.

[12] Sans doute la présence, dans l'enseignement des limites au lycée, de tableaux récapitulatifs des formes indéterminées, joue-t-elle un rôle dans cette situation, en mettant l'accent sur un repérage purement formel de ces formes indéterminées, qui s'effectue au détriment de la signification de la notion de limite.

Pour le calcul des nombres dérivés en ½ et ¼ au sens classique, le taux de succès est encore plus élevé, de l'ordre de 95%, que pour celui des nombres symétriques aux mêmes points. La raison en est simple : ils ne passent vraiment par le taux d'accroissement que dans 2% des cas et se contentent en général de dériver l'expression polynomiale de f(x), fournie par l'énoncé sur [0,1[, avant de donner à x la valeur ½ ou ¼, méthode plus performante et réduisant presque à néant les possibilités d'erreur de calcul. Ainsi, le repérage de la situation standard est donc bien réalisé dans l'ensemble.

Hélas, dans le même élan, ils procèdent aussi ainsi pour l'évaluation de f '(0) (n'oublions pas, là encore, que l'expression : f(x) = x(1-x) vaut pour *x∈[0,1[*), ce qui les amène dans 86% des cas à une réponse incorrecte : f '(0) = 1, seulement 14% de l'effectif affirmant que f '(0) n'existe pas. Rappelons que 26% des étudiants avaient, dans la question 1, fourni une réponse correcte au problème posé de la dérivabilité sur R (graphiquement pour 14% d'entre eux et par le calcul pour 12% d'entre eux). On relève donc ici une incohérence, *du point de vue de l'expert*, entre les réponses données, dans plus de 10% des copies.

Il s'avère que les copies comportant cette incohérence ont établi la dérivabilité en question 1 plus souvent de façon graphique que par le calcul, mais la différence n'est guère significative. A l'analyse, ce qui apparaît plutôt, dans certaines copies, c'est le fait que pour l'étudiant, « étudier la *dérivabilité* en un point » est une tâche essentiellement déconnectée du *calcul* proprement dit de la valeur en ce point de la fonction dérivée (obtenue par un calcul formel). A partir de là, on peut estimer que les résultats obtenus ne sont pas nécessairement perçus comme contradictoires.

b). f est dérivable sur [0;1[comme produit de fonctions dérivables.
$\forall x \in [0;1[$ $f'(x) = 1-2x$ $f'(0) = 1$ et $f'(1) = -1$. Or le nombre dérivé en un point ~~...~~ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point
Donc comme f est périodique on a : $\forall x \in \mathbb{Z}$, f admet deux demi-tangentes (point d'inflexion). conclusion: f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Extrait de la copie de Hervé R. (en réponse à la question 1)

Ce fait observé est naturellement très lié à la culture du lycée, où la pratique de la dérivation formelle de fonctions usuelles prend, à travers les études *globales* de fonctions, une place tout à fait privilégiée par rapport à d'autres pratiques, notamment liées à l'étude *locale* de la dérivabilité en un point, rarement problématique. Ici, on observe que, par simple habitude, Hervé commence par calculer formellement f '(x) et à appliquer le résultat en 0 et en 1, avant de se rendre compte graphiquement que la fonction n'est pas dérivable aux points d'abscisse entière. Pour autant, il ne reviendra pas sur les valeurs qu'il a obtenues dans un premier temps pour f '(0) et f '(1).

TABLEAU RECAPITULATIF :

	Réponse correcte :	Erreur standard :	Erreur de calcul :	Autres erreurs :	Absence de réponse :
$f_s'(1/2)$	73% (0)	21% (∅)	4%	2%	-
$f_s'(1/4)$	77% (½)	-	15%	2%	6%
$f_s'(0)$	3% (0)	88% (1)	3%	4%	2%
$f'(1/2)$	97% (0)	-	3%	-	-
$f'(1/4)$	95% (½)	-	5%	-	-
$f'(0)$	14% (∅)	86% (1)	-	-	-

Concernant à présent la comparaison demandée en 2°)b) entre nombres dérivés symétriques et nombres dérivés « classiques », elle s'avère naturellement comme non problématique, voire réconfortante, pour une majorité d'étudiants (57%), qui ont trouvé les mêmes valeurs pour <u>tous</u> les $f_s'(x_0)$ et les $f'(x_0)$ pris deux à deux, et correspondent ce faisant à un profil type très répandu. Ce profil type est ainsi défini : *« Avoir trouvé les valeurs correctes de $f_s'(x_0)$ et $f'(x_0)$ pour $x_0 = ½$ et $x_0 = ¼$ et $f_s'(0)=1$, $f'(0) = 1$ »* et correspond au cas où l'étudiant a commis les deux erreurs les plus fréquentes, mentionnées ci-dessus, relatives à l'évaluation de $f_s'(0)$ et $f'(0)$. Notons qu'aucun étudiant n'a effectué correctement les six calculs de nombres dérivés à la fois. Quelques étudiants (8% de l'effectif) tentent de tirer une généralité à partir des résultats (faux, au moins en partie) qu'ils ont obtenu pour les différentes valeurs de nombres dérivés :

c) $f'(\frac{1}{2}) \neq f_s'(\frac{1}{2})$.

$f'(\frac{1}{4}) = f_s'(\frac{1}{4})$.

$f'(0) = f_s'(0)$.

On constate que lorsque la dérivée "classique" s'annule, elle ne permet pas l'existence de la dérivée symétrique.

<u>Extrait de la copie de Sylvain D.</u>

3°) Résultats obtenus à la question 3.

Signalons tout d'abord un fort taux de réponses non argumentées (l'étudiant se contentant de répondre « vrai » ou « faux » sans fournir d'explication), de raisonnements ébauchés mais inachevés, voire incompréhensibles, et d'absence de réponse. Ce taux est de l'ordre de 40% pour les conjectures a et b et de l'ordre de 50% pour la conjecture c.

Comme on pouvait s'y attendre, c'est la conjecture b (ne concernant que le nombre dérivé au sens classique) qui donne lieu au plus grand nombre de réponses correctes (37%). Mais il n'y a que 5% d'étudiants qui la résolvent en donnant comme contre-exemple la fonction f introduite au début de l'énoncé, ce qui n'est guère étonnant compte tenu du taux très élevé (86%) de réponses incorrectes concernant f '(0) en 2°)b). Majoritairement, les étudiants donnent la classique[13] fonction $x \to |x|$ comme contre-exemple (22% de réponses de ce type), quelques uns citent une fonction paire *non définie* en 0, comme $x \to 1/x^2$, ou en évoquent la possibilité (7%), quand d'autres, enfin, dessinent une courbe symétrique par rapport à l'axe vertical avec un point anguleux à l'origine du repère (3%). A l'inverse, parmi les réponses incorrectes données pour la conjecture b, citons celle-ci, assez classique (7% de cas) : *« c'est vrai car une fonction paire est définie donc continue ».*

Il y a 29% de réponses correctes à la conjecture a et seulement 15% à la conjecture c, et naturellement, le fait que 21% des étudiants pensent que $f_s'(0)$ n'existe pas (voir plus haut) ajouté aux autres erreurs commises dans l'évaluation des nombres dérivés en 2°) n'est pas étranger à ce fait. Mais il faut signaler aussi le taux assez élevé (15%) de confusions existant entre l'étude d'un exemple (présenté en 1°) et 2°)) et l'étude d'une conjecture générale, cette confusion intervenant tout particulièrement pour cette conjecture c mais aussi, à un degré moindre, pour les conjectures a et b. Le fait que 57% d'étudiants estiment qu'il y a, pour la fonction présentée en début d'exercice et les trois valeurs ½, ¼, 0 données de x_0, égalité du nombre dérivé symétrique et du nombre dérivé classique, favorise l'amalgame, ou au mieux la généralisation abusive pour l'étude de la conjecture c. On constate bien ici les effets liés à la nouveauté de l'exercice par rapport aux activités typiques du lycée. Parmi les tentatives de démonstration d'égalité du nombre dérivé « classique » et du nombre dérivé symétrique, il y a bien sûr l'assimilation naturelle des termes en présence dans l'expression de ces nombres dérivés pour h tendant vers 0 :

c) Si une fonction f est dérivable en x_0, alors ~~cela veut dire~~ elle admet une dérivée symétrique en x_0, et $f'_s(x_0) = f'(x_0)$.

Si f est dérivable au point x_0 ; ~~alors la~~
La différence entre $x_0 + h$ et $x_0 - h$ est très petite quand h tend vers 0, donc entre $f(x_0+h)$ et $f(x_0-h)$ aussi, donc $f(x_0+h) - f(x_0-h)$ a une valeur proche de $f(x_0+h) - f(x_0)$, et h tendant vers 0, la limite ~~en~~ de $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ et $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est la même : $f'_s(x_0) = f'(x_0)$

Extrait de la copie de Christophe C.

[13] C'est l'un des deux cas « standards » de fonction non dérivable en 0 (avec celui de la fonction « racine carrée ») régulièrement évoqués dans le cours de terminale.

	Réponse correcte :	Réponse incorrecte :	Réponse absente, non justifiée, incomplète, ou incompréhensible
Conjecture a	29%	34%	37%
Conjecture b	37%	23%	40%
Conjecture c	15%	36%	49%

E/ PRESENTATION DE L'EXERCICE 3.

1°) Objectif visé. Intentions du concepteur.

A travers les réponses données par les étudiants dans l'exercice 2, on a pu constater que l'utilisation du cadre graphique, même implicitement sollicitée, en vue d'étudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction ou d'évaluer des nombres dérivés plus aisément, reste très minoritaire. Et l'on a vu que, de surcroît, ce cadre n'est pas davantage utilisé comme moyen de contrôle des résultats obtenus par le calcul que comme moyen de justification principal.

L'exercice 3 doit maintenant nous permettre d'analyser par comparaison le comportement des étudiants lorsqu'un travail initial dans ce cadre graphique est *explicitement* demandé et absolument *incontournable* : en l'occurrence, il s'agit ici de juger notamment de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction à la seule vue de sa représentation graphique fournie par la calculatrice TI92. Dans un second temps, on donne l'expression f(x) de la fonction en question et c'est donc la question de la *cohérence* entre les résultats issus du travail dans le cadre algébrique et ceux obtenus antérieurement dans le cadre graphique qui est posée. Cependant, le problème se complique ici du fait que la courbe représentative donnée par la calculatrice graphique, compte tenu d'un phénomène assez classique, lié à la discrétisation du tracé, ne rejoint pas l'axe horizontal comme elle devrait rigoureusement le faire. D'éventuels conflits peuvent en découler pour l'étudiant qui n'a pas, en général, une bonne compréhension des principes de fonctionnement de sa calculatrice et de ses limites. Quel sera alors son comportement face à ce qu'il peut percevoir comme des contradictions entre les conclusions issues de son interprétation graphique et celles issues de ses calculs ? C'est ce que nous voulons observer, mais nous faisons ici l'hypothèse que l'étudiant risque d'interpréter ces contradictions comme le fruit de simples incertitudes de lecture du graphique au lieu de porter un regard critique sur ce qu'affiche l'écran de la calculatrice.

Nous fondons cette hypothèse en particulier sur certains résultats[1] des travaux de L.Trouche relatifs à l'utilisation de la calculatrice. Il observe la priorité fréquente donnée au graphique et les attitudes conciliatrices de certains élèves de lycée face à un conflit entre les résultats issus du cours et la courbe affichée à l'écran, notamment dans deux situations d'exercices typiques. La première consiste en l'évaluation de la limite en zéro de $f(x) = (x-\sin(x))/x^3$ par une activité constituée d'une recherche expérimentale et d'une recherche théorique au moyen d'une stratégie d'encadrement. Citons L.Trouche :

[1] Voir les deux articles parus dans « Repères Irem » n°14 et n°24, respectivement intitulés : « Calculatrices graphiques, la grande illusion » (1994, p.39-p.55) et « Masques » (1996, p.43-p.64).

> « Un expert constaterait que la machine donne une idée du bon résultat (c'est-à-dire 1/6) quand on ne se « rapproche pas trop de zéro », et qu'ensuite, les procédures de calcul approché donnent des errements frénétiques. » [ibid.]

Les élèves en sont, quant à eux, assez perturbés, ce qui peut influencer de façon négative leurs conceptions en formation relatives aux notions de limite et de voisinage d'un point, comme en témoigne cette réflexion d'un élève de $1^{ère}$ S :

> « La limite de la fonction en zéro est 1/6, c'est-à-dire que quand x se rapproche de 0 aussi près que possible (*c'est-à-dire en gardant une marge de sécurité suffisante*), f(x) se rapproche de 1/6.»[ibid.]

La seconde activité à laquelle nous nous référons ici a trait à la recherche des limites à l'infini d'un polynôme et de ses valeurs d'annulation. Le polynôme a été choisi de façon à ce que l'on ne puisse pas percevoir l'ensemble de ses variations au moyen d'un seul affichage à l'écran. Ainsi faut il aller chercher assez loin dans les valeurs positives pour observer par un fenêtrage approprié la remontée de la courbe, faute de quoi on a l'impression que la fonction polynôme (dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif) tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Face à cette situation certains élèves n'hésitent pas à modifier le résultat théorique issu du cours pour qu'il corresponde à ce qu'ils perçoivent sur l'écran avec un premier affichage.

2°) Analyse a priori de la première question.

Nous voulons voir précisément quelle proportion du public concerné est capable de donner une interprétation graphique acceptable de la continuité et de la dérivabilité en un point, chose que nous ne pouvions juger à travers les réponses fournies aux exercices précédents, compte tenu d'une trop faible utilisation du cadre graphique dans ces exercices.

La question se pose ainsi de savoir quelles déformations éventuelles ont pu subir les interprétations données au lycée : par exemple, une fonction dérivable en un point sera-t-elle assimilée à une fonction dont la courbe représentative possède une tangente en ce point ? L'interprétation graphique de la continuité, qui est donnée en terminale, est simple, mais demeure finalement assez peu utilisée au lycée, n'ayant probablement pas, écologiquement parlant, comme tout ce qui touche à la continuité, l'espace nécessaire pour vraiment vivre au sein de cet environnement du lycée ; les étudiants auront ils gardé un souvenir précis de cette interprétation ?

Concernant la dérivabilité de la fonction en 1 et en 3, nous avons précisé qu'il s'agissait de dérivabilité *à droite* <u>en</u> 1 et *à gauche* <u>en</u> 3 : cela aidera-t-il vraiment les étudiants, et n'y a-t-il pas pour eux un risque de confusion avec la dérivabilité à droite <u>de</u> 1 et à gauche <u>de</u> 3, autrement dit avec la dérivabilité sur]1,3[? Toujours est-il qu'il nous a paru nécessaire de bien mettre en relief le problème aux extrémités de l'intervalle de définition, afin qu'il soit exprimé correctement et explicitement posé à l'étudiant pour que le conflit éventuel avec les résultats issus du calcul puissent surgir. Il s'agit aussi, là encore, de placer l'étudiant dans les circonstances les plus favorables à la résolution du problème posé, en mettant le doigt sur les écueils existants, pour pouvoir observer comment cet étudiant va traiter ces difficultés particulières qu'il aurait pu ignorer autrement.

On peut penser que certains étudiants diront que f est dérivable à droite en 1 et à gauche en 3, ce que l'on ne peut considérer comme incorrect, à condition toutefois que ces étudiants justifient qualitativement leur affirmation ou donnent des valeurs plausibles pour les nombres dérivés, c'est-à-dire supérieures en valeur absolue à 1, positive pour celle prise à droite en 1 et négative pour celle prise à gauche en 3. Mais sans doute y aura-t-il aussi certains étudiants pour avoir l'intuition du fait que la courbe représente un demi-cercle avec des demi tangentes verticales aux extrémités, ce qui correspond à une fonction non dérivable en ces points.

3°) Analyse a priori de la deuxième question.

Cette deuxième question, en partie redondante avec la première, nous permettra cependant de voir s'il y a une difficulté particulière à envisager l'existence de minima en des points où la courbe ne change pas de sens de variation. Nous pensons en effet que le maximum sera plus aisément identifié (avec la pente correspondante), car il rentre bien dans le cadre du théorème de terminale sur l'existence d'un extremum en tout point où la dérivée de la fonction s'annule et change de signe, ce qui n'est pas le cas des deux minima.

Un autre objectif est évidemment de rendre possible le conflit ultérieur éventuel avec les résultats issus du calcul, non pas seulement du point de vue des pentes aux extrémités, mais aussi vis à vis des coordonnées de ces extrémités. Nous précisons aux étudiants que ces coordonnées peuvent être approximatives : cela facilitera-t-il, comme nous le souhaitons, une démarche plus critique de leur part au moment de la confrontation avec les valeurs calculées ?

4°) Analyse a priori de la troisième question.

Il convient tout d'abord de remarquer qu'il est fort possible qu'un certain nombre d'étudiants n'aient pu disposer du temps suffisant à l'accomplissement de ce dernier exercice, et donc en particulier à la réalisation de cette dernière question. Par ailleurs, cette question 3 suppose de reprendre scrupuleusement, point par point, tout ce qui a été effectué précédemment, et constitue le nœud de l'exercice, mais du point de vue de l'étudiant elle peut sans doute passer pour une simple vérification de principe et être alors traitée par lui un peu à la légère.

Ici, un travail (qui lui est assez familier) dans le cadre algébrique semble s'imposer, puisque l'on donne l'expression analytique de la fonction, mais on peut toujours imaginer, notamment s'il dispose d'une calculatrice graphique autre que la TI 92, qu'il demande différents affichages à l'écran de la courbe et qu'il travaille par comparaison avec ce qu'il a annoncé précédemment à partir de la représentation graphique donnée par l'énoncé. Ce ne serait, du reste, pas une mauvaise idée, mais nous faisons l'hypothèse que ce type de comportement, assez peu institutionnalisé au lycée, où l'usage de la calculatrice dans la plupart des contextes d'exercices demeure du domaine privé de l'élève, sera certainement très minoritaire.

Remarquons à présent que la vérification des résultats obtenus au 1°) et celle des résultats du 2°) ne s'inscrivent pas du tout dans la même « logique » (et ce, en particulier du point de vue de l'étudiant), bien qu'il y ait un problème qui soit commun à 1°) et 2°) : celui de la dérivabilité de f en 1^+ et 3^- (mais précisément, ce problème est évoqué en termes de *dérivabilité* en question 1 et en termes graphiques de *pentes de tangentes* en question 2). La mise à l'épreuve des réponses données en question 1 consiste à appliquer les théorèmes généraux de continuité et de dérivabilité et la définition par limite du taux d'accroissement du nombre dérivé à droite en 1 et à gauche en 3, tandis que l'idée de minima et de maxima renvoie plutôt à celle d'étude d'une fonction avec tableau de variations à la clef , donc la vérification des résultats de la question 2 appelle l'étudiant à dériver formellement l'expression de f pour en obtenir les variations par étude du signe de f '.

Nous verrons s'il y a effectivement une gestion bien séparée de ces questions, avec d'un côté, pour l'étude de la dérivabilité en 1^+ et 3^-, recours au calcul de la limite du taux d'accroissement, et de l'autre, pour l'étude des pentes aux minima, évaluation de la limite en 1^+ et 3^- de la dérivée de f. Il est cependant probable, que bon nombre d'étudiants grouperont leur travail, dans cette question 3, en utilisant uniquement cette seconde voie, moins délicate techniquement que la précédente. Pour ceux qui auront choisi d'évaluer la limite des deux taux d'accroissement, en 1^+ et 3^-, on peut prévoir certaines difficultés s'ils oublient de factoriser le trinôme qui est sous le radical de l'expression de f(x).

Nous pensons en revanche que la détermination des coordonnées du maximum de la fonction et de la pente de la courbe en ce point ne sera pas problématique pour ceux qui l'auront tentée, car elle résulte d'une simple étude des variations de f (il n'y a pas besoin de mettre en œuvre la définition du nombre dérivé pour obtenir le résultat : f '(2) = 0). Ce n'est pas le cas des minima et on peut se demander si certains étudiants n'auront pas une répugnance à considérer comme minima des points en lesquels la dérivée ne s'annule pas (en lesquels cette dérivée n'est même pas définie !). Même si certains ouvrages de lycée présentent parfois des extrema en des points d'arrêt ou de non dérivabilité de la courbe, il y a une certaine prégnance, dans l'enseignement du lycée, du théorème fournissant une condition *suffisante* d'existence d'un extremum pour une fonction *dérivable* sur un intervalle, et l'on craint ici les conséquences d'une éventuelle confusion avec une condition *nécessaire* d'existence d'un extremum.

Nous pensons enfin, que peu d'étudiants auront utilisé leur calculatrice pour l'un ou l'autre des trois exercices de ce test de septembre 1996, dans la mesure où les courbes représentatives des fonctions étudiées sont déjà données dans deux exercices sur trois, et alors que dans l'exercice 1, la présence de paramètres rend assez peu naturel pour eux le recours à la calculatrice.

F/ ANALYSE DES REPONSES FOURNIES A L'EXERCICE 3.

1°) Résultats d'ensemble relatifs à la participation à l'exercice.

On constate que 93% des étudiants présents ont abordé cet exercice situé en fin de test, fournissant cependant de moins en moins de réponses complètes au fur et à mesure des questions, et en particulier à la question 3. Ce comportement était attendu de notre part (voir l'analyse a priori). Ainsi, les trois parties de la question 1 sont traitées par tous ces étudiants, même si certains d'entre eux ne font pas de distinction entre l'étude de la dérivabilité sur]1,3[et son étude à droite en 1 et à gauche en 3 (voir plus loin l'analyse des résultats).

Pour ce qui est de la question 2, il y a un assez fort taux d'abstention concernant les réponses relatives aux pentes de la courbe représentative de f, et surtout aux points constituant des minima (32% de non réponses contre 20% pour le maximum), alors que le taux d'abstention n'est que de quelques pour-cent pour les coordonnées de ces points. Difficile de savoir ici si c'est parce que les étudiants estiment que l'évaluation des pentes est beaucoup plus incertaine que celle des coordonnées des points, compte tenu des imprécisions du tracé (ce qu'expriment tout de même quelques très rares étudiants), ou si c'est parce qu'ils ont du mal à se faire une idée, même grossière, de la valeur de ces pentes. Compte tenu du peu d'analyse critique jalonnant les copies, même lorsqu'elle est sollicitée, comme c'est le cas dans la troisième question, nous penchons ici plutôt pour la seconde éventualité. Cependant, il convient sans doute de nuancer le résultat de 32% d'abstentions concernant l'évaluation des pentes aux points minima, par le fait que certains étudiants ont sans doute estimé avoir déjà répondu à cette question à travers l'étude de la dérivabilité de f en 1^+ et 3^-.

Enfin, on constate dans la troisième question que 25% des étudiants ne donnent aucune réponse concernant la continuité, 29%, aucune réponse concernant la dérivabilité sur]1,3[, et 36%, aucune réponse concernant la dérivabilité en 1^+ et 3^-. La vérification, par le calcul, des extrema, avec leurs pentes respectives, n'est pas du tout effectuée dans 54% des copies ayant abordé l'exercice 3, réalisée partiellement dans 39% des cas, en totalité dans 7% des cas seulement.

Taux de réalisation des tâches relatifs aux étudiants ayant abordé l'exercice 3 :

	Continuité	Dériv.en 1^+et 3^-	Dériv. sur]1,3[
Question 1/	100%	100%	100%
Question 3/	75%	64%	71%

	Maximum	Minima
Quest 2/ coordonnées	95%	97%
Quest 2/ pentes	80%	68%
Quest 3/ vérif. coord.	22%	32%
Quest 3/ vérif. pentes	14%	11%

2°) Résultats obtenus à la question 1.

Une certaine variété s'exprime ici au niveau des justifications fournies, cette variété concernant aussi bien les réponses apportées au problème de la continuité de f sur [1,3], qu'à celles concernant la dérivabilité de f sur]1,3[et aux bornes de cet intervalle. Une majorité d'étudiants (61%), parmi ceux ayant abordé cet exercice, estiment que la fonction correspondant au graphe fourni est continue sur [1,3], mais seulement 34% du public donnent à cette réponse une justification qui soit acceptable et non tautologique[2], la plupart évoquant l'absence de « saut » ou arguant (plus rarement) du fait qu'il s'agit en réalité de la représentation graphique d'un demi-cercle.

1), sur [1, 3] la fonction est continue
car on peut la tracer sens lever

[2] Quelques étudiants affirment que la fonction est continue sur [1,3] « parce que la courbe ne présente pas de discontinuité ». Peut-être se font ils des discontinuités une idée conforme à celle qui est suggérée en terminale, mais il y a suffisamment de malentendus sur ce terme (voir ci-dessous, dans d'autres copies) pour que nous nous risquions à une interprétation de cette réponse.

le stylo

Extrait de la copie de Leslie A.

• la fonction me semble continue
en effet on peut parcourir la courbe
entière sans faire de "saut"
la courbe est constitué d'une seule ligne

Extrait de la copie de Matthieu H.

Parmi les justifications incorrectes de la continuité (27% des réponses sur l'ensemble de l'effectif), la plus fréquente (18 de ces 27%) tient dans la confusion (diversement exprimée) commise entre « fonction continue » et « fonction définie », qui semble se répercuter au niveau graphique dans l'amalgame entre « courbe sans sauts » et « courbe sans trous » :

1). La fonction semble être continue sur l'intervalle
[1 ; 3] car le graphique ne présente aucun "trou",
c'est à dire que pour toute valeur de $x \in [1 ; 3]$,
la fonction existe.

Extrait de la copie d'Alexandra A.

Certains étudiants affirment quant à eux qu'il y a continuité, sans donner de justifications (4%), alors que d'autres utilisent des termes ambigus (le mot « cassure » par exemple), susceptibles d'évoquer autant la dérivabilité que la continuité[3], lorsqu'ils ne confondent pas explicitement les interprétations graphiques des deux phénomènes (5%) :

- la fonction apparaît continue sur [1,3] car il n'y a pas
de coupure et aucun angle.

Manfred D.

Il y a tout de même 39% des étudiants qui estiment que la fonction représentée n'est pas continue sur [1,3], ce qui tient essentiellement à ce que la courbe affichée par l'écran de la calculatrice leur apparaît comme « inachevée ». Une majorité d'entre eux (25% du public concerné) sont suffisamment précis dans leur argumentation et affirment que c'est parce que

[3] On a ici une confirmation d'un résultat déjà observé dans notre mémoire de D.E.A sur l'analyse d'un discours méta et de ses effets sur l'apprentissage en début de DEUG A [ibid.].

cette fonction ne leur semble pas *définie* en 1 et 3, voire même au voisinage de ces points, qu'ils la considèrent comme non *continue* ; a priori, il n'y a pas, cette fois, d'amalgame abusif entre les deux notions, mais la propriété « être définie » est envisagée (à juste titre) comme condition *nécessaire* de continuité.

1°/ – La fonction ne me semble pas continue en 1 et en 3. Car pour $x = 1$ et $x = 3$ $f(1)$ et $f(3)$ ne semble pas exister.

Laetitia L.

Cependant, la plupart des autres étudiants (11% du public) ont fourni des réponses trop vagues pour pouvoir être interprétées avec certitude de la même façon. A travers ces réponses, on voit en effet qu'il semble que ce soit l'interruption « brutale » du tracé (avec d'ailleurs des points d'arrêt non clairement définis) qui constitue ici la seule cause de l'affirmation de la non continuité de f. Un des résultats de notre mémoire de D.E.A abonde du reste dans le sens de cette interprétation : graphiquement, la continuité d'une fonction est jugée par les étudiants de façon globale, et non relativisée (à un point, un intervalle) de sorte qu'une fonction définie et continue sur un intervalle borné peut être perçue comme non continue (sous-entendu « sur R »), puisque sa courbe représentative est en quelque sorte « coupée » aux extrémités.

* La fonction ne semble pas être continue sur l'intervalle [1,3] puisque l'on remarque des "trous" qui la rende discontinue pour $x = 1$ et $x = 3$.

Extrait de la copie de Régis C.

Il est probable, cependant, que si la courbe avait atteint l'axe horizontal, la réponse de ces étudiants aurait différé, puisque l'impression visuelle n'aurait pas du tout été la même.

1° . le tracé n'est pas complet apparemment : elle ne semble donc pas continue.

Extrait de la copie de Claire L.

Signalons enfin que pour 3% des étudiants la courbe n'est même pas perçue comme continue entre les points d'abscisses 1 et 3 ; c'est là encore un effet lié à la discrétisation du tracé qui en est la cause.

- La fonction ne semble pas continue sur l'intervalle [1;3] car il y a des coupures.

Extrait de la copie de Pascal C.

Tableau récapitulatif des réponses sur la continuité (question 1) :

	f est continue sur [1,3] : 61%	f n'est pas continue sur [1,3] : 39%
Justification correcte	« il n'y a pas de saut » : 34%	« f n'est pas définie en 1 et 3 » : 25%
Erreur type	« f est continue car définie » : 18%	« la courbe s'arrête en 1 et 3 » : 11%
Autres	Ambiguïtés de langage : 5%	« Il y a des coupures sur [1,3] » : 3%
Pas de justification ou tautologie	4%	–

Concernant à présent l'étude de la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en 3, on constate que les réponses sont très diversifiées. Une proportion respectable d'étudiants (62%), raisonne en termes de tangentes. Dans 45% des copies, ils le font en concluant à la non dérivabilité de la fonction en 1^+ et 3^-, en général en diagnostiquant la présence de (demi) tangentes verticales en ces points, (anticipant ainsi sur la suite de l'exercice).

- La courbe semble admettre aux points d'abscisse 1 et 3 des demi-tangentes verticales donc la fonction ne semble pas dérivable à droite en 1 et à gauche en 3.

Extrait de la copie d'Odile I.

Un étudiant estime qu'*il n'y a pas dérivabilité* en 1^+ et 3^- car il lui est *impossible de distinguer de tangentes en ces points*. Mais à travers sa réponse, il ne dit pas explicitement s'il considère que cette impossibilité découle des imprécisions du tracé (mise en cause, alors, des limites de la calculatrice), ou s'il pense que la fonction, dont le tracé est donné, peut être *seule* responsable de cet état de chose.

Elle ne me paraît ni dérivable en 1 ni en 3.
D'après le tracé de la courbe, il m'est impossible de voi des

tangentes à la courbe aux points d'abscisses 1 et 3.

Extrait de la copie de Jérôme J.

Les autres (17% de l'effectif) insistent sur la possibilité de tracer des tangentes en 1^+ et 3^- pour conclure à la dérivabilité de f en ces points, seulement 3% précisant en outre qu'il s'agit de tangentes « non verticales ».

- la fonction semble dérivable à droite en 1 et à gauche en 3 puisqu'il semble possible de tracer des tangentes à ces points qui sont les extrémités de la courbe.

Extrait de la copie de Claire C.

oui a priori les tangentes en 1 et 3 ne semblent pas verticales aux quelles cas elles ne serait pas dérivable

Extrait de la copie de Dejan S.

Parmi les 38% d'étudiants qui n'interprètent pas le problème en termes de tangentes, il y en a d'abord quelques uns (4% de la population) qui, n'ayant pas diagnostiqué l'existence et / ou la continuité plus haut (en 1 et 3), disent directement que la fonction n'est pas dérivable à droite en 1 et à gauche en 3. Inversement, 14% des étudiants affirment que la fonction est dérivable en 1^+ et 3^- parce qu'elle est définie (respectivement continue), commettant ainsi un type d'erreur déjà repéré plus haut, et dans les deux autres exercices de ce test.

- La fonction semble être dérivable à droite en 1 et à gauche en 3 car elle est continue et définie en ces points.

Extrait de la copie de Frédérique D.

On relève aussi que 12% des étudiants confondent « à droite <u>en</u> 1 » et « à droite <u>de</u> 1 », et répondent alors que la fonction f est dérivable en 1^+ et 3^-. Nous avions prévu ce phénomène dans notre analyse a priori. Enfin, 5% des étudiants n'ont pas répondu à la question posée ou y ont répondu sans donner de justification, et 3% fournissent des réponses difficiles à interpréter, voire à comprendre.

Dérivabilité en 1^+et 3^- (rép. à la question 1)	Argumentation en termes de tangente :	Autres types d'argumentation :
Réponse correcte, avec dérivabilité :	Existence tangente (non verticale) en ces points : 17%	–
Réponse correcte sans dérivabilité :	(demi) tangentes verticales en ces points : 45%	f non dérivable en 1^+, 3^- car non définie en 1 et 3 : 4%
Erreur type :	Confusion entre « à droite *en* » et « à droite *de* » : 12%	F dérivable en 1^+, 3^- car définie, continue en 1 et 3 : 14%
Réponse absente :	8%	-

L'étude de la dérivabilité sur]1,3[donne lieu à un échantillon de réponses plus homogène, 89% des étudiants estimant que la fonction est dérivable sur]1,3[. Cependant, il n'y a que 43% des étudiants qui l'affirment par un argument qui soit à peu près acceptable, du type « *on peut tracer la tangente en tout point* ». Ceux là insistent en général sur l'absence de points anguleux et ne mentionnent que très rarement le fait que cette tangente est non verticale.

- la fonction f a l'air dérivable sur]1;3[
car sur cet intervalle la courbe ~~elle~~ a une forme arrondie,
et il n'y a pas de "cassure" (brisure) dans la courbe (/\ )
Le coefficient directeur de la courbe ne change pas
brutalement de signe autour d'un point donc f
est dérivable sur]1;3[

Extrait de la copie de Christophe C.

Il y a 11% des étudiants qui affirment la dérivabilité de f sur]1,3[sans la justifier, et 35% d'entre eux qui donnent des arguments vagues ou franchement incorrects (par exemple : « *f est dérivable car on reconnaît une parabole* », ou encore le classique : « *f est dérivable sur]1,3[car définie sur]1,3[* »), mais aussi, bien souvent, caractéristiques de l'environnement de fonctions rencontré au lycée.

les problèmes de derivabilité surviennent en
générale sur les bornes de définition
la fonction est continu, cette fonction assez

simple est derivable sur]1 ; 3[.

Extrait de la copie de Faroudja B. : argument révélateur de la culture du lycée.

– Sur cette représentation graphique rien ne contredit le fait que la fonction soit dérivable sur]1 ; 3[.

Extrait de la copie de Claire M. : argument trop vague.

– f étant strictement croissante sur]1 ; 2] et strictement décroissante sur [2 ; 3[, alors f est dérivable sur]1 ; 3[

Extrait de la copie de Laetitia L. : argument incorrect.

Dérivabilité sur]1,3[: rép. à 1°)	Argument (presque) correct :	Argument trop vague :	Argument incorrect :	Absence d'argument	Totaux :
Dérivabilité « oui »	43%	22%	13%	11%	89%
Dérivabilité « non »	6%	3%	–	2%	11%

3°) Résultats obtenus à la question 2.

Comme prévu, les coordonnées du maximum sont plus aisément identifiées graphiquement par les étudiants que celles des minima, et cela se vérifie encore davantage en ce qui concerne les pentes de la courbe en ces points. Ainsi, 72% de l'effectif (relatif aux étudiants ayant abordé l'exercice 3) perçoit un maximum de coordonnées (2,1) sur la courbe et, *conjointement*, une pente nulle en ce point (ou une tangente horizontale). La situation ici rencontrée est habituelle au lycée vu les nombreuses études de variations de fonctions qui y sont effectuées. Les autres étudiants présentent des coordonnées à peu près plausibles dans 14% des cas (notamment : (2 ;1,2) et (2 ;0,8)), improbables dans 9% des cas (on voit apparaître (2 ;1,5) par exemple), seulement 5% des étudiants s'abstenant de donner les coordonnées du maximum. L'abstention, relative à ces trois groupes minoritaires, est plus élevée (20%) s'agissant de l'évaluation de la pente au maximum, certains étudiants (8% de l'effectif) donnant cependant une valeur de pente plausible (par exemple 0,2) ou attendue (0). Par comparaison, il y a tout de même une légère majorité d'étudiants (53%) qui donnent aux minima les coordonnées (1,0) et (3,0), alors que l'on voit très nettement sur le graphique que la courbe n'atteint pas l'axe horizontal (c'est l'effet « attractif » des valeurs entières). D'autre part, 38% des étudiants de cette population présentent des coordonnées plausibles ((1 ; 0,2) et (3 ; 0,2) par exemple[4]), 6%, des coordonnées improbables, et 3% s'abstiennent de répondre.

Pour ce qui est des pentes en ces points, un fort taux (32%) d'abstention (sans doute lié au fait que certains étudiants, qui avaient déjà diagnostiqué la non dérivabilité de f en 1^+ et 3^- en question 1, avec des (demi) tangentes verticales, n'ont pas éprouvé le besoin de se répéter) fait que seulement 36% des étudiants indiquent la présence de pentes infinies, alors que 45% le faisaient en question 1. Assez peu d'étudiants (6%) proposent d'autres pentes plausibles en 1 et 3. Les autres (26% de l'effectif) donnent des valeurs improbables (par exemple 1 ou ½), éventuellement affectées d'un signe « moins » pour la pente en 3^-, voire, pour certains étudiants, effectuent même un calcul d'accroissement global entre minimum et maximum pour répondre au problème posé :

2) le maxima semble être en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

les minima en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0,3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

au niveau du maxima on a une tangente horizontale. La pente est égale à 0.

au niveau des minima :

$$\tan \alpha = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{2-1}{1-0,3} = \frac{1}{0,7}.$$

$$\tan \alpha = 1,4.$$

on a les deux même tangente du coté de $x = 1$ et $x = 3$

Extrait de la copie de Faroudja B.

Tableaux récapitulatifs des résultats obtenus à la question 2 :

Maximum	Résultat conforme au calcul ultérieur	Valeur plausible	Valeur improbable	Absence de valeur
Coordonnées	72%	14%	9%	5%
Pentes	72%	8%	-	20%

[4] En général, ils donnent 1 et 3 comme abscisses des minima, mais quelques étudiants donnent des abscisses proches de 1 et 3 : 1,05 et 2,95 par exemple, ce qui est en contradiction manifeste avec l'énoncé (qui présente la fonction comme définie sur [1,3]) vu que ces minima se situent aux « extrémités » de la courbe.

Minima	Résultat conforme au calcul ultérieur	Valeur plausible	Valeur improbable	Absence de valeur
Coordonnées	53%	38%	6%	3%
Pentes	36%	6%	26%	32%

4°) Résultats obtenus à la question 3.

a) <u>Etude de la continuité</u>.

On relève que 71% des étudiants considèrent la fonction f comme continue sur [1,3] au vu de son expression analytique, 4% estimant le contraire et 25% s'abstenant de répondre à cette question. Ces résultats sont à mettre en parallèle avec ceux concernant l'observation graphique sollicitée en question 1 (61% de réponses affirmatives pour la continuité, mais 39% de réponses opposées et pas d'abstention).

Ceux qui avaient répondu *« f est continue sur [1,3] »* en question 1 confirment presque tous en question 3 cette réponse. On constate ainsi qu'un certain nombre d'étudiants qui avaient perçu la fonction f comme « non continue sur [1,3] » lors de la question 1 alimentent très majoritairement l'abstention relevée en question 3, comme s'ils préféraient ne pas prendre parti sur une contradiction qu'ils auraient relevée entre l'observation graphique et la conclusion tirée de l'observation de l'expression analytique de f. Ce faisant, ils donnent (malgré eux ?) leur préférence à la seule réponse donnée, issue de l'interprétation graphique et effectuée en question 1.

On constate aussi que les deux tiers des étudiants qui changent d'opinion en question 3 sur le problème de la continuité en font la remarque, mais rares sont ceux qui, comme Christophe D., effectuent une critique de cette situation :

3) • $f(1) = \sqrt{-1+4-3} = \sqrt{0} = 0$

$f(3) = \sqrt{-9+12-3} = 0$

donc f est continue sur [1;3]

la fonction ne semblait pas continue sur le graphe car la résolution de l'écran de la calculatrice est trop faible pour tracer convenablement le graphe.

<u>Extrait de la copie de Christophe D.</u>

Et bien sûr, ces étudiants ne remettent pas toujours en cause leur jugement initial pour de « bonnes » raisons, comme Claire L., dont nous avons présenté plus haut la réponse fournie en question 1 au problème de la continuité, et qui commet l'amalgame classique fonction « définie » / fonction « continue »[5] :

3°). $f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}$

Or, 1 et 3 sont solutions de $0=-x^2+4x-3$

donc $D_f = [1,3]$ et donc f est continue

sur $[1;3]$ même si le graphe ne le montre

Extrait de la copie de Claire L.

Du point de vue des arguments invoqués, les 71% d'étudiants qui affirment que f est continue dans cette question 3 se répartissent de la façon suivante :

- 16% citent des théorèmes généraux (avec plus ou moins de précision, certains n'évoquant que la continuité du trinôme situé sous le radical, d'autres, que la continuité de la fonction « racine carrée »),
- 16% focalisent leur attention sur la continuité en 1 et 3 et constatent, comme Christophe D. ci-dessus, que l'on a : f(1) = f(3) = 0 et, *éventuellement*[6], que les limites en 1 et 3 valent aussi 0,
- 8% traitent ces deux problèmes,
- 10% donnent explicitement un argument incorrect du type *« f est définie donc continue sur [1,3] »* (corrélativement, ils focalisent alors leur travail sur l'étude du signe du trinôme sur [1,3]),
- 8% donnent un argument correct du type *« f est dérivable donc continue sur [1,3] »* (la plupart ne justifiant cependant pas la dérivabilité de la fonction f ou présentant directement l'expression de f '(x) en guise de justification),
- 13%, enfin, ne donnent aucune justification.

Certaines réponses montrent bien ici les raisons de l'amalgame si fréquent entre fonction « définie » et fonction « continue », raisons liées au champ de fonctions rencontrées le plus fréquemment au lycée :

La fonction racine est une fonction continue lorsqu'elle existe.

Extrait de la copie de Suzana A.

[5] Chez Christophe D, qui se contente de calculer f(1) et f(3) avant de conclure à la continuité de la fonction f, cet amalgame est également probable, même s'il n'est pas aussi explicite.

[6] « *Eventuellement* », parce que certains étudiants, comme on l'a vu *explicitement* mentionné par ailleurs, estiment (même si c'est ici seulement *implicite*) qu'une fonction définie en un point est continue en ce point.

$3)\quad f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}$.

$-x^2+4-3$ est une fonction polynome donc continu sur $\mathbb{R}$. puisque défini.

$\sqrt{-x^2+4x-3}$ doit être positif.

Extrait de la copie de Faroudja B.

Enfin, les quelques étudiants qui affirment que « f n'est pas continue sur [1,3] » le font parce qu'ils estiment qu'une fonction définie par un radical n'est pas continue en ses valeurs d'annulation (confusion avec la non dérivabilité d'une telle fonction en ces points).

Voici un tableau récapitulatif des réponses fournies dans la troisième question, qui sont relatives au problème de la continuité de f et, pour comparaison, des réponses apportées parallèlement par les étudiants, à ce même problème, dans la première question :

Continuité / comparer rép. Q1-Q3 :	Question 1 : « f continue sur [1,3] »	Question 1 : « f n'est pas continue »	Question 1 : pas de réponse	Question 1 : Totaux
Question 3 : « f continue sur [1,3] »	59%	12%	_	71%
Question 3 : « f n'est pas continue »	_	4%	_	4%
Question 3 : pas de réponse	2%	23%	_	25%
Question 3 : Totaux	61%	39%	-	100%

b) Etude de la dérivabilité en 1^+ et 3^-.

Une majorité assez nette d'étudiants (60% de la population) estime qu'il n'y a pas dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en 3 (avec une argumentation de qualité et de nature assez variable), le taux d'étudiants n'ayant pas répondu à cette question atteignant ici 36%, tandis qu'on ne trouve que 4% d'étudiants qui affirment que f est dérivable à droite en 1 et à gauche en 3. Les étudiants ayant diagnostiqué la non dérivabilité se répartissent de la façon suivante :

- 24% de l'ensemble de la population d'étudiants tentent de justifier cette affirmation par un calcul de limite du taux d'accroissement en 1 et en 3 (le plus souvent, ils ne précisent pas « en 1^+ et 3^- »),
- 19% le font en calculant la fonction dérivée de f et en constatant qu'elle n'est pas définie en 1 et en 3, ou en effectuant la démarche qualitative attendue (concerne 9

des 19%), c'est-à-dire en se référant à la non dérivabilité de la fonction « racine carrée » en zéro (voir ci-dessous),
- 14% des étudiants affirment la non dérivabilité sans argumenter leur réponse,
- 3% présentent des argumentations inachevées (suite, par exemple, à une erreur de calcul grossière) ou peu compréhensibles et interprétables.

3°) Je calcule $f'(x)$: $f'(x) = \dfrac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x-3}} = \dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

Je calcule $f'(1)$ et $f'(3)$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{-1+4-3}} = \dfrac{1}{0} = \emptyset \\ f'(3) = \dfrac{-1}{\sqrt{-9+12-3}} = \dfrac{-1}{0} = \emptyset \end{array}\right\} \text{ } f'(x) \text{ n'est pas dérivable aux points d'abscisses 1 et 3}$$

Extrait de la copie de Johan J. : argumentation du type « f ' n'est pas définie en 1 et 3 ».

– f n'est pas dérivable sur [1 ; 3] car pour $U = 0$ la fonction $\sqrt{U}$ n'est pas dérivable ; or $-x^2+4x-3$ s'annule pour 1 et 3 donc la fonction n'est pas dérivable en 1 et 3.

Extrait de la copie de Sandrine T. : utilisation fine de résultats connus sur la dérivabilité des fonctions usuelles (fonction racine carrée, fonction polynôme, composée des deux).

Les étudiants qui tentent un calcul de limite du taux d'accroissement en 1 et en 3 ont, dans l'ensemble, d'importantes difficultés techniques, même si la plupart d'entre eux aboutissent (de façon plus ou moins licite et cohérente) au fait que ces limites sont infinies[7]. Signalons tout d'abord qu'ils utilisent presque tous la définition du nombre dérivé rappelée dans l'exercice 2 (taux exprimé en fonction de x_0 et h). Mais le tiers des étudiants concernés commettent des erreurs dans le calcul de f(1+h) et f(3+h) et, par exemple, trouvent, après réduction de : $-(1+h)^2+4(1+h)-3$ et de : $-(3+h)^2+4(3+h)-3$, un terme constant *non nul*, ce qui leur permet d'obtenir de façon fortuite des limites infinies pour les taux d'accroissement.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{3 - h^2 + 2h}}{h}$$

[7] Il semble qu'ils aient l'intuition de ce résultat, du fait qu'ils savent dériver formellement l'expression de f(x). D'ailleurs, certains étudiants commencent par effectuer ce calcul, parfois le commentent, avant d'évaluer la limite des deux taux d'accroissement et de trouver que ces limites sont infinies.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty$$

f non dérivable en 1

Extrait de la copie de Leslie A.

Un tiers des étudiants réduisent sans erreur les expressions des deux taux d'accroissement et effectuent correctement le calcul de la limite en 1. En 3, pour la plupart d'entre eux, la *simplification* du taux d'accroissement s'avère pleine d'embûches du fait de la présence, après réduction du terme f(3+h), de la quantité ($-h^2$-2h) située *sous une racine carrée*. En effet, ils omettent de constater que h tend ici vers $\underline{0}^-$, donc que l'on doit considérer h comme négatif et $\sqrt{h^2}$ comme égal à –h avant cette simplification. Ce faisant, certains jugent alors la quantité apparaissant sous le radical comme négative et voient dans l'incohérence de la situation une traduction de la non dérivabilité de f en 3.

en 3. $\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \left(f(3+h) - f(3) \right) \right) =$

$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \left(\sqrt{-(3^2+6h+h^2) + 12 + 4h - 3} \right) \right)$

$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \left(\sqrt{\cancel{-9} - 6h - h^2 \cancel{+12} + 4h \cancel{-3}} \right) \right)$

$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \sqrt{-2h - h^2} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \times h \sqrt{-\frac{2}{h} - 1} \right)$

$\lim_{h \to 0^-} \sqrt{-\frac{2}{h} - 1} = \sqrt{-\infty}$ Pas possible.

Extrait de la copie de Sébastien L.

Enfin, un tiers des étudiants éludent ces difficultés techniques (peut-être les ont ils aussi rencontrées en étudiant au brouillon la dérivabilité de f en 1^+ et 3^- ?) et présentent directement le résultat :

$$- \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{-x^2+4x-3} - \sqrt{-1+4-3}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{-x^2+4x-3}}{x-1} = +\infty \neq f'(1)$$

donc f n'est pas dérivable en 1 .

Extrait de la copie Delphine D.

Les quelques étudiants (4% de l'effectif) qui affirment ici que la fonction est dérivable en 1^+ et 3^- le font, soit parce qu'ils confondent encore « dérivabilité à droite (ou à gauche) *en* un point » et « dérivabilité à droite (ou à gauche) *d'*un point », soit parce qu'ils éludent eux aussi les difficultés techniques liées à l'évaluation des nombres dérivés de f en 1^+ et 3^- et leur attribuent directement la valeur 0 puisque le numérateur des taux d'accroissement est nul aux points considérés[8].

Enfin, il est intéressant de confronter ces résultats à ceux obtenus pour l'étude graphique de la dérivabilité de f en 1^+ et 3^- sollicitée en question 1. Rappelons que 43% des réponses (au lieu de 4% ici) penchaient alors pour la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en 3, que 49% (au lieu de 60% à présent) donnaient un avis contraire, et que le taux d'abstention était de 8% (au lieu de 36% ici). On constate ici que les étudiants affirmant en question 1 la dérivabilité en 1^+ et 3^- du fait d'un amalgame entre fonction « définie » (ou « continue ») et fonction « dérivable » s'abstiennent massivement de résoudre le problème en question 3. Ceux qui aboutissaient à la même conclusion par l'observation de pentes obliques en 1^+ et 3^- (argument alors recevable), ou du fait de la confusion entre « à droite en 1 » et « à droite de 1 » se partagent entre l'abstention et une conclusion inverse en question 3.

Dérivabilité en 1^+ et 3^- comparer rép. Q1-Q3 :	Question 1 : « f dérivable en 1^+ et 3^- »	Question 1 : « f n'est pas dérivable en 1^+ et 3^- »	Question 1 : pas de réponse	Question 1 : Totaux
Question 3 : « f dérivable en 1^+ et 3^- »	4%	_	_	4%
Question 3 : « f n'est pas dérivable en 1^+ et 3^- »	11%	47%	2%	60%
Question 3 : pas de réponse	28%	2%	6%	36%
Question 3 : Totaux	43%	49%	8%	100%

c) Etude de la dérivabilité sur]1,3[.

Cette question est largement ignorée par le public d'étudiants concerné, 29% d'entre eux s'abstenant d'y apporter une réponse et 21% affirmant qu'il y a dérivabilité sur]1,3[sans argumenter. On constate donc que lorsque ce type de problème n'est pas explicitement posé (on demande simplement ici de vérifier l'ensemble des réponses apportées aux questions 1 et

[8] Erreur classique déjà rencontrée dans certaines copies (par exemple celle de Delphine D.) lors de l'exercice 1 de ce même test (voir plus haut, à ce propos, l'analyse des réponses données à l'item 1 de cet exercice 1).

2), il passe assez inaperçu aux yeux des étudiants, ce qui est là encore une conséquence de l'environnement de fonctions étudiées au lycée. On retrouve 7% de justifications incorrectes du type *« f est dérivable sur]1,3[, puisque définie sur]1,3[»*, 15% de justifications du type : *« la fonction est dérivable puisque sa dérivée est… »*, et seulement 28% de justifications « expertes » (par évocation de théorèmes généraux de dérivabilité). Comme une large majorité d'étudiants (89% de l'effectif) a répondu à la question 1 que la fonction f est dérivable sur]1,3[, il n'y a pratiquement dans aucune copie, de contradiction entre les réponses apportées aux questions 1 et 3, la plupart des étudiants ayant affirmé en question 1 que f n'est pas dérivable sur]1,3[s'abstenant de reprendre ce problème de la dérivabilité sur]1,3[en question 3.

d) Vérification des réponses données à la question 2.

Dans l'ensemble, les étudiants n'ont pas eu suffisamment de temps pour traiter ce problème, puisque le taux élevé de non réponses, d'abord pour le calcul des coordonnées des extrema (entre 68% et 78% selon le cas), puis davantage encore pour celui des pentes en ces points (entre 86% et 89% selon le cas), ne peut s'expliquer par des difficultés techniques particulières[9]. D'ailleurs, ceux qui ont tenté ces calculs ne présentent généralement pas de réponses incorrectes. L'étude des variations de f, pour la détermination du maximum par exemple, est réussie par tous les étudiants l'ayant tentée.

En revanche, on peut remarquer que la détermination des coordonnées des minima est effectuée en supposant déjà à l'avance que ces minima vont se situer aux points d'abscisses 1 et 3, sans justifier cette affirmation. Il fallait ici, en toute rigueur, remarquer que d'après l'expression fournie pour f(x), la fonction f est positive sur]1,3[, et voir que f(1) = f(3) = 0 pour en déduire alors qu'il y a nécessairement un minimum en 1 et en 3. Les étudiants se contentent de calculer f(1) et f(3) et de constater, le cas échéant, que les valeurs approchées qu'ils avaient données en question 1 n'étaient pas très éloignées de la valeur 0 trouvée par le calcul. Certains font de même pour le maximum (calcul de f(2) après avoir supposé l'existence d'un maximum en 2).

Ainsi, la fonction de « vérification » de cette troisième partie de l'exercice 3 n'est pas toujours bien respectée par les étudiants qui, devant « l'évidence » de la situation, ne peuvent faire totalement abstraction des observations qu'ils ont effectuées antérieurement en question 1. Les quelques étudiants ayant effectué les calculs relatifs aux extrema ne font ni bilan sur l'exercice, ni, en général, de critique (mises à part quelques remarques du style : *« on retrouve bien* (respectivement *« presque »*) *les résultats obtenus grâce à l'interprétation graphique »*. Etant donné le faible nombre d'étudiants ayant fourni des réponses au problème posé, nous ne donnons pas ici de résultats statistiques plus détaillés (qui seraient forcément peu significatifs).

---

[9] Le calcul des pentes aux minima (d'abscisses 1 et 3) ayant normalement déjà du être effectué précédemment.

5°) Utilisation de la calculatrice.

On observe que 22% des étudiants ne répondent pas sur ce point, que 47% affirment ne pas avoir utilisé leur calculatrice, et que les autres (31% de l'effectif) en ont fait, selon leur dire, un usage très limité (calculs de coordonnées de points et tracé de la courbe dans l'exercice 3).

IV/ LE TEST DE SEPTEMBRE 1995.

A/ PRESENTATION DE L'EXERCICE 2.

1°) Objectif visé. Intentions du concepteur.

Il s'agit de sonder, à travers cet exercice, le rapport des étudiants à la notion de dérivabilité d'une fonction en un point, au sortir du lycée, et les références dont ils peuvent disposer à cet égard, en termes d'exemples et de contre-exemples, dans les cadres graphique et algébrique. La question telle qu'elle est posée : « *Quels cas de non dérivabilité en un point pour une fonction f : R→R pouvez vous citer ? (exemples et schémas à l'appui)* » est censée inciter l'étudiant, non seulement à présenter des exemples de fonctions non dérivables sur R, mais aussi à identifier d'un point de vue plus général (en lien avec la définition par exemple), diverses possibilités de non dérivabilité en un point, les exemples et schémas en question devant simplement lui permettre d'*étayer* son propos.

2°) Analyse a priori.

La question est en soi assez complexe, puisque la non dérivabilité d'une fonction f en un point x_0 peut provenir de ce que la limite du taux d'accroissement de f est infinie en x_0, ou distincte à gauche et à droite en x_0 (finie ou infinie), ou encore de ce qu'elle n'existe pas, à droite et/ou à gauche en x_0.

Il est clair que l'on ne s'attend pas de la part d'un étudiant tout juste issu du lycée à une présentation exhaustive de toutes ces possibilités, avec présentation à la clef d'un exemple à chaque fois. En particulier, il semble peu probable que le cas où le taux d'accroissement n'admet de limite ni à gauche, ni à droite en x_0, soit évoqué, l'étude en 0 de fonctions du type $f(x) = x.\sin(1/x)$ (prolongée par continuité en 0) n'apparaissant que très accidentellement dans les ouvrages de lycée[1]. De même, la mise en évidence de fonctions *partout définies[2] sur R*, et non dérivables en un point (au moins) parce que non continues en ce point, ne semble pas a priori très aisée pour un bachelier scientifique, étant donné le champ de fonctions usuelles très régulières avec lesquelles il travaille ordinairement[3]. Il a la possibilité d'exhiber la fonction

[1] Voir par exemple le problème 56 p.128, de *fin de chapitre*, dans le Terracher de terminale S (programme de 1994) qui, parmi tous les ouvrages de lycée, est réputé pour proposer des exercices « en moyenne » plus délicats ou allant un peu au-delà des strictes directives du programme.

[2] Contrainte imposée dans le libellé de l'exercice.

[3] Même si l'existence de telles fonctions peut lui apparaître théoriquement possible, le fait que l'on considère rarement des fonctions définies et non continues sur R au niveau du lycée favorise une assimilation hâtive entre « fonction définie en un point » et « fonction continue en ce point », déjà observée par ailleurs (test 1996).

x→E(x) (« partie entière »), mais il lui sera sans doute difficile d'y penser, cette fonction étant pour lui d'une utilisation assez rare, ou bien il peut évoquer une fonction définie par des expressions distinctes de part et d'autre d'un point x_0 et ne se « raccordant » pas en ce point, mais ce n'est pas là une démarche familière en terminale et elle suppose d'avoir déjà une « bonne » représentation de la notion de fonction[4].

On peut s'attendre, en revanche, à ce que des étudiants envisagent graphiquement de telles fonctions, puisqu'ils sont censés connaître l'interprétation graphique donnée au lycée de la continuité[5], et fassent remarquer qu'il n'y a pas de tangente à la courbe au point de discontinuité, donc que la fonction est non dérivable en ce point.

Par ailleurs, il faut également prévoir que certains étudiants oublieront que l'énoncé sollicite des exemples de fonctions non dérivables mais *définies sur R*, et présenteront des fonctions non définies en certains points réels comme exemples de fonctions non dérivables, puisque non continues en ces points.

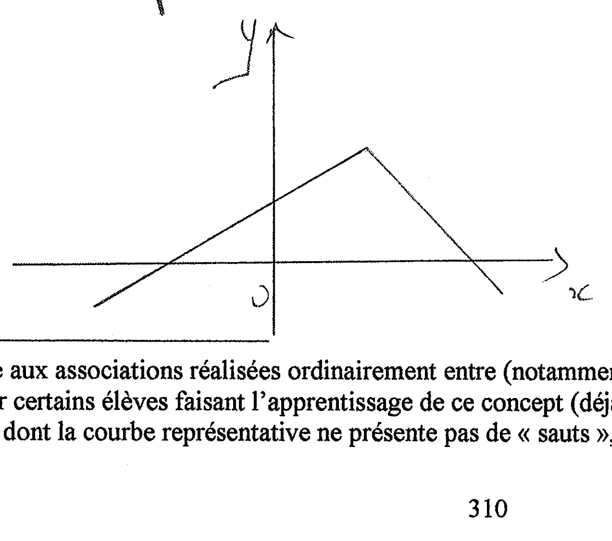
Enfin, nous pensons que les situations de non dérivabilité en un point qui seront très majoritairement décrites ici seront celles correspondant conjointement à la présentation de l'un des deux exemples prototypiques $x \to |x|$ et $x \to \sqrt{x}$ (fonctions de référence), car il s'agit là des deux cas de fonctions non dérivables (en 0) ordinairement donnés dans le cours de terminale et d'interprétations graphiques élémentaires.

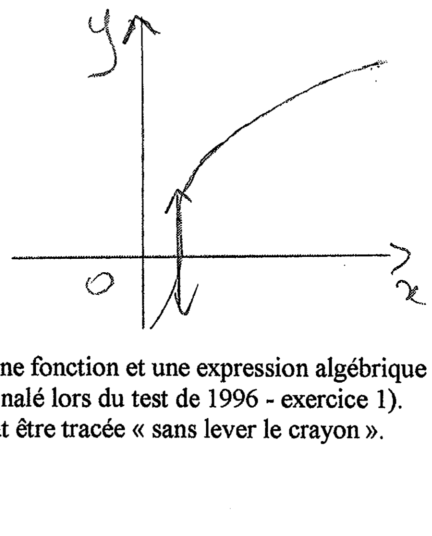
B/ ANALYSE DES REPONSES FOURNIES A L'EXERCICE 2.

1°) Résultats globaux.

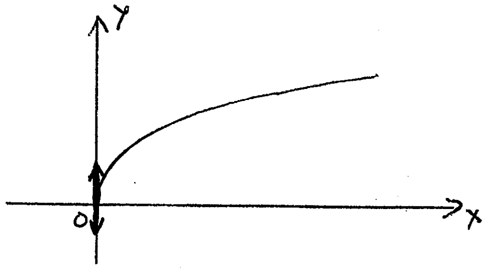
Le premier résultat important à signaler tient dans le fait que la majorité des étudiants qui tentent de caractériser la non dérivabilité d'une fonction en un point le font *uniquement* dans le cadre graphique, puisque seulement 4% d'étudiants se situent du point de vue de la *définition* usuelle en termes de limite du taux d'accroissement, tandis que 16% des copies ne traitent pas du tout l'exercice 2.

cas de non dérivabilité en un point : lorsque la courbe fait un angle ou admet une tangente verticale par exemple





[4]Référence aux associations réalisées ordinairement entre (notamment) une fonction et une expression algébrique *unique*, par certains élèves faisant l'apprentissage de ce concept (déjà signalé lors du test de 1996 - exercice 1).
[5] Fonction dont la courbe représentative ne présente pas de « sauts », peut être tracée « sans lever le crayon ».



Extrait de la copie de Delphine M.

Il convient certes de reconnaître que l'énoncé les invitait largement à s'inspirer du cadre graphique pour trouver des exemples, mais le fait de ne considérer le problème que dans ce cadre concourt parfois à une assimilation erronée (déjà vue dans le test de 1996) entre « fonction non dérivable en un point » et *« absence de tangente en ce point pour la courbe représentative de cette fonction »* :

Une fonction est non-derivable en un point si elle
n'admet pas de tangentes en ce point

Extrait de la copie d'Eric T.

A l'inverse, les quelques étudiants ayant essayé de traduire la non dérivabilité en un point en termes de limite du taux d'accroissement n'envisagent que le cas où cette limite est infinie et n'évoquent pas les notions de limites à droite et à gauche au point. Ces constats mettent bien en exergue tout le chemin qui, au niveau DEUG, restera à parcourir, en vue de l'installation d'un rapport plus *construit* à la définition de la dérivabilité en un point, rapport dont la nécessité n'apparaît pas encore au lycée (l'étude de points anguleux, notamment, n'y est pas systématisée).

En résumé : si $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

Cette fonction $f(x)$ n'est pas dérivable

En revanche si $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$ a nombre fini

alors cette fonction $f(x)$ est dérivable.

Extrait de la copie de Sandrine C.

Les étudiants se limitant à une interprétation dans le cadre graphique se réfèrent au contraire beaucoup plus souvent à la situation du « point anguleux » comme cas de non dérivabilité qu'à celle d'une tangente verticale (la fonction $x \to |x|$ est citée à quarante-cinq reprises, et des fonctions telles que $x \to |x+1|$, $x \to |x|+1$, ou $x \to |\sin(x)|$ douze fois, tandis que la fonction « racine carrée » n'est citée qu'à quinze reprises, pour 101 étudiants participant au test). Il y a donc ici une étanchéité, un cloisonnement déjà observés dans les résultats du test de 1996, entre cadres algébrique et graphique : ce sont les phénomènes graphiques de « pics » en un point que les étudiants retiennent le plus aisément comme cas de non dérivabilité en ce point, mais c'est essentiellement le cas de non dérivabilité en un point par présence d'une tangente verticale en ce point qu'ils se montrent capables d'écrire algébriquement.

Différents éléments statistiques abondent dans le sens d'une relative pauvreté des points de vue sur le phénomène de non dérivabilité en un point et des références dont disposent les étudiants. Ainsi, une majorité d'entre eux (60% de l'effectif) se limitent à une description et/ou une présentation d'exemple(s) et/ou de schéma(s), relatives à *un seul mode* de non dérivabilité en un point (cas d'un point anguleux : 36%, cas d'une tangente verticale : 8%, cas de discontinuité : 16%). Par comparaison, 24% des réponses concernent deux cas distincts de non dérivabilité en un point (point anguleux et tangente verticale : 14%, point anguleux et discontinuité : 10%), tandis qu'aucun étudiant n'évoque plus de deux situations distinctes de non dérivabilité. On trouve, en moyenne, à peine une courbe et un exemple sous forme algébrique par copie (80 courbes et 96 exemples pour 101 copies)[6]. En outre, 28% des étudiants interrogés se contentent de présenter un exemple et/ou une courbe (correspondant le plus souvent à l'une des deux fonctions prototypiques $x \to |x|$ et $x \to \sqrt{x}$ en 0), sans aucune explication, et deux étudiants seulement (2% de l'effectif) étayent leurs exemples (là encore $x \to |x|$ et $x \to \sqrt{x}$ en 0) par une démonstration.

Comme nous l'avions prévu, la plupart des exemples ici présentés, de fonctions non dérivables en un point par discontinuité en ce point, sont en fait des fonctions non définies en ce point (l'exemple de la fonction de référence $x \to 1/x$ en 0 est cité à huit reprises, d'autres fonctions homographiques en leur point de non définition, à quatre reprises, et la fonction logarithme népérien en 0, également quatre fois) :

de plus toutes les fonctions non continues en un point sont non dérivables en ce point
exemple $g(x) = \frac{1}{x}$ est non dérivable en 0

Extrait de la copie de Sébastien P.

Par exemples : $f(x) = \frac{x-5}{x+2}$
dans ce cas, f est non dérivable en -2
lorsque les valeurs de la fonction se rapproche de -2, la pente de la courbe devient verticale mais la courbe ne touche $x = -2$ qu'à l'infini donc elle n'est pas dérivable en -2.

Extrait de la copie de Betty M. : apparente confusion entre tangente verticale et asymptote verticale au point d'abscisse –2 consécutive à la considération de ce point de non définition.

[6] Rappelons tout de même que 16% des étudiants n'ont pas traité l'exercice, ce qui influence notablement ces statistiques.

En contrepartie, on ne recense dans les réponses fournies que huit exemples (deux fois moins) de fonctions définies sur R et non continues en un point au moins : la fonction « partie entière » est citée quatre fois, les quatre autres exemples correspondant à des fonctions définies par deux expressions usuelles distinctes de part et d'autre d'un point réel x_0, et ne se raccordant pas en ce point.

Remarquons enfin que les exemples présentés par les étudiants se démarquent assez rarement des fonctions de référence $x \to |x|$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to 1/x$, $x \to \ln(x)$ qui représentent 75% des exemples cités, et ce, en dépit de quelques rares tentatives de généralisations telles que celle proposée par Sébastien P. :

de manière générale, toutes les fonctions « valeur absolue » sont non dérivables en un point

2°) Tableaux statistiques récapitulatifs.

Cadres utilisés pour décrire les phénomènes de non dérivabilité :	Description en termes de tangente (cadre graphique)	Traduction en terme de limite infinie pour le taux d'accroissement (cadre algébrique)	Absence de réponse
Pourcentages :	80%	4%	16%

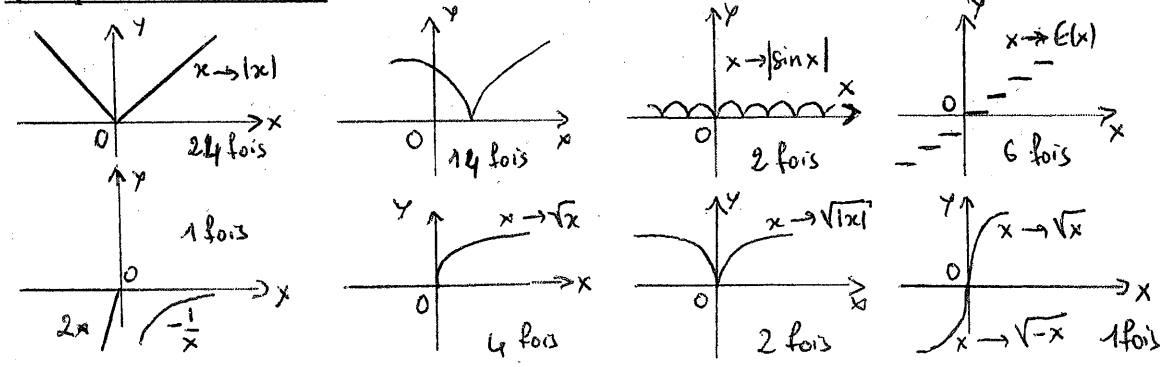
Répartition des cas évoqués :	Point anguleux, unique cas.	Tangente verticale, unique cas.	Fonction discontinue au point, unique cas.	Point anguleux + tangente verticale.	Point anguleux + fonction discontinue	Absence de réponse
%	36%	8%	16%	14%	10%	16%

Exemples cités de fonctions non dérivables	Fonction $x \to |x|$ en 0 (point anguleux)	Autres fonctions av. valeurs absolues	Fonction racine carrée en 0 (tangente verticale)	Fonction $x \to 1/x$ En 0 (point de non-définition)	Autres fonctions non définies en un point	Fonction déf. sur R, discontinue (p.exemple $x \to E(x)$)
Nombre :	45	12	15	8	8	8
%	46,5%	12,5%	15,5%	8,5%	8,5%	8,5%

Composition de la réponse : Desc = description du (des) cas de non dérivabilité, Démo = preuve, E = exemples, C = courbes	Nombre de réponses De ce type (sur 101 copies) :	Pourcentage :
Desc + E + C	23	22%
Desc + E	16	16%
Desc + C	12	12%
E + C + Démo ($\sqrt{x}$, $|x|$)	2	2%

E + C	12	12%
Desc	4	4%
E	8	8%
C	8	8%
Exercice non traité :	16	16%

Quelques courbes tracées :



C/ PRESENTATION DE L'EXERCICE 4.

Le questionnement présenté dans cet exercice ne diffère de celui de l'exercice 1 du test de 1996, portant sur l'étude de la continuité et de la dérivabilité de la même fonction, que par deux aspects essentiellement : d'une part, cette étude est sollicitée au point d'abscisse $x_0 = 1$ (alors que c'est une étude sur R qui est demandée dans l'exercice tel qu'il est proposé en 1996), et d'autre part, le problème relatif à la continuité de f et celui relatif à la dérivabilité de f (en 1) sont cette fois posés séparément. Ajoutons à cela que le questionnement semble ici assez affirmatif quant à l'existence de paramètres a et b tels que f soit continue (respectivement dérivable) en 1 (« ...***comment faut il choisir*** a et b pour que la fonction... soit continue en 1 ? ...dérivable en 1 ? »), alors que ce problème de l'existence est un incontournable préalable dans le questionnement de la version 1996 (problèmes de compatibilité entre continuité / discontinuité d'une part et dérivabilité / non dérivabilité d'autre part).

Nous ne nous livrerons pas à une analyse aussi détaillée des réponses fournies par les étudiants que celle qui a déjà été effectuée précédemment pour la version de 1996 (il y a forcément un certain nombre de similitudes dans les idées et les mécanismes développés pour la résolution), mais nous nous intéresserons aux quelques faits marquants qui distinguent globalement le panel de réponses recensées ici de celui correspondant à l'autre version. Notre objectif est en effet de mettre en perspective, de relativiser, par considération des résultats obtenus avec cette version de 1995, ceux obtenus au test de 1996, le choix d'un questionnement mettant (notamment) l'accent sur les liens entre continuité et dérivabilité ayant précisément été fait en 1996 suite à l'analyse des réponses données en 1995, pour amener l'étudiant à s'interroger de façon différente (plus pertinente ?) sur le problème posé et nous permettre de localiser et de préciser de nouveaux écueils se présentant à lui.

D/ ANALYSE DES REPONSES FOURNIES A L'EXERCICE 4.

On constate que 86% des étudiants soumis au test ont abordé cet exercice (au moins la question de la continuité de f en 1) et 74% ont tenté de traiter le problème de la dérivabilité en $x_0 = 1$. Ces taux de participation sont assez nettement inférieurs à ceux relatifs à l'exercice 1 (similaire) du test de 1996 qui étaient de 94%. Par ailleurs, on trouve ici davantage de procédures inachevées, confuses, voire peu compréhensibles et interprétables, en particulier pour l'étude de la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ par la définition (calcul de la limite du taux d'accroissement de f), que dans les réponses recensées lors de l'analyse du test de 1996. Cette différence dans le traitement n'apparaît pas comme une conséquence de la différence entre les deux formes de questionnement, et sans doute faut il plutôt invoquer en l'occurrence les circonstances propres aux deux épreuves : les étudiants ne disposaient que d'une heure et demie pour effectuer cinq exercices en 1995, tandis que ceux qui ont été soumis au test de 1996 avaient deux heures pour traiter seulement trois exercices (certes un peu plus longs). En outre, l'exercice qui nous concerne ici est le premier du test de 1996, alors qu'il ne figure qu'en quatrième position dans la version de 1995, juste avant l'activité graphique proposée dans l'exercice 5, à laquelle les étudiants ont consacré un certain temps, comme l'étude des copies le montre[7].

La proportion d'étudiants (32%) ayant oublié de mentionner la condition de continuité de f au point $x_0 = 1$ au sein des conditions de dérivabilité de f en ce point est nettement plus importante que dans la « version 1996 » de cet exercice, où l'énoncé invitait l'étudiant (un peu artificiellement) à *juxtaposer* les conditions de continuité et de dérivabilité. Par contre, il y a ici moins d'argumentations de « niveau 0 »[8] (pour l'étude de la continuité et de la dérivabilité en 1, respectivement 10% et 14% d'arguments de ce type), que dans les réponses recensées dans le test de 1996 (24% et 48% pour celle de la continuité et de la dérivabilité sur R). La raison tient naturellement à ce que l'étude est sollicitée *sur R* dans la version 1996, ce qui incite l'étudiant à faire appel à un théorème général du cours (globalisation du problème posé), tandis que c'est seulement *en zéro* qu'est demandée ici l'étude de la continuité et de la dérivabilité de f (ce qui pousse davantage l'étudiant à utiliser une stratégie « locale »). Telles sont les autres caractéristiques marquantes des résultats obtenus avec le questionnement proposé pour cet exercice en 1995.

E/ PRESENTATION DE L'EXERCICE 5 (VARIANTES 1 ET 2).

1°) Objectif visé. Intentions du concepteur.

Les deux variantes de cet exercice sont à rapprocher de l'exercice 3 du test de 1996, au sens où un travail dans le cadre graphique est également demandé de façon *explicite* ici : on fournit la courbe représentative d'une certaine fonction à l'étudiant, qui doit en tirer des informations en rapport avec la notion de dérivée.

---

[7] Le fait que le test soit sans enjeux clairement affirmés a sans doute poussé certains étudiants à suivre davantage leur goût personnel et à privilégier le traitement de l'exercice 5, manifestement plus original et attrayant.

[8] Du type « f est continue (ou dérivable) sur R, car $x \to ax^2-x+2$ et $x \to b/x$ le sont sur R et R* ».

Dans la première variante, il doit déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction dont on donne la courbe représentative, ainsi que les nombres dérivés éventuels (à droite, à gauche, en 0 et en 6), ce qui s'apparente à une tâche déjà sollicitée dans l'exercice 3 du test de 1996. Mais la courbe proposée ne provient pas, cette fois, d'une calculatrice graphique ; elle a été tracée à la main sur papier non quadrillé. On veut donc tester à présent l'influence de cette variable didactique sur les réponses fournies par l'étudiant. En outre, on demande ici de déduire de cette courbe représentative de la fonction le tracé global d'une courbe représentative « plausible » de sa dérivée. C'est donc la capacité à exploiter et à synthétiser les diverses informations implicitement contenues dans le tracé fourni que l'on désire juger chez l'étudiant.

L'expression analytique de la fonction est donnée d'emblée sur R-, mais n'est jamais fournie en cours d'exercice sur R_+ (intervalle correspondant à la portion de courbe où l'étude est la plus intéressante, avec changement de sens de variation, point anguleux et asymptote horizontale à l'infini), de sorte qu'aucun travail de vérification de la concordance entre interprétation graphique et résultats issus du calcul n'est ici à mettre en œuvre. Par contre, une attitude *critique* est sollicitée de la part des étudiants vis à vis des inférences qu'ils sont amenés à effectuer, compte tenu des incertitudes liées à l'interprétation graphique, cette attitude critique que nous souhaitons juger s'avérant d'autant plus nécessaire ici que la courbe fournie a été tracée à la main.

Dans la seconde variante, l'étudiant doit extrapoler un tracé « plausible » pour la courbe représentative d'une fonction f, à partir de la donnée du tracé de celle de la fonction dérivée f '. La courbe représentative de f ' a encore été effectuée à la main, sur papier non quadrillé, et on ne donne cette fois d'expression analytique sur aucun intervalle de R. Outre le fait que $f(0) = 1$, on indique cependant aux étudiants, sur le graphe de f ', la présence d'une tangente d'équation $y = x$ à l'origine, et d'une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ à l'infini. Nous voulons voir en particulier si les étudiants qui ont ici à extrapoler un tracé de la courbe de f à partir de celui de la courbe de f 'auront davantage, ou moins de difficultés, que n'en ont eu leur camarades soumis à la variante 1 à réaliser la démarche inverse. Précisons d'ailleurs que, qualitativement, ces démarches sont de natures très différentes dans un cas et l'autre, ne mettent pas du tout en jeu les mêmes types d'inférences ; nous aurons l'occasion d'y revenir dans l'analyse a priori de ce test.

2°) Choix retenus pour le questionnement.

Nous souhaitons montrer ici en quoi ce type d'exercice se distingue *nettement* des tâches de nature graphique qui peuvent être usuellement proposées à l'élève de lycée sur le thème de la dérivée, en classes de première et de terminale S.

Nous avons pu constater, en effet, à l'occasion de l'étude déjà réalisée dans cette thèse, de l'environnement d'exercices donnés sur la dérivée au sein des manuels de lycée, que les activités graphiques pouvant s'apparenter à celle dont il s'agit ici ne sont pas très fréquentes[9]

[9] Leur développement récent, dans l'enseignement secondaire français, est assez remarquable dans un ouvrage tel que le « Nouveau Fractale » de première S (1995), mais déjà un peu plus limité dans le « Terracher » ou le « Transmath », par exemple.

et ont des caractéristiques assez *marquées*. Tout d'abord, rappelons que les tâches sollicitées sont le plus souvent *bien circonscrites*, voire *isolées*. Par exemple, on demande à l'élève de déterminer en des points spécifiés le caractère dérivable, ou non, d'une fonction dont on donne la courbe, ou bien de lire le nombre dérivé en ces points (ce qui suppose alors qu'il y a dérivabilité). Les données « utiles » sont bien mises en évidence sur la représentation graphique fournie (points particuliers, tangentes en ces points...), et les circonstances de l'exercice facilitent le travail de l'élève (points étudiés à coordonnées entières et coefficients directeurs à valeurs entières aisément repérables grâce à la présence d'un quadrillage).

Lorsque l'activité en jeu consiste à tirer des informations (liées à la notion de dérivée) de *l'ensemble* de la courbe fournie, la *nature* de la tâche est alors très particulière. Ainsi, il ne s'agit pas, le plus souvent, de *produire* une nouvelle courbe (par exemple, celle de la fonction dérivée à partir de celle de la fonction d'origine), mais de *reconnaître* au sein d'un lot de courbes fournies celle qui répond au problème posé, ou d'*associer* deux à deux des courbes prises dans deux lots distincts. Il suffit ainsi de raisonner par élimination, un seul critère permettant de disqualifier une courbe (l'élève travaille juste sur des conditions *nécessaires*). Il n'y a pas à effectuer de travail de *synthèse* visant à vérifier que toutes les caractéristiques apparentes, lisibles de la courbe (comportement local, variations détaillées, comportement asymptotique) sont bien concordantes. Les exercices sont parfois prolongés par une partie plus calculatoire : on donne une expression paramétrée de la fonction et on demande de déterminer les paramètres en utilisant les informations tirées de la courbe fournie. En revanche, on ne trouve pas de tâches pour lesquelles la production du « modèle » serait complètement à la charge de l'élève. Enfin, les tâches du type : *« Construire une courbe correspondant à la fonction définie sur R et vérifiant : f est continue sur R, f '(1) = 0,* $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$*,... etc. »*, utilisée par les auteurs anglo-saxons (Dubinsky, Schwingendorf[10], etc.) est assez rare dans les manuels français du lycée. Précisons qu'il s'agit là d'une activité de production, mais aux contours encore bien déterminés, pour laquelle l'ensemble du travail à réaliser est *explicite*.

Si l'on considère à présent les deux variantes de l'exercice 5 que nous proposons dans ce test, on constate ainsi que (presque) tout les distingue de ces tâches des manuels de lycée. Il s'agit ici de construire soi-même la courbe représentative de f ' (resp. de f) à partir de celle de f (resp. de f '), en tenant compte d'un *maximum* de données explicites ou *implicites* que l'on peut retirer de l'observation de la courbe de f (resp. de f '). Ainsi faut il prendre en considération, l'expression explicite de la fonction f sur R-, mais aussi la présence d'une asymptote horizontale à l'infini et (surtout) le sens de variation de la « fonction pente » sur [0,6[, puis sur [6,+∞[, sur lesquels la représentation graphique fournie et le reste de l'énoncé n'attirent pas *spécialement* l'attention (variante 1). Les points de coordonnées (0,0) et (6,8) sont mis en valeur dans le questionnement, mais les tangentes (ou demi tangentes) en ces points ne sont pas représentées sur la courbe. Cependant, dans la variante 2, la représentation graphique fournie pour f ' est beaucoup plus simple que celle de f dans la variante 1, et l'indication de la tangente à l'origine et de l'asymptote horizontale à l'infini est bien mise en évidence. Mais l'absence de quadrillage et de points « en nombre suffisant » rend les deux variantes très inhabituelles pour l'élève, qui ne dispose pas ici d'aides particulières et doit

[10] In « The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative » (M. Asiala, Ed. Dubinsky, J. Cottrill, K.E. Schwingendorf, 1996).

chercher lui-même ses repères. En outre, il n'y a pas de la possibilité pour l'élève de vérifier ses affirmations a posteriori, comme dans l'exercice 3 du test de 1995 où on lui donne en troisième question l'expression analytique de la fonction. Or, il est délicat ici d'introduire *soi-même* un modèle de fonction, surtout dans la variante 1 où il faut avoir l'idée de prendre deux expressions différentes sur [0,6[et [6,+∞[, car la courbe vue dans sa globalité n'évoque rien de connu.

3°) Analyse a priori.

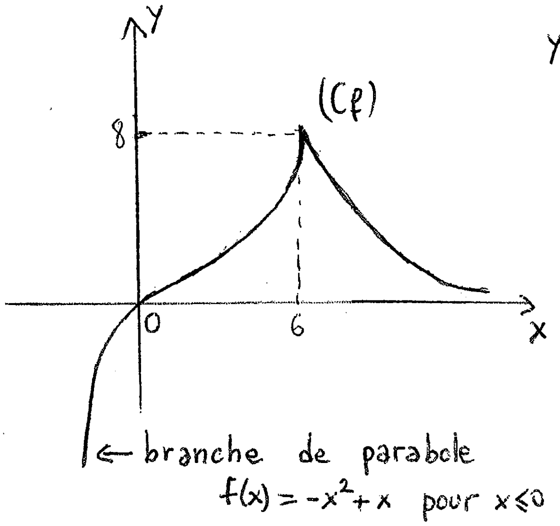
Compte tenu de la nature de l'exercice (travail à partir d'une courbe donnée) et des circonstances particulières dans lesquelles il s'inscrit (imprécision du tracé fourni, effectué à la main et sur papier non quadrillé), une certaine marge d'erreur est acceptable dans la solution qu'un étudiant peut proposer et l'on parlera ici de « réponse admissible », car il n'y a vraiment que pour $x \leq 0$ dans la variante 1 qu'une expression analytique est fournie et que l'on peut donc prétendre répondre en toute rigueur au problème posé. Sur ce point, le questionnement relatif aux deux variantes de l'exercice 5 prend d'ailleurs toutes les précautions nécessaires en mettant bien l'accent sur ce degré d'incertitude : « *A la **vue** de ce **seul** schéma, quel **semble** être, **selon vous**...* », « *Tentez d'**extrapoler** un tracé **aussi précis que possible**...* ». Il faut cependant souhaiter ici que les étudiants (peut-être perturbés par la nature de cet exercice ?) ne se réfugieront pas derrière le manque relatif de rigueur de la question proposée pour se « dédouaner » de toute réponse précise.

Il est exact que l'appréciation visuelle peut amener à conclure diversement dans certains cas ; par exemple, dans la variante 1, pour ce qui est des valeurs des nombres dérivés à gauche et à droite en 6, on peut se demander si $f_g'(6)$ existe, s'il vaut 10, 100, ou autre chose, si $f_d'(6)$ vaut -1 ou $-4/3$,... etc.). Mais il y a aussi, pour les courbes fournies, bien d'autres propriétés qui ne sont guère discutables, même en vertu de l'imprécision des tracés, et notamment la présence d'un point anguleux en $x_0 = 6$ (variante 1), et le sens de variation, sur divers intervalles, de la fonction dont la courbe est donnée (vrai pour les deux variantes). Même en ce qui concerne les nombres dérivés précités, l'incertitude reste dans une certaine « fourchette », et on peut considérer par exemple, que donner pour $f_d'(6)$ une valeur non située dans l'intervalle $[-2,-1/2]$ constitue une erreur, notamment si cette valeur est positive. L'énoncé invite d'ailleurs les étudiants à se prononcer d'une manière *critique* assez fine, c'est à dire en distinguant des degrés de certitude dans les éléments constitutifs de leur réponse qui ne doit pas, in fine, se résumer au tracé d'une courbe : « *Indiquez **le cas échéant** les zones de votre tracé dont vous n'êtes pas sûr(e), ou qui vous semblent **très approximatives**, et pourquoi il en est ainsi.* ». Achevons nous-mêmes ici ce travail et précisons ce que pourrait être un tracé admissible pour les deux variantes.

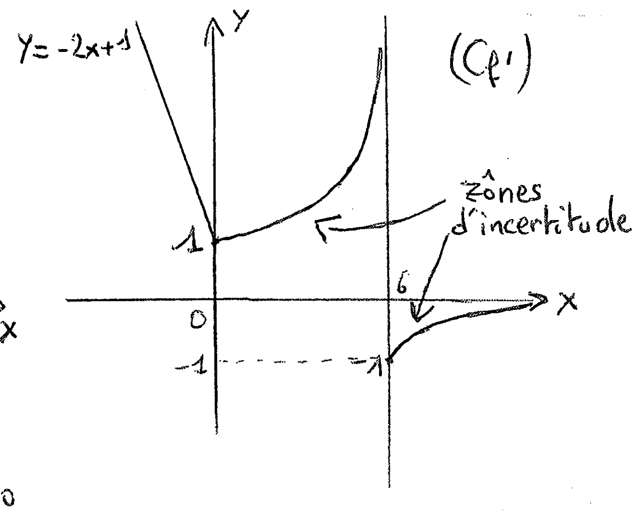
Concernant la variante 1, la fonction dont on a la courbe représentative semble être dérivable en tout point distinct de $x_0 = 6$ (et on croit lire $f'(0)=1=(1-2x)\big|_{x=0}$). Si l'on discerne une demi tangente verticale à gauche en $x_0 = 6$, cela induit forcément alors la présence d'une asymptote verticale d'équation $x = 6$ pour C(f ') et cette courbe repart à droite en 6 avec une valeur approximativement égale à -1. Reconnaissons juste ici la possibilité pour l'étudiant de voir un second « point d'arrêt » pour (Cf ') à gauche en 6 s'il a estimé préalablement que la demi tangente à (Cf) en ce point n'est pas verticale. Il n'est guère douteux, en revanche, que la fonction « coefficient directeur de la tangente » (c'est-à-dire la fonction dérivée f ') est croissante sur [0,6[(variant de 1 à $+\infty$), et sur]6,$+\infty$[(variant de -1 à 0^-). Au voisinage de l'infini, la présence d'une asymptote horizontale d'équation ($y = 0$) ne peut donc être mise en doute. Probablement est-ce cette nécessité de lire l'évolution du coefficient directeur de la tangente à (Cf) pour pouvoir extrapoler (Cf '), alors que la courbe fournie n'attire ici l'attention de l'étudiant sur aucun point en particulier, qui constitue une des difficultés majeures de l'exercice. Telle est en tout cas notre hypothèse.

L'incertitude la plus importante concerne en fait la forme précise de la courbe (Cf ') sur]0,6[et en particulier à droite au voisinage de zéro (car les valeurs éventuelles de la dérivée seconde pour x_0 voisin de 0 sont inconnues), et de même un peu au delà du point d'abscisse $x_0 = 6$; on ne sait donc pas comment va « repartir » la courbe (Cf ') à droite en $I_1(0,1)$ et en $I_2(6,-1)$, avec quelles pentes.

Courbe (Cf) donnée :



Courbe (Cf ') admissible :

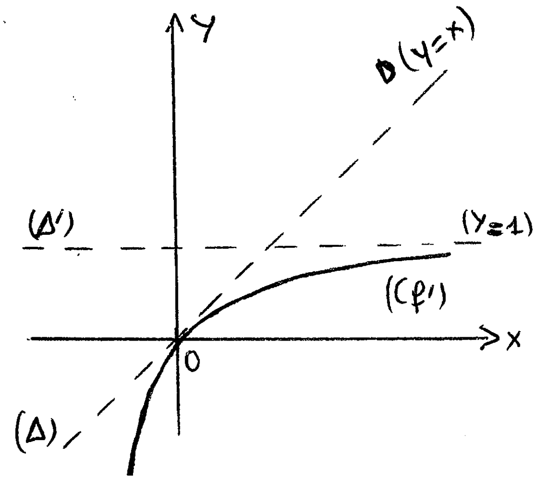


Concernant la variante 2, le tracé qui est fourni pour (Cf ') nous indique de façon certaine que f, dont la courbe représentative est à extrapoler, est strictement décroissante sur R- et strictement croissante sur R+, avec un minimum en $x_0 = 0$ (ordonnée égale à 1 fournie par le texte). Cette situation très familière pour l'étudiant (un théorème du cours de terminale affirme l'existence d'un extremum en tout point où la dérivée s'annule et change de signe) sera à notre avis facilement repérée par l'étudiant, car il n'est pas utile ici d'imaginer les valeurs prises par la fonction f ' en dehors de zéro ; seul leur signe importe et il est facile à lire. Cependant, le seul autre renseignement accessible à partir de la courbe donnée (Cf ') tient en l'égalité : $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1^-$. Sur un plan théorique, cette égalité conduit au résultat : $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$, ce qui ne signifie pas que l'on ait nécessairement $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = 0$, ni même $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = b$ où b est un réel donné (considérer pour contre-exemple la fonction : $f(x) = x + \ln(x)$). Cette distinction a tout lieu d'être ignorée par le public d'étudiants concerné, compte tenu de la disparition de l'étude systématique des branches infinies des programmes de terminales S, et de l'éviction de la notion de *« branche parabolique de coefficient a »* de ces programmes[11]. Signalons d'ailleurs qu'établir le résultat correct, $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$, suppose d'avoir recours au théorème des accroissements finis (notamment), qui n'est pas encore connu de ces étudiants[12].

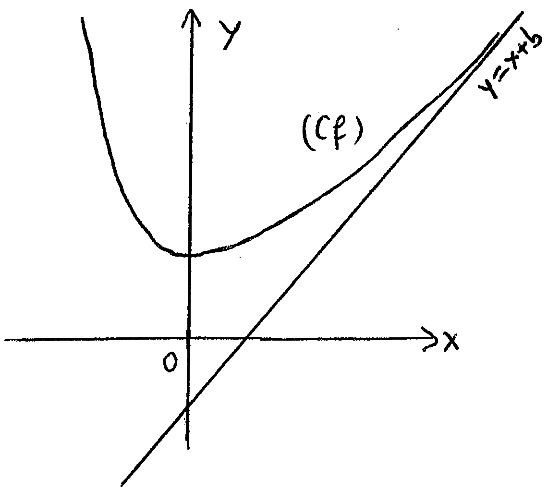
Mais surtout, ce résultat n'est pas le plus naturel pour l'étudiant, qui ne peut guère fonder son interprétation du cas « $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1^-$ » que sur une perception graphique un peu naïve l'amenant précisément à postuler la présence d'une asymptote oblique d'équation : $y = x+b$ (où $b\in R$) pour (Cf) au voisinage de l'infini. Gageons donc que l'on rencontrera un certain nombre de réponses de ce type, admissible mais non obligatoire, dans les copies, sans l'analyse critique qui serait ici nécessaire. D'autres étudiants affirmeront sans doute aussi que le tracé fourni pour (Cf ') est trop imprécis pour pouvoir en déduire celui de (Cf), mais sans être plus capables de cerner la raison exacte, ci-dessus exposée, qui fait que l'on ne peut déterminer avec certitude le comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $-\infty$, la courbe fournie pour (Cf ') semble attester de la présence d'une branche parabolique de direction (OY) pour (Cf), mais on peut s'attendre là encore à un certain « flou » dans les réponses fournies par les étudiants, du fait de leur manque de connaissances structurées sur les comportements asymptotiques possibles d'une fonction.

Courbe (Cf ') donnée :



Courbe (Cf) « admissible » :



F/ ANALYSE DES REPONSES FOURNIES : EXERCICE 5 / VARIANTE 1.

1°) Résultats obtenus à la question 1 (domaine de dérivabilité de f).

Exactement cinquante étudiants ont travaillé sur cette variante 1 de l'exercice 5. Le domaine de dérivabilité le plus souvent proposé est $]-\infty,6[\cup]6,+\infty[$ (38 fois, soit dans 76% des cas), ce qui est conforme à ce que nous présenterions comme solution, les autres réponses rencontrées étant $]-\infty,0[\cup]0,6[\cup]6,+\infty[$ (dans 4 copies, soit 8% de l'effectif) et R (dans 8 copies

[11] On se limite maintenant, selon le B.O n°7 du 7 juillet 1994, à la recherche *guidée* d'asymptotes dans des cas particuliers.

[12] Du reste, même pour un étudiant en fin de première année de DEUG Sciences, établir le résultat en question paraît déjà bien délicat.

représentant 16% de l'effectif). Une large majorité d'étudiants (42, soit 84% de l'effectif) perçoivent donc la non dérivabilité de la fonction f en $x_0 = 6$, mais dix d'entre eux (20% des étudiants) ne justifient pas leur réponse, les arguments invoqués par les autres étant ici de trois types :

1) présence de deux demi tangentes distinctes à gauche et à droite en 6 (argument majoritaire, dix-sept étudiants représentant 34% de l'effectif),
2) présence d'un point anguleux en $x_0 = 6$ (neuf étudiants, soit 18% de l'effectif),
3) présence d'une demi tangente verticale à gauche en 6 (six étudiants, soit 12% de l'effectif),

Cependant, cette répartition ne rend pas compte des modalités d'expression réellement observées pour chacun de ces types d'arguments, et de leur diversité. Ainsi, concernant le premier de ces trois groupes, le terme de « demi tangente » n'est employé que par quatre étudiants, les autres étudiants évoquant la présence de « *deux pentes, ou de deux tangentes, distinctes en $x_0 = 6$* » (expressions plus parlantes ?) comme cause de la non dérivabilité de f en 6, « *...alors qu'il ne doit y avoir, pour que f soit dérivable en $x_0 = 6$, qu'une seule tangente possible* » (respectivement « *qu'une seule valeur possible pour f '(6)* »), ajoutent certains.

domaine de dérivabilité :
$]-\infty ; 6[\cup]6 ; +\infty[$
car au point $x = 6$, on peut tracer 2 tangentes. Pour qu'il y ait dérivabilité en 1 point, il ne faut qu'une tangende -

Extrait de la copie de Samira C.

le domaine de dérivabilité est $]-\infty ; 6[\cup]6, +\infty[$ car en $x = 6$ fonction n'est pas dérivable car il y a plusieurs valeurs possibles pou $f'(6)$

Extrait de la copie de Sandrine C.

(1) A la seule vue du schéma, le domaine de dérivabilité de f semble être $\mathbb{R} - \{6\}$.
En effet le point d'abscisse 6 "accuse deux pentes" c'est à dire que la dérivée serait à la fois positive et négative (et ne peut pas être égale à zero car cela signifierait qu'il y a une tangente horizontale

a la courbe en $x = 6$ ce qui n'est pas le cas) ce qui est impossible.

Extrait de la copie de Colin S. : une tentative de raisonnement par l'absurde.

Ceux qui évoquent la forme anguleuse de la courbe en 6, mettent plutôt l'accent, tout au contraire, sur « *l'absence de tangente possible en* $x_0 = 6$ » pour justifier la non dérivabilité de f en ce point. Cinq d'entre eux expriment cette idée en terme de « *pic en 6* », aucun ne parlant précisément ici de point anguleux.

Par lecture du schéma, on en déduit que le domaine de dérivabilité de f est $\mathbb{R} \setminus \{6\}$. En effet la courbe admet au point d'abscisse 6 et d'ordonnée 8 un pic, donc elle n'est pas dérivable en ce point

Extrait de la copie de Anne D.

Les quatre autres utilisent des termes plus ambigus (rupture, cassure, fracture…) pouvant s'appliquer aussi bien à la discontinuité d'une fonction qu'à sa non dérivabilité en un point (phénomène déjà observé plus haut dans le test de 1996). Une certaine variété dans le choix des termes utilisés, issus de la langue naturelle, s'exprime alors :

1°/ f semble être dérivable sur $\mathbb{R} - \{6\}$ car la « cassure » de la courbe au point d'abscisse dénote un nombre dérivé à droite différent de celui de gauche

Extrait de la copie de Sébastien P.

Pour le point 0 la courbe semble homogène (il n'y a pas de « fracture » dans le tracé) Mais il est fort possible que la fonction ne soit pas derivable en ce point.

Extrait de la copie de Jérôme D. : un nouveau qualificatif : « homogène ».

De fait, certaines confusions[13] dans les interprétations graphiques de la continuité et de la dérivabilité en un point prendraient leur source dans ces imprécisions langagières, le terme de « continuité » étant effectivement cité, ici, par deux étudiants, avec une légitimité variable :

1) A mon humble avis, le domaine de dérivabilité de f est de $\mathbb{R} \setminus \{6\}$; il y a une fracture dans la continuité du tracé au point d'abscisse $x=6$

Extrait de la copie de Gary D. : la perception de la non dérivabilité en 6 comme « fracture dans la continuité du tracé » suppose de donner à ce terme de continuité un sens non mathématique.

le domaine de dérivabilité de f semble être $\mathbb{R} \setminus \{6\}$
la fonction semble continue pour tout x sauf pour $x = 6$

Extrait de la copie de Frédéric R. : ici, la confusion entre discontinuité et non dérivabilité en un point semble cette fois consommée.

Quatre étudiants estiment que la fonction n'est pas non plus dérivable en 0. Cette opinion semble fondée sur l'idée selon laquelle la courbe (Cf) étant constituée de trois parties correspondant chacune à trois fonctions distinctes, il n'y a pas de raison que le « recollement » soit dérivable aux points de jonction. Ils perçoivent donc une pente à droite en 0 distincte de celle à gauche en 0, et pour deux d'entre eux, il semble d'ailleurs que la présence d'un point d'inflexion en 0 renforce leur sentiment[14] qu'il y a non dérivabilité en ce point :

1) D'après le shéma le domaine de dérivabilité semble être $D_d =]-\infty ; 0[\cup]0 ; 6[\cup]6 ; +\infty[$ car au point 0, il y a une inflexion (la fonction est défini par $-x^2+x$ pour $x \leq 0$ et par une autre fonction pour $x \in]0 ; 6[$. Des même, pour $x \in]6;+\infty[$ c'est une autre fonction qui définie cette partie de la courbe.

Extrait de la copie de Laetitia L.

[13] Relevées par ailleurs dans notre mémoire de D.E.A [ibid.].

[14] Cela est à rapprocher de la conception identifiée par C.Castela : « la tangente est située d'un seul côté de la courbe » , qui s'appuie sur l'expérience première de la tangente à un cercle (in « Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, un exemple concret : celui de la tangente », RDM vol.15/1, La pensée sauvage, 1995).

On rencontre aussi huit étudiants qui estiment que la fonction est dérivable sur R. Pour deux d'entre eux, il en est ainsi car f est définie, continue sur R. L'amalgame entre fonction définie, fonction continue, et fonction dérivable, déjà repéré chez certains étudiants lors du dépouillement du test de 1996, résiste donc parfois à une confrontation dans le cadre graphique. Conformément aux craintes exprimées plus haut[15], trois autres étudiants confondent d'ailleurs l'interprétation graphique de la continuité et celle de la dérivabilité en un point en affirmant que «*f est dérivable sur R car il n'y a pas de rupture dans le tracé* ». Enfin, trois autres étudiants ne veulent pas reconnaître la fonction comme non dérivable en 6 et justifient ce point de vue en affirmant que, selon eux, la pente en 6 ne peut pas être considérée comme rigoureusement verticale. Le support qui leur est fourni est ici en cause, l'appréciation de la pente à gauche en 6 semblant focaliser toute leur attention au point d'en oublier (?) que la présence (beaucoup plus évidente celle là) d'un point anguleux en $x_0 = 6$ atteste de la non dérivabilité de f en ce point.

1) Le domaine de dérivabilité de f semble être IR car la pente de cette fonction n'est jamais verticale même si elle s'en rapproche au point (6,8) -

Extrait de la copie de Betty M.

Tableau récapitulatif pour le domaine de dérivabilité :

$]-\infty,6[\cup]6,+\infty[$	38 étudiants	76%
$]-\infty,0[\cup]0,6[\cup]6,+\infty[$	4 étudiants	8%
R	8 étudiants	16%

Causes de non dérivabilité en $x_0 = 6$ invoquées (concerne 84% de l'effectif) :

Deux demi tangentes distinctes en $x_0 = 6$	4 étudiants	8%
Deux pentes ou deux tangentes distinctes	13 étudiants	26%
Présence d'un « pic »	5 étudiants	10%
Rupture, cassure…	2 étudiants	4%
Plus de *continuité* en $x_0 = 6$ dans le tracé	2 étudiants	4%
Présence d'une pente verticale en $x_0 = 6$	6 étudiants	12%
Pas d'argumentation	10 étudiants	20%

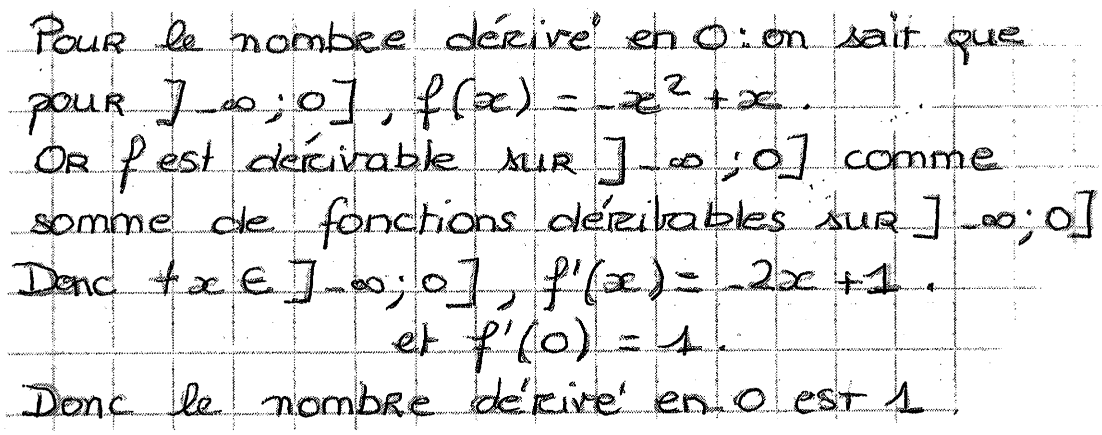
[15] Et à ce que l'on a pu déjà observer dans notre mémoire de D.E.A.

2°) Résultats obtenus à la question 2 (dérivées à gauche, à droite en 0 et en 6).

S'il n'y a que quatre étudiants (8% de l'effectif) qui donnent au nombre dérivé en 0 (en 0^+ comme en 0^-) une valeur distincte de 1 (5/6 et 1/2 une fois, 0 deux fois), force est de constater que l'on ne trouve qu'une légère majorité d'étudiants (27 sur 50, soit 54% de l'effectif) qui affirment que le nombre dérivé de f en 0 vaut 1.

Neuf étudiants (18% de l'effectif) s'abstiennent de toute réponse concernant la valeur de ce nombre dérivé, et dix étudiants (20% de l'effectif) se limitent à prouver, à l'aide d'un calcul[16], que le nombre dérivé de f à gauche en 0 vaut 1 (l'expression de f(x) étant donnée sur R-), mais qu'à droite en 0, « *on ne peut pas savoir* ». Dans la mesure où <u>tous</u> les étudiants se sont prononcés sur le domaine de dérivabilité de f en question 1, seulement quatre d'entre eux estimant la fonction f non dérivable en 0, il y a dans cette affirmation de certains : « *$f'_g(0) = 1$ mais pour $f'_d(0)$, on ne peut pas savoir* », une contradiction qu'il nous faut bien relever. Cette contradiction est la conséquence du fait que les étudiants ont moins de scrupules, dans ce type d'exercice, à se prononcer sur la dérivabilité en un point que sur la valeur du nombre dérivé en ce point, ce qui était prévisible et confirmé par le taux d'abstention (18%) signalé plus haut pour cette question.

Parmi les 27 étudiants qui affirment que f '(0) = 1, 16 s'appuient sur le calcul de f '(x) pour $f(x) = -x^2+x$ et font x = 0 dans l'expression de f '(x) obtenue. Ils justifient leur démarche par le fait que l'expression donnée par le texte pour f(x) est valable pour tout <u>$x \leq 0$</u>; ce type d'argumentation influencée par ce repère sémiotique « $x \leq 0$ » a déjà été rencontrée dans l'exercice 2 du test de 1996.


Pour le nombre dérivé en 0 : on sait que
pour $]-\infty;0]$, $f(x) = -x^2+x$.
Or f est dérivable sur $]-\infty;0]$ comme
somme de fonctions dérivables sur $]-\infty;0]$
Donc $\forall x \in]-\infty;0]$, $f'(x) = -2x+1$.
et $f'(0) = 1$.
Donc le nombre dérivé en 0 est 1.

<u>Extrait de la copie de Céline C.</u>

Il n'y a que deux étudiants qui développent un argument « mixte », du type : à gauche en 0, calcul du nombre dérivé de f grâce à l'expression fournie et, attendu que la fonction f semble dérivable en 0, valeur identique pour le nombre dérivé à droite en 0.

[16] Huit étudiants évaluent f '(x) pour $f(x)= -x^2+x$, puis font x=0, et deux étudiants effectuent le calcul de la limite du taux d'accroissement de $f(x)= -x^2+x$ en $x_0=0$.

Valeurs des nombres dérivées

- a gauche de 0.

$f(x) = -x^2 + x$ pour $x \leqslant 0$

et $f'(x) = -2x + 1$ sur le même intervalle.

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \underline{1}$.

- a droite de 0 la forme de fonction n'est pas connue mais a l'aide du schema si nous considerons ce point derivable (ce qui n'est pas forcement vrai) on peut deduire que la valeur du nombre dérivé est également $\underline{1}$.

Extrait de la copie de Jérôme D.

Enfin, neuf étudiants affirment que f '(0)=1 sans le justifier, ou par simple évaluation graphique « à l'œil », sans utiliser l'expression fournie de f(x) pour $x \leq 0$.

En 0, on peut parser que la tangente caresponde à l'axe de symetrie entre l'axe des abscisse et l'axe des ordonnées le coefficient directeur serait donc egal a 1.

$f'(0) = 1$.

Extrait de la copie de Eric T.

Tableau récapitulatif des réponses concernant le(s) nombre(s) dérivé(s) en 0 :

Valeur donnée de f '(0),f_g'(0), f_d'(0)	Raison invoquée :	Nombre d'étudiants :	Pourcentages :
f '(0) = 1	f '(x) = -2x+1 pour tout $x \leq 0$	16	32%
f '(0) = 1	f_g'(0) = 1 : pour $x \leq 0$, f '(x)=-2x+1 f_d'(0) = 1 à l'œil.	2	4%
f '(0) = 1	Non justifié ou impression à l'œil	9	18%
f_g'(0) = 1	Seul f_g'(0) est évaluable par f ' ou limite du taux	8+2	20%
f '(0) = 5/6	A l'œil	1	2%
f '(0) = ½	A l'œil	1	2%
f '(0) = 0	Néant	2	4%
Néant	Néant	9	18%

Pour ce qui est de l'évaluation des nombres dérivés à gauche et à droite en $x_0 = 6$, on assiste ici à un taux d'abstention très élevé, puisqu'il n'y a que 22% du public qui donne une valeur pour $f_g'(6)$ ou se prononce pour sa non existence, tandis que 26% des étudiants font de même pour $f_d'(6)$. La plupart des abstentionnistes ignorent simplement cette partie de la question 2, tandis que quelques autres justifient l'absence de réponse en affirmant notamment : « *C'est trop difficile à voir car il y a une trop grande croissance* », « *On peut seulement voir que $f_g'(6) > 0$ et $f_d'(6) < 0$* »,... etc.

Là encore, le choix du support pour la courbe fournie, inhabituel, correspond à une rupture du contrat qui semble assez déstabilisante pour ces étudiants. Les étudiants qui tentent de donner une réponse au problème posé disent assez rarement que $f_g'(6)$ n'existe pas (vu deux fois) ; six d'entre eux écrivent que ce nombre dérivé, identifié par certains à $\lim_{x\to 6^-} f'(x)$, vaut $+\infty$ ou « tend » vers $+\infty$, trois autres donnant des valeurs acceptables (5,8 et 10). Les treize étudiants présentant une valeur pour $f_d'(6)$ fournissent un résultat acceptable (-1 le plus souvent, -3/4 ou - 4/3 pour les autres). Enfin, quatre étudiants ne distinguent pas $f'_g(6)$ et $f_d'(6)$ et affirment contre toute intuition graphique que « *$f'(6) = 0$, car la courbe change de monotonie en 6* ». Ils tentent naturellement d'appliquer ici une réciproque du théorème de terminale qu'ils connaissent sur l'existence d'un extremum.

- <u>a gauche de 6</u>
  le nombre derivee et indefinisable.
  la methode de la tangente peut une approximation de ce nombre. Ici 8. (trouver graphiquement)

- <u>a droite de 6</u>
  de même qu'avant.
  le nombre trouver et $-\frac{4}{3}$ (empiriquement).

Extrait de la copie de Jérôme D.

A gauche de 6, la valeur du nombre derivé, est tres grande et tend vers l'infini :
A droite de 6, la valeur du nombre derivé est negative et elle est environ de -1.

Extrait de la copie d'Eric T.

$$\left.\begin{array}{l} f'(6^-) = +\infty \\ f'(6^+) = -\frac{3}{4} \end{array}\right\} \text{ approximatif.}$$

Extrait de la copie de Michel B.

Tableaux récapitulatifs des réponses concernant les nombres dérivés en 6 :

	Existence ?	Valeurs	Nombre d'étudiants	Pourcentages
$f'_g(6)$	Pas de réponse	Pas de réponse	30	60%
$f'_g(6)$	Oui	On ne peut pas savoir	5	10%
$f'_g(6)$	Oui	5, 8,10	3	6%
$f'_g(6)$	Pas de réponse : 6 fois Non : 2 fois	$+\infty$ néant	6 2	12% 4%
$f'(6)$	Oui	0	4	8%
Total :	-	-	50	100%

	Existence ?	Valeurs	Nombre d'étudiants	Pourcentages
$f'_d(6)$	Pas de réponse	Pas de réponse	28	56%
$f'_d(6)$	Oui	On ne peut pas savoir	5	10%
$f'_d(6)$	Oui	-1	9	18%
$f'_d(6)$	Oui	-3/4 ou –4/3	4	8%
$f'(6)$	Oui	0	4	8%
Total :	-	-	50	100%

3°) Résultats obtenus à la question 3 (Extrapolation du tracé de C(f')).

Cette question n'a souvent été abordée que de façon très partielle, sans que l'on puisse vraiment imputer cela au manque de temps (il s'agissait de la dernière question du test de 1995, mais environ le tiers des étudiants ont rendu leur copie bien avant la fin du temps imparti).

Il apparaît surtout que le problème posé de l'extrapolation de (Cf ') dans le demi-plan ($X \geq 0$) à partir de (Cf) déroute bon nombre d'étudiants qui se limitent alors parfois à une étude (en général assez soignée, avec tableau de variations) de la fonction f là où son expression analytique est connue[17] ($f(x) = -x^2+x$ sur R-), en affirmant que l'incertitude sur (Cf ') est trop grande ailleurs pour que l'on puisse tracer cette courbe. De fait, on constate que 17 étudiants

[17] C'est là une tâche qui reste au contraire très conforme au contrat habituel de terminale, et ils ont à cœur de montrer qu'ils savent la traiter.

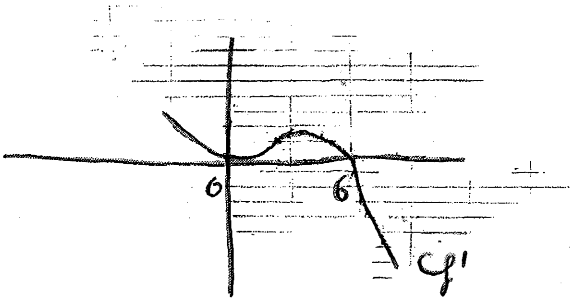
(34% de l'effectif) ne fournissent pas la représentation graphique de (Cf ') demandée et que sept autres présentent une courbe limitée à la zone correspondant à $x \leq 0$ ou à $x \leq 6$, tandis que 23 étudiants étudient la fonction $x \rightarrow -x^2+x$ sur R-, bien que cela ne soit pas *explicitement* demandé[18] par l'énoncé. Ils l'assortissent parfois de remarques du style : *« $f''(x) = -2 < 0$ pour $x \leq 0$, donc f ' est strictement décroissante sur R- ».* De l'avis général, le tracé de (Cf ') sur R_+ est « *difficile* » (Blaise C.), voire même « *impossible* », « *...puisque f est inconnue sur* R_+ »(Fabien S.), «*...sauf près du point d'abscisse 6 qui est connu* » concède Eric P., alors que c'est justement dans cette zone que se posent le plus de problèmes ! Le fait de savoir que la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées (6,8) n'est en réalité d'aucune utilité pour tracer celle de f ', mais ce renseignement semble pourtant « rassurer » des étudiants qui avaient l'habitude, au lycée, dans des exercices analogues, que des points (avec les pentes ou tangentes correspondantes) leur soient bien précisés (sur papier quadrillé). L'opinion exprimée ici par bon nombre d'entre eux est en effet que l'on ne connaît pas suffisamment de points pour réaliser la courbe (Cf '). Le fait d'avoir à effectuer un tracé très *qualitatif* avec un minimum de renseignements précis et *apparents*, et de devoir tirer soi-même de la courbe (Cf) les informations dont on a besoin pour extrapoler (Cf '), introduit donc bien une rupture de contrat apparemment décisive dans la réussite d'un tel exercice. Sans doute, ce type de tâche, déterminer une *allure* de courbe en *identifiant* et en *sélectionnant* quelques données fiables, est il aussi très éloigné de la culture développée au lycée, fortement influencée par l'usage des calculatrices graphiques qui fournissent à moindre frais les tracés de courbes.

Ainsi, fort peu d'étudiants (sept en tout) mettent ici l'accent sur les éléments d'information dont l'ignorance est *vraiment* préjudiciable en vue du tracé de (Cf '), à savoir les valeurs des pentes à la courbe (Cf ') en des points de cette courbe situés à droite de 0 et de 6 dans un voisinage de ces points. L'analyse critique des étudiants, clairement sollicitée par l'énoncé (« *Indiquez les zones approximatives de votre tracé et* ***pourquoi il en est ainsi*** »), reste alors en général assez fruste et peu engagée (affirmations effectuées avec beaucoup de réserves), se résumant même souvent à dire que tout est plus ou moins incertain dès que $x \geq 0$.

De fait, les erreurs commises par les étudiants qui « jouent le jeu », en s'engageant vraiment dans des réponses assez précises, sont nombreuses et assez variées. Quatorze étudiants (28% de l'effectif) présentent le signe de f 'sur R_+ en observant les zones de croissance et de décroissance de f sur R_+, mais ne procèdent pas à l'observation plus fine de l'évolution des pentes aux points de la courbe (Cf) qui permettrait d'en déduire les variations de f ', certains d'entre eux comme Samira C. précisant même que l'on ne peut retirer de la courbe (Cf) d'autres informations que la connaissance du signe de f ' :

x		0		6	
$f'(x)$	+	0	+	$-\infty$ | $-\infty$	—
$f(x)$	$\nearrow$				$\searrow$

[18] Et pas non plus vraiment nécessaire, puisque la courbe (Cf) représentative de f sur R est fournie par l'énoncé et l'extrapolation de (Cf ') à réaliser pour $x > 0$ peut donc être effectuée de la même façon pour $x \leq 0$.



Sur [0,6], on sait seulement que la fonction f' est positive, mais on n'en sait pas plus.

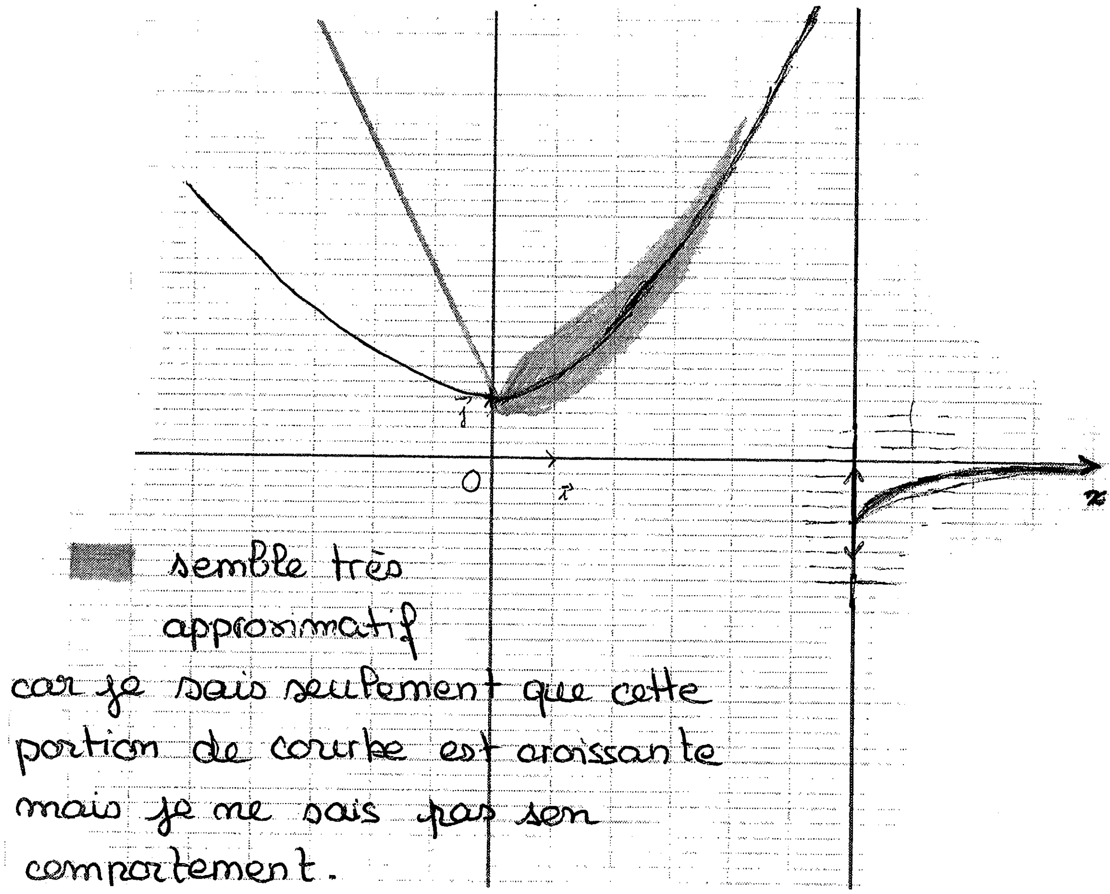
Extrait de la copie de Samira C.

Comme on le constate notamment sur cet exemple, le fait de ne retenir que la considération du signe de f ' pour construire (Cf ') amène alors des erreurs importantes. Le raisonnement sous-jacent au tracé proposé ici est le suivant : comme f ' > 0 sur [0,6[et f '< 0 sur]6,+∞[, Samira fait passer la courbe (Cf ') par le point de coordonnées (6,0) (alors qu'auparavant elle a pourtant bien remarqué que f n'est pas dérivable au point d'abscisse six[19]). Cela l'amène par voie de conséquence à effectuer pour f ' une courbe croissante puis décroissante sur [0,6[avec un maximum entre 0 et 6. En outre, le fait que f ' tende vers 0 à l'infini n'est pas perçu et la valeur attribuée à f '(0) est 0 au lieu de 1.

Seulement dix étudiants (20% de l'effectif) ont tenté, conformément à la consigne, de dresser un tableau des variations de f ' sur R, alors que 26 étudiants, soit 52% du public, présentent un tracé pour (Cf ') sans avoir effectué préalablement ce tableau, se contentant le cas échéant d'un tableau des variations de f. Cinq des dix étudiants précités, soit 10% de l'effectif, suggèrent pour f ' des variations et une courbe représentative plausibles.

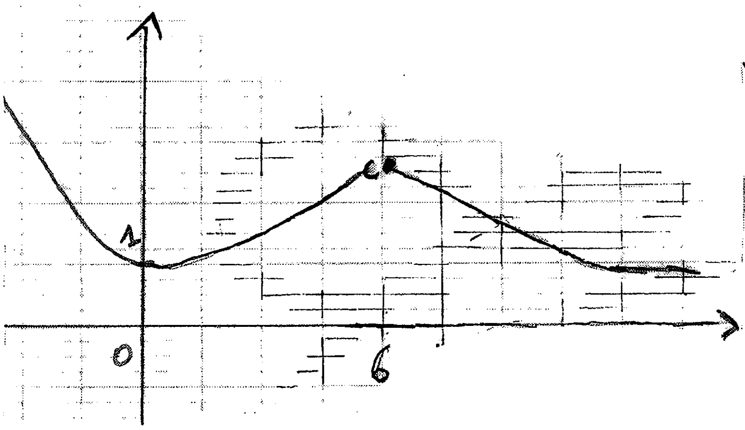
x	-∞		0		6			+∞
f	-∞	↗	0	↗	8 ‖	↘		0
f'		+	1	+	+∞ ‖	-1	-	
f'	+∞	↘	1	↗	+∞ ‖	-1	↗	0

[19] Elle indique d'ailleurs dans son tableau de variations, qui est celui de f et non de f ', que f ' tend vers l'infini quand x tend vers 6 par valeurs inférieures ou supérieures, ce qui contredit sa représentation de (Cf ').

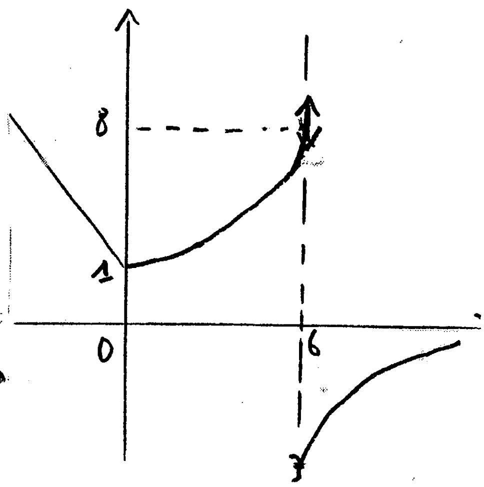


Extrait de la copie de Priscille C.

On peut répertorier divers types d'erreurs, en dehors de celui qui a été mentionné ci-dessus, comme le théorème en acte qui consiste à supposer la conservation de certaines propriétés dans le passage de la fonction f à sa dérivée f '. Ainsi, la pente verticale à gauche en 6 pour (Cf) (lorsque l'étudiant l'a diagnostiquée dans les questions précédentes) est rarement traduite par la présence d'une asymptote verticale d'équation x = 6 pour (Cf '), mais plutôt par un point d'arrêt, exclu ou non, éventuellement avec une pente verticale (comme pour (Cf)) si le point n'est pas exclu. Quelques étudiants traduisent aussi le « pic » rencontré en 6 pour (Cf) par un « pic » en 6 pour (Cf ').

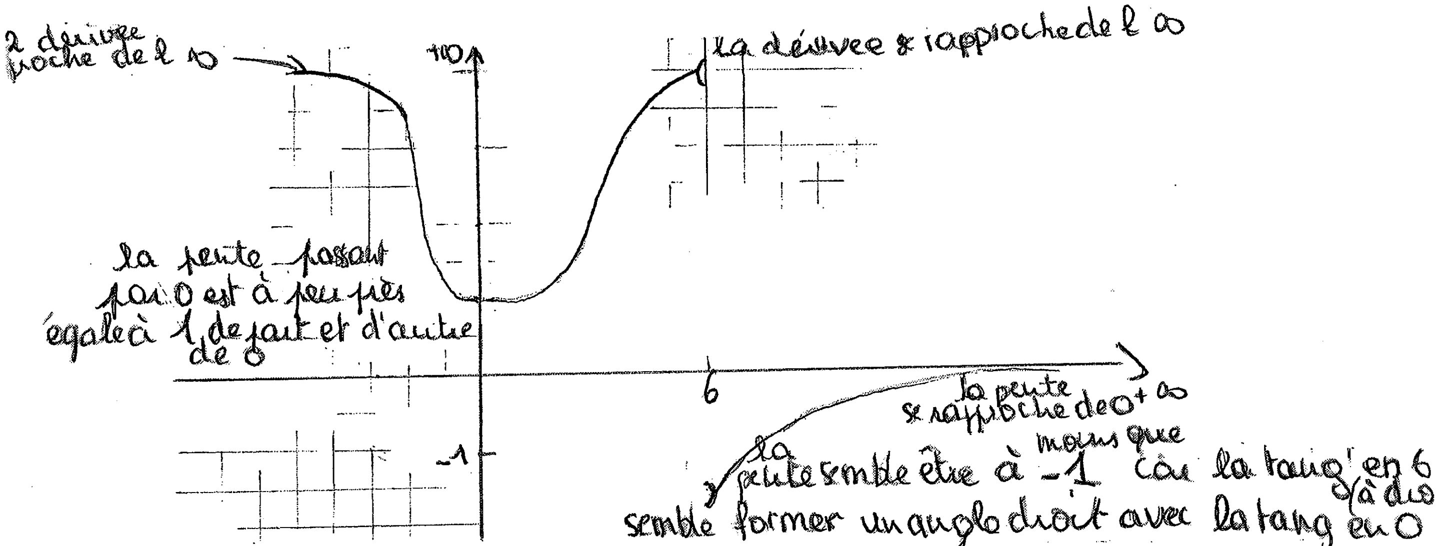


Extrait de la copie de Julien M.
(point d'arrêt exclus, à gauche en 6, et conservation du pic)



Extrait de la copie de Philippe V.
(point d'arrêt inclus, à gauche en 6, et pente verticale conservée)

D'après la courbe, la dérivée est positive jusqu'à $x = 6$ ~~exclu~~, puis ~~est~~ négative



Extrait de la copie de Delphine M. : La non dérivabilité de f en 6 est traduite par l'absence d'un point d'abscisse 6, mais le fait que lim $_{x \to 6^-}$ f '(x) = +∞, bien que signalé, n'est pas traduit graphiquement. Le graphe est correct pour x>6, incorrect pour x<0, Delphine M. ayant oublié que f est définie par : $f(x) = -x^2+x$ pour $x \leq 0$. Des explications plutôt nombreuses et satisfaisantes.

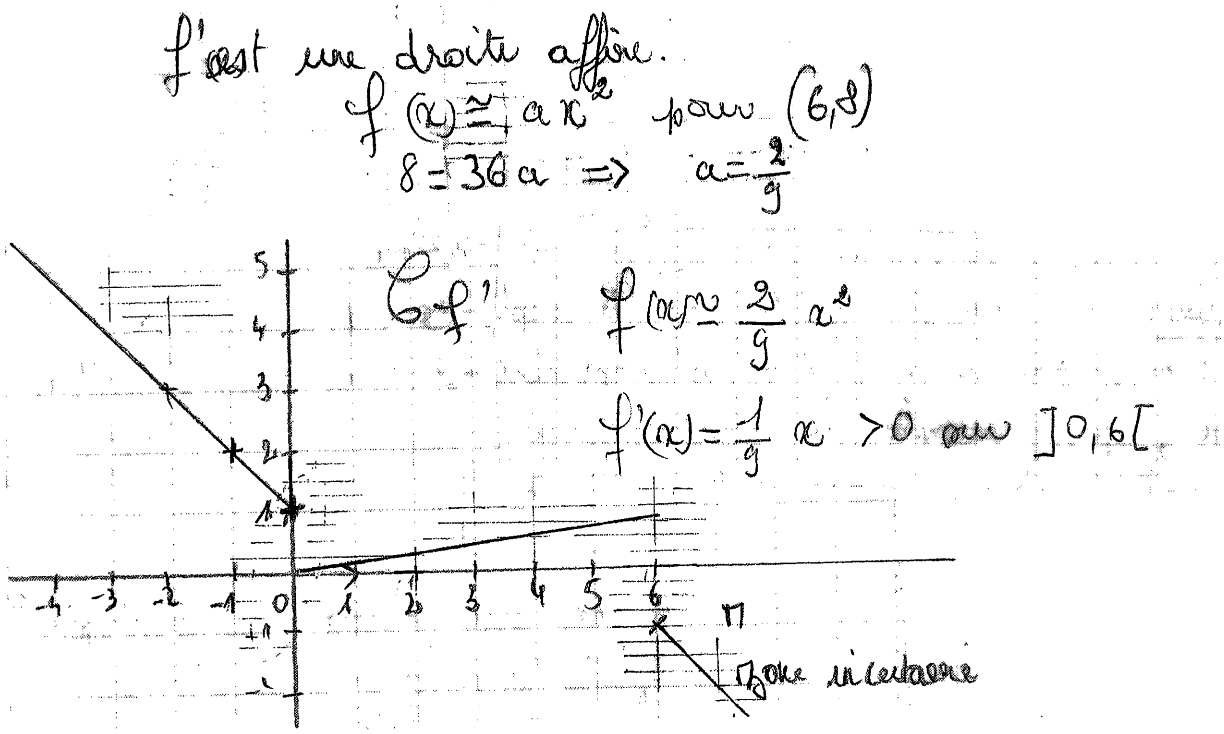
Une conséquence de ce principe en acte de conservation de certaines propriétés par passage à la dérivée semble tenir dans le fait que l'on relève un taux d'erreur deux fois plus élevé (20% au lieu de 10%) concernant la monotonie de f ' sur]6,+∞[que le taux d'erreur relatif à la monotonie de f ' sur [0,6[. En effet, f ' est strictement croissante comme f sur [0,6[, alors que sur]6,+∞[f est strictement décroissante, mais l'inclinaison des tangentes en un point étant de plus en plus faible, f ', négative sur cet intervalle, est strictement croissante.

Autre type d'erreur rencontré chez les étudiants ayant bien tenté d'extrapoler le tracé de (Cf ') sur R, six d'entre eux (représentant 12% de l'effectif) en oublient que f est définie analytiquement sur R- par $f(x) = -x^2+x$ (ce qui implique que f ' est affine sur R-), et effectuent, à l'instar de Delphine M. (voir ci-dessus), une branche de courbe décroissante quelconque sur R-.

Reste à évoquer le cas des dix étudiants (20% de l'effectif) ayant essayé de modéliser la fonction f par des expressions analytiques sur]0,6[et/ou sur]6,+∞[. Cet essai se solde systématiquement par un échec sur]0,6[, les conditions aux limites, qui ne sont pas ici correctement étudiées, ne pouvant par ailleurs être satisfaites vu les modèles retenus. En effet, ces modèles, paraboliques (dans sept copies) ou affines (dans deux copies), sont trop simples[20] et ne peuvent répondre aux diverses contingences de la courbe (Cf) fournie, surtout si l'on estime que lim $_{x \to 6^-}$ f '(x) = +∞. Même si l'on considère que f '(6) est défini et « grand », les conditions f(0) = 0, f '(0) = 1 et f(6) = 8 aboutissent dans le cas parabolique à

[20] Notons cependant que le choix du modèle parabolique était naturel par analogie avec l'expression analytique de f(x) fournie sur R-, les deux branches de la courbe obtenues pour $x \leq 0$ et $0 \leq x \leq 6$ pouvant être comparées.

f(x) = $ax^2 + x$ avec $36a + 6 = 8$ donc à $f(x) = x^2/18 + x$, ce qui donne $f'(6) = 5/3$, résultat manifestement incorrect si on regarde la pente à gauche en 6 pour (Cf).



Extrait de la copie de Catherine B. : Le modèle choisi conduit à $f'(0) = 0$ ce que ne suggère pas la courbe (Cf), mais la tentative est intéressante.

- pour $x \in]0;6[$: $f(x) = \frac{4}{3}x$

f est continue et dérivable sur $]0;6[$

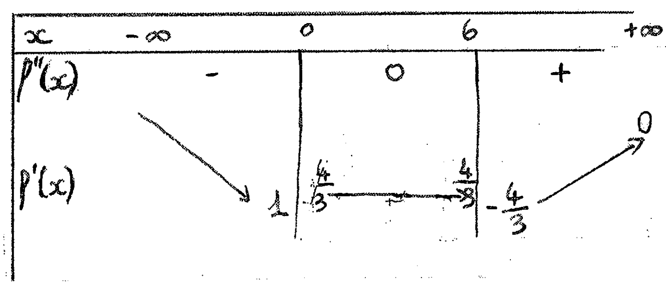
$f'(x) = \frac{4}{3}$ $\quad$ $f'(x)$ est continue et dérivable sur $]0;6[$. $f''(x) = 0$

$\frac{4}{3} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

on a donc, pour $x \in]0;6[$, $f'(x) > 0$ et $\mathcal{C}f'$ est constante ($f''(x) = 0$)

Extrait de la copie d'Evelise B. : un modèle qui ne convient pas sur]0,6[de façon plus manifeste.

Sur l'intervalle $]6,+\infty[$, une étudiante (Catherine B. ci-dessus) propose un modèle parabolique (incorrect), et trois étudiants proposent un modèle hyperbolique du type : $f(x) = a/x$, qui va s'avérer pertinent sous réserve d'adapter la valeur du coefficient a, ce qui est réalisé une fois, par Evelise B. :



• pour $x \in [6 ; +\infty[$ $f(x) = \frac{48}{x}$
f est continue et dérivable sur $[6 ; +\infty[$
$f'(x) = -\frac{48}{x^2}$
f' est continue et dérivable sur $[6;+\infty[$: $f''(x) = \frac{96}{x^3}$
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in [6 ; +\infty[$
On a donc, pour $x \in [6;+\infty[$, $f'(x)<0$ et $\mathcal{C}_{f'}$ croissante $(f''(x) > 0)$

Extrait de la copie d'Evelise B. : Pour f(x) = 48/x, on a bien f(6) = 8 et on constate que f '(6) = - 4/3, ce qui est une valeur acceptable compte tenu de la pente à droite en 6 pour (Cf).

Cependant, de nombreuses incohérences, assez aisément détectables, sont dans l'ensemble commises par une majorité d'étudiants ayant choisi d'introduire un modèle pour la fonction f.

Tableaux récapitulatifs des réponses fournies à la question 3 :

Tracé de la courbe (Cf ')	Absent	Limité à $x \leq 0$	Limité à $x \leq 6$	Complet mais erroné	Complet et correct
Nombre d'étudiants	17	5	2	21	5
Pourcentage	34%	10%	4%	42%	10%

Eléments de réponse :	Etude de f pour $x \leq 0$ réalisée :	Erreur par oubli de f(x) pour $x \leq 0$:	Signe de f ' sur R_+ donné (et correct) :	Variation de f 'donnée et correcte :	Variation de f ' donnée et incorrecte :
Nb étudiants	23	6	14	5	5
Pourcentage	46%	12%	28%	10%	10%

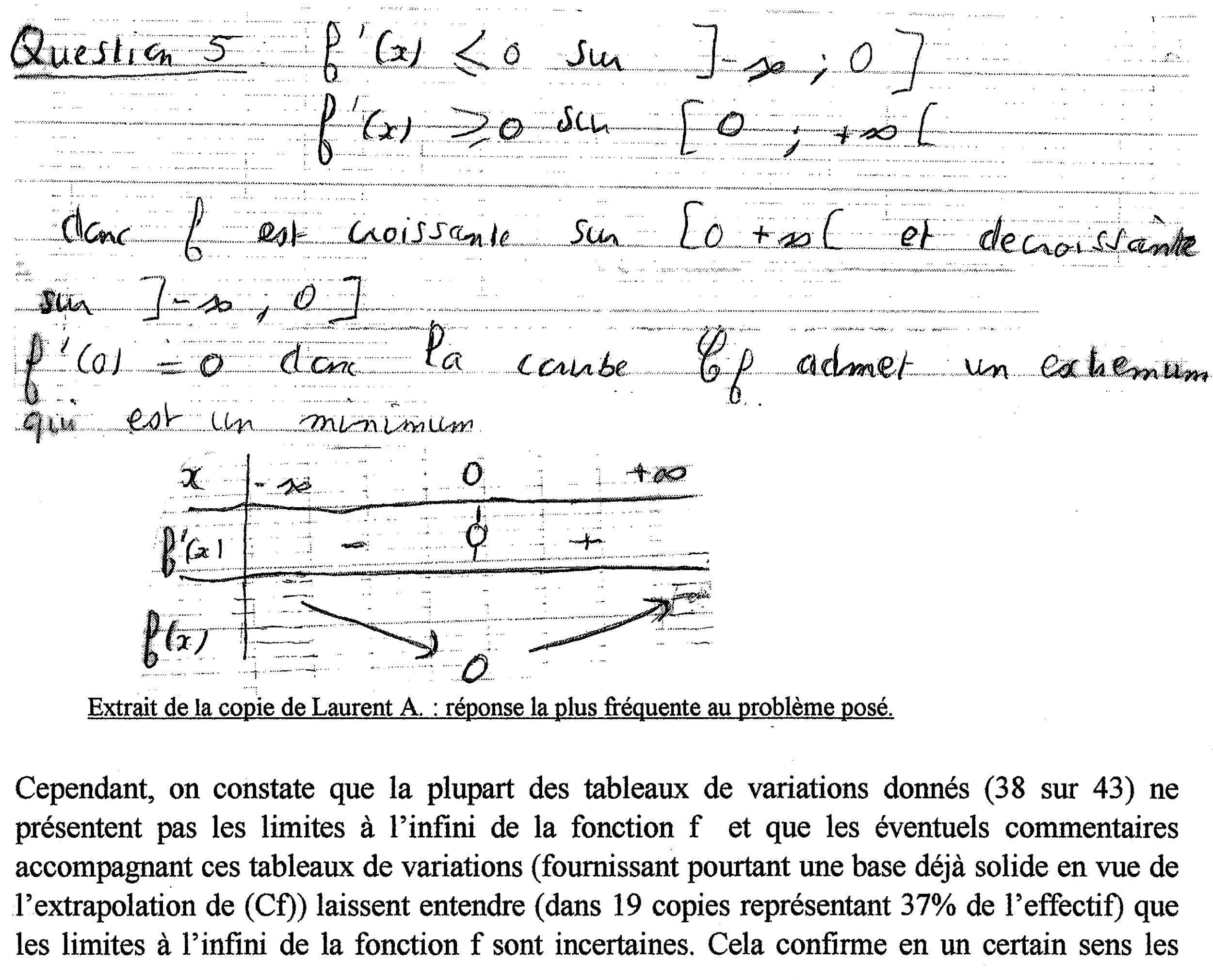
Modèles sélectionnés	Parabolique sur]0,6[, pas de modèle sur]6,+∞[:	Parabolique sur]0,6[et sur]6,+∞[:	Affine sur]0,6[et hyperbolique sur]6,+∞[:	hyperbolique sur]6,+∞[, et rien sur]0,6[:	Néant :
Nombre d'étudiants :	6	1	2	1	40
Pourcentage	12%	2%	4%	2%	80%
Nombre de modèles corrects :	0	0	Un modèle hyperbolique sur les deux	0	–

G/ ANALYSE DES REPONSES FOURNIES : EXERCICE 5 / VARIANTE 2.

1°) Etude des variations de f.

Il convient tout d'abord de remarquer que, comme on s'y attendait (cf analyse a priori), l'étude des variations de f à partir de la courbe représentative de f ' est beaucoup mieux réussie dans l'ensemble que celle, sollicitée dans la variante 1, des variations de la dérivée d'une fonction à partir de la courbe représentative de cette fonction.

Quarante-huit étudiants parmi les cinquante et un ayant travaillé sur cette variante 2 (soit 94% de l'effectif) lisent correctement le signe de f '(x) puis les variations de f à partir de la courbe (Cf ') fournie. Certains soulignent tout particulièrement la présence d'un minimum en 0 (point de coordonnées (0,1) fourni par le texte) ou d'une tangente horizontale à la courbe (Cf) en ce point et quarante-trois étudiants réalisent un tableau de variations (correct) pour f[21]. Un tel succès s'explique surtout par le caractère très classique, pour un étudiant issu de terminale S, de la situation proposée (application du théorème de monotonie maintes fois utilisé au lycée dans des études de fonctions, même si le contexte est ici différent), et un peu également par la simplicité de la courbe représentative de f 'présentée (par rapport à celle de la fonction f dans la variante 1).


Question 5 : $f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; 0]$

$f'(x) \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$

donc f est croissante sur $[0 +\infty[$ et decroissante sur $]-\infty ; 0]$

$f'(0) = 0$ donc la courbe C_f admet un extremum qui est un minimum

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Extrait de la copie de Laurent A. : réponse la plus fréquente au problème posé.

Cependant, on constate que la plupart des tableaux de variations donnés (38 sur 43) ne présentent pas les limites à l'infini de la fonction f et que les éventuels commentaires accompagnant ces tableaux de variations (fournissant pourtant une base déjà solide en vue de l'extrapolation de (Cf)) laissent entendre (dans 19 copies représentant 37% de l'effectif) que les limites à l'infini de la fonction f sont incertaines. Cela confirme en un certain sens les

[21] Toutes tâches très conformes au contrat de terminale (pratiques routinisées au lycée).

résultats obtenus pour la variante 1 : les étudiants lisent graphiquement le signe de la fonction dont la courbe est présentée, mais peu dépassent ce stade d'analyse (notoirement insuffisant dans la variante n°1, mais permettant déjà une progression spectaculaire dans la variante n°2)[22]. Il y a même deux étudiants qui, ayant d'abord indiqué une limite de $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$, rayent finalement cette information de leur tableau de variations, préférant dans le doute s'abstenir.

L'allure de la courbe est donnée par le tableau de variation mais il est impossible de connaitre les limites ~~en~~ aux alentours de $-\infty$ et $+\infty$

Extrait de la copie de Sandra C.

les seules choses dont je sois sûr à propos de cette courbe, c'est qu'elle est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; +\infty[$, donc qu'elle admet un minimum en 0 et $f(0) = 1$ (hypothèse)

Extrait de la copie d'Aurélien B.

de plus $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$

Par conséquent C_f aura des tangentes en $-\infty$ dont le coefficient directeur deviendra de plus en plus petit pour tendre vers $-\infty$

Donc $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

Extrait de la copie de Nicolas L. : un des rares étudiants à affirmer explicitement que les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ valent $+\infty$ en le justifiant.

Comme dans la variante 1, les autres commentaires des étudiants ont souvent trait, au fait que, selon eux, on ne dispose pas de points en nombre suffisant pour pouvoir tracer la courbe demandée : « *On ne connaît qu'un seul point de la courbe (Cf) ; il est donc impossible de*

[22] Illustration du point de vue métaphorique selon lequel « quand on contrôle la dérivée on contrôle la fonction mais la réciproque est fausse ».

connaître les limites à l'infini[23]*. Pour avoir l'allure de (Cf) il faudrait aussi les tangentes en plusieurs points pour pouvoir tracer correctement les arrondis.* » « *Le tracé est incertain car on manque de points concernant (Cf ') et les équations des tangentes sont inconnues.* »

A travers ces réponses, on comprend que les étudiants sont désorientés de ne pas être confrontés aux conditions habituelles des activités graphiques du lycée (étudiées dans une partie précédente de cette thèse), activités dans lesquelles des informations précises, aussi bien au niveau local qu'au niveau global, leur sont fournies.

2°) Comportement asymptotique de f à partir de (Cf').

Compte tenu des réserves ci-dessus décrites des étudiants au sujet des limites de la fonction f à l'infini, on ne s'étonne pas de constater que 17 étudiants (un tiers de l'effectif exactement) ne réalisent pas le tracé demandé pour (Cf). Les autres effectuent le plus souvent (24 étudiants, soit 47% de l'effectif) un tracé de type parabolique (qui n'est pas conforme à l'information : $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$ lisible sur la courbe fournie).

f(x) est de la forme.
$f(x) = ax^2 + bx + c$.
or $f(0) = 1$.
$\Rightarrow f(0) = c$
$\Rightarrow c = 1$

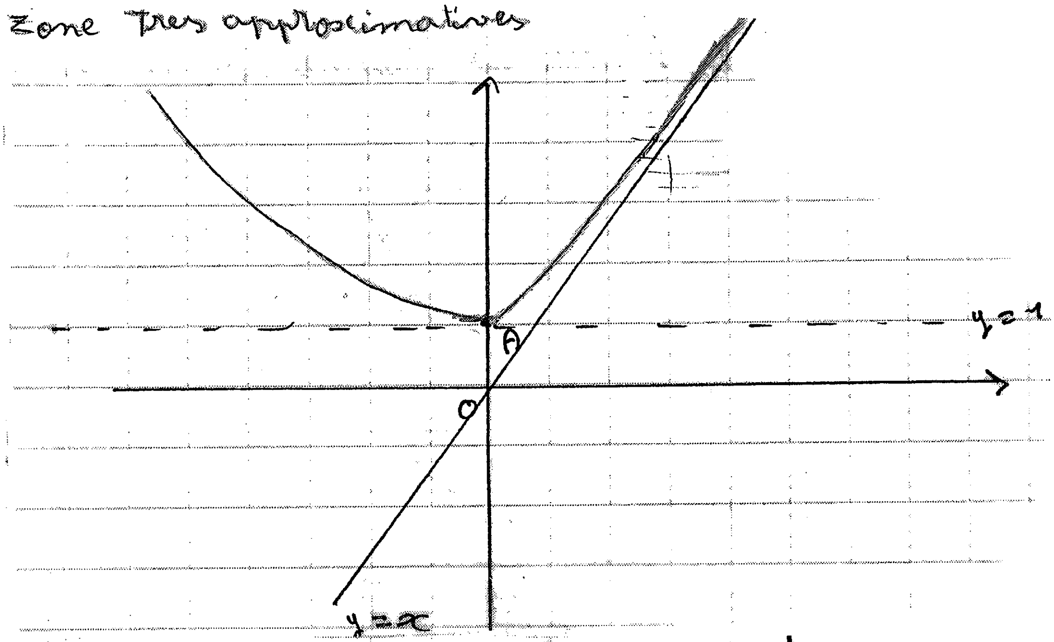
$f'(x)$ est de la forme :
$f'(x) = 2ax$.
on a donc $f(x) = ax^2 + 1$.
f(x) est en forme de parabole

f(x) a la forme :
$f(x) = ax^2 + bx + 1$
$\Rightarrow f'(x) = 2ax + b$.
or $f'(0) = 0$
$\Rightarrow f'(0) = b$
$\Rightarrow b = 0$

Extrait de la copie de Cyrille D. : tentative de justification du choix du modèle parabolique.

Seulement 7 étudiants présentent un tracé plausible, avec branche parabolique de direction verticale au voisinage de $-\infty$ et asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. Cependant le choix (correct) du modèle parabolique sur R- est sans doute ici le plus souvent le fait du hasard. Il s'impose de lui-même, car la parabole est le type de courbe décroissante puis croissante, sans point anguleux, le plus naturel. Mais sept étudiants n'hésitent pas, comme Mahmoudi M., à dire que le comportement asymptotique de la fonction f au voisinage de $-\infty$ n'est pas aussi clair pour eux qu'au voisinage de $+\infty$ (ce qui montre que la valeur de $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$ est moins facilement détectée sur la courbe, ou interprétée, que celle de $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$) :

[23] Curieux point de vue, qu'il faut sans doute mettre sur le compte d'un usage mal compris des calculatrices, que certaines pratiques acquises dans un environnement de lycée rendent possibles : pour déterminer la limite d'une fonction à l'infini, on teste suffisamment de valeurs de cette fonction pour de grandes valeurs de la variable.



La partie comprise entre $-\infty$ et 1 est très approximative car Cf ne nous permet pas de trouver d'asymptote contrairement à la partie comprise entre 1 et $+\infty$

Extrait de la copie de Mahmoudi M.

La présence éventuelle de l'asymptote oblique (d'équation y=x ou y=x+1 selon les copies) au voisinage de $+\infty$ fait l'objet de justifications du type « *la pente de la tangente à la courbe tendant vers 1 à l'infini, la courbe tend vers une droite asymptote de coefficient directeur 1* » ou encore du type « *on intègre l'égalité* : $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1$ » :

$f'(x)$ a une limite en $+\infty$ égale à 1 donc la fonction $f(x)$ doit admettre x comme limite à $+\infty$ donc tangent à (Δ)

Extrait de la copie de Geoffrey G. : cette argumentation est à rapprocher de phrases du type « *pour les grandes valeurs de x, f(x) est proche de x* » que l'on peut rencontrer dans certains manuels (Terracher 1ère S, p.162, dernières lignes, asymptote à la courbe (Cf) pour f(x) = x + 1/(x-1)).

* En $+\infty$:

Cf admet une asymptote horizontale $y = 1$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) - 1 = 0$

d'où en $+\infty$ $f'(x) - 1 = 0$
on en déduit $f(x) - x = d$
d constante d'intégration.
or pour $x = 0$ $f(x) = 1$
et $f(x) = x + d$
d'où $d = 1$
On en déduit que f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $\Delta : y = x+1$
On peut ainsi affirmer que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est $\lim_{x \to +\infty} x+1 = +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

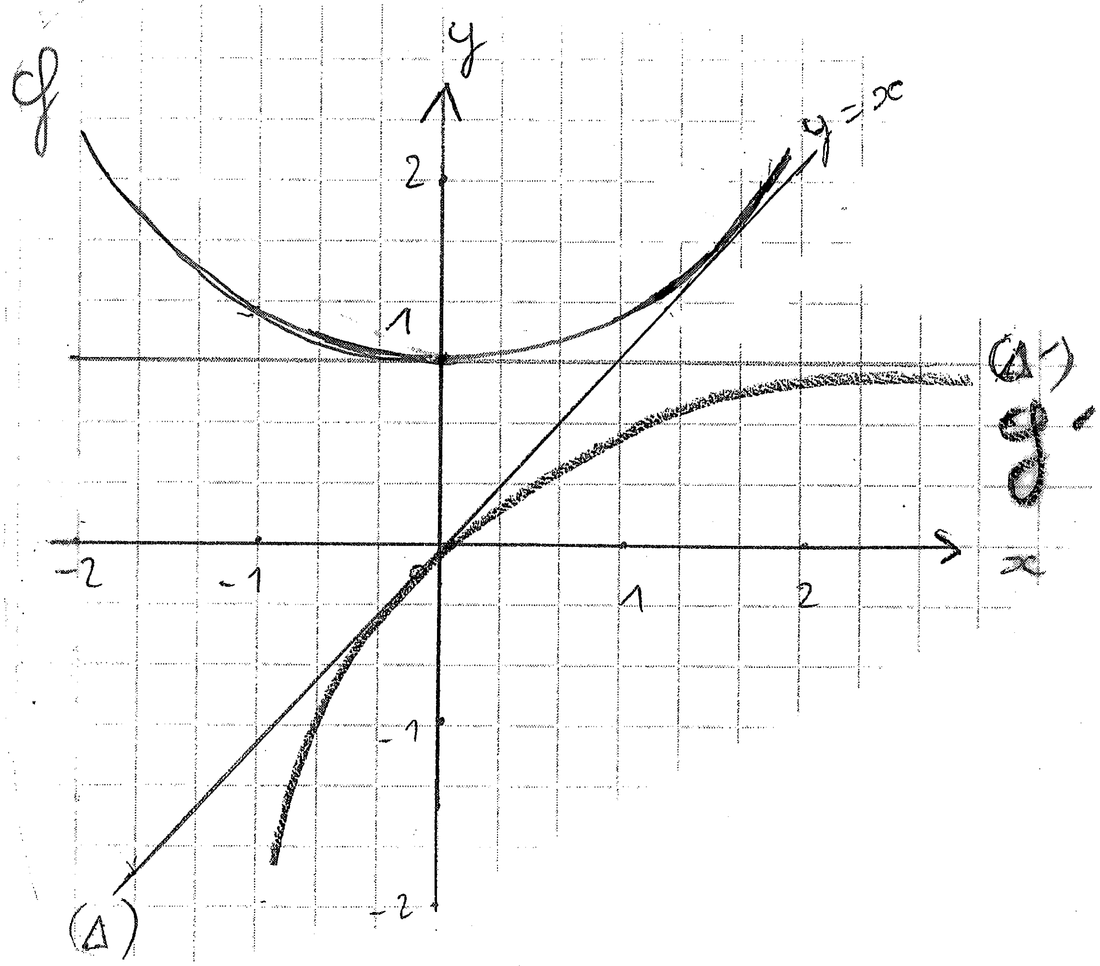
Comportement de f en $+\infty$ par rapport à Δ :
$f'(x) \leq 1 \iff f(x) \leq x+d$
f est toujours en dessous de Δ pour tout $x > 0$

Extrait de la copie de David P. : ici l'étudiant ne se contente pas de donner l'équation de l'asymptote mais précise la position relative courbe/asymptote en tentant d'argumenter avec précision (intégration de l'égalité $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$ et de l'inégalité $f'(x) \leq 1$).

Ajoutons que quelques étudiants (comme David P., ci-dessus) utilisent la présence (selon eux) d'une asymptote oblique de coefficient directeur 1 au voisinage de $+\infty$ pour en déduire le fait que « $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ », ce qui est une idée assez pertinente.

La confusion entre « droite tangente » et « droite asymptote » revient à onze reprises (21,5% de l'effectif) dans les copies (voir notamment l'explication fournie ci-dessus par Geoffrey G.), et l'on rencontre par exemple des phrases du type : « *Les droites d'équation y=x et y=1 sont tangentes à (Cf ')* » (idem avec « *asymptote* » à la place de « *tangente* »), cette confusion se traduisant parfois aussi à un niveau graphique :

Le tracé n'est pas sûr jusqu'à la tangente $y = x$ de f.



Extrait de la copie de d'Olivier B.

3°) Quelques procédures intéressantes.

Il convient de noter que la piste qui consiste à intégrer une égalité ou une inégalité n'est pas toujours mal exploitée comme c'est le cas ci-dessus, et quelques (rares) étudiants tentent d'utiliser cette méthode courante en l'analyse (y compris dans les classes de terminale S, même si elle est alors généralement « guidée ») ou encore l'inégalité des accroissements finis :

Lorsque $\begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$, $f'(x) < x$.

$\int_x^0 f'(x)dx < \int_x^0 x\,dx$ $(x<0)$.

$f(0) - f(x) < -\frac{x^2}{2}$ $f(0) =$

$$\forall x < 0, \; f(x) < -\frac{x^2}{2} \; ; \; f(x) > \frac{x^2}{2} + 1$$

Lorsque $x > 0$ $\quad f'(u) < x$

$$\int_0^x f'(u)\,du < \int_0^x x\,dx$$

$$f(x) < \frac{x^2}{2} + 1$$

Extrait de la copie de Frédéric G. : la démarche est correcte mais le renseignement obtenu n'est pas d'un grand intérêt ici.

on a sur $[0;+\infty[$: $0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$

x est un réel de l'intervalle $[0;+\infty[$, 0 appartient à $[0;+\infty[$ donc nous pouvons dire que sur $[0;+\infty[$:

$$0 \times (x-0) \leqslant f(x) \leqslant 1 \times (x-0)$$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant x$$

Extrait de la copie de Guillaume D. : utilisation presque correcte de l'inégalité des accroissements finis ; légère erreur due à l'oubli de la condition f(0) = 1.

4°) Utilisation de « modèles ».

Il y a beaucoup moins d'étudiants cherchant ici à modéliser la fonction f que dans la variante 1 (trois étudiants au lieu de dix, soit 5,9% au lieu de 20% de l'effectif), ce qui est assez compréhensible, dans la mesure où beaucoup d'étudiants ont cette fois réussi à obtenir les variations recherchées et semblent convaincus, à juste raison, que sur ce point au moins la réponse donnée est correcte. Pourtant, une fonction dont la courbe serait celle présentée dans l'énoncé est sans doute plus simple à mettre en évidence que dans la variante 1 (où il faut considérer une fonction définie par deux expressions différentes selon l'intervalle choisi,]0,6[ou]6,+∞[). Un des trois étudiants, Vincent F., ayant tenté de trouver un modèle convenable pour la fonction dérivée y est d'ailleurs presque parvenu[24], les deux autres échouant dans leur tentative (ils ont fait le choix d'un modèle parabolique incompatible avec le comportement de f au voisinage de +∞ ; voir plus haut le modèle de Cyrille D.).

Décrivons donc la modélisation correcte imaginée par Vincent F. Cet étudiant commence par effectuer trois observations qu'il tente d'interpréter. Il confond, dans sa deuxième observation, « tangente » et « asymptote » et donne ensuite l'interprétation d'une observation

[24] Commettant juste une erreur au moment de primitiver l'expression pressentie pour f '(x).

tout à fait différente de celle annoncée, et relative au fait que (Cf ') se situe « en dessous » de la droite d'équation y = x. Cependant, ses affirmations restent globalement correctes :

la courbe Cf' a pour asymptote horizontale la droite $y = 1$

la courbe Cf' a pour asymptote oblique la courbe d'équation $y = x$.

la courbe Cf' passe par 0 pour la valeur de x égale à 0 on déduit qu'il faut trouver une fonction répondant à ces 3 critères :

- quand x prend la valeur 0, g(x) aussi.
- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

et $g(x) < x$

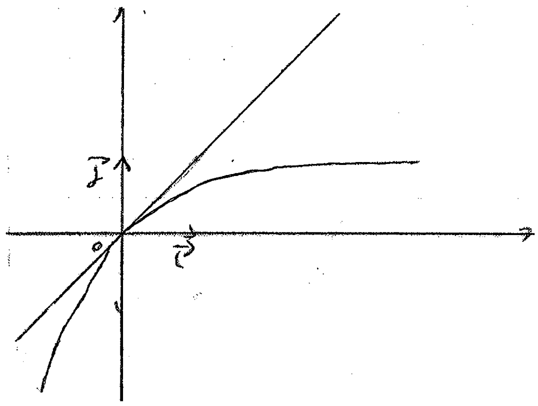
A partir d'une interprétation exprimée de façon un peu obscure, mais reposant sur une bonne intuition graphique de la situation (« *les critères de sélection de g sont quasiment les inverses et les opposés des caractéristiques de x → exp(x)* »), il parvient alors à dégager de sa recherche un modèle convenable via un ultime ajustement :

On remarque que les critères de selection de g sont quasiment les inverses et les opposés des caractéristiques de la fonction e^x.

Voyons donc si les critères de g(x) sont applicables à la fonction $-\frac{1}{e^x} = g_1(x)$

La fonction $g_1(x)$ remplie le 3^e critère mais par les deux premiers qui sont inférieurs de 1 aux exigences.

Essayons donc $g_2(x) = -\frac{1}{e^x} + 1$



Donc $f'(a)$ a pour équation : $-\frac{1}{ex}+1$.
Je fais une intégration pour trouver $f(x)$

Une telle modélisation montre, à notre sens, comment une activité du type de celle ici proposée, qui sollicite d'autres qualités (notamment d'observation et de créativité) que celles qui sont nécessaires à l'accomplissement d'exercices plus « ordinaires », peut permettre à certains étudiants imaginatifs d'exprimer des potentialités nouvelles, et au didacticien de penser des leviers différents pour l'apprentissage dans la transition secondaire / supérieur. Vincent F. s'adapte assez bien à notre activité, et manifeste des connaissances sur lesquelles cet apprentissage peut prendre appui. En outre, il convient de préciser ici que la prestation de cet étudiant pour l'ensemble des autres exercices proposés dans ce test reste très moyenne au sein de l'échantillon de copies analysées, ce qui tend à montrer que le type de tâche sollicité est sans doute très accessible pour la plupart des étudiants, et peut donc être exploité de façon bénéfique avec eux.

5°) Tableaux statistiques récapitulatifs pour la variante 2.

Divers types de tracés :	Parabole du type : $Y = ax^2+1$	Autres types de paraboles	Autres représent. graphiques incorrectes	BP direction Oy en $-\infty$, et asymptote oblique $+\infty$	Absence de représent. graphique
Nombre d'étudiants :	22	2	3	7	17
% :	43%	4%	6%	14%	33%

Etude des Variations :	Avec tableau correct, sans limites à l'∞	Avec tableau correct, et limites à l'∞	Variations correctes, sans tableau	Etude des variations incorrecte	Pas d'étude des variations
Nombre d'étudiants :	38	5	5	1	2
% :	74%	10%	10%	2%	4%

	Réserves émises sur les limites à l'infini	Réserves émises en $-\infty$ (modèle parabole)	Confusions entre tangente et asymptote	Modèle f(x) = … correct	Modèle f(x) = … incorrect	Procédures (du type intégration, accr finis..)
Nombre d'étudiants	19	7	11	1	2	3
% :	37%	14%	21,5%	2%	4%	6%

Nous concluons à présent ce chapitre concernant les résultats des tests par un petit bilan général de ce qu'ils nous apprennent du fonctionnement des étudiants au sortir du lycée, de leurs lacunes et insuffisances qu'il nous faut apprendre à gérer, mais aussi des acquis et des potentialités qui sont les leurs, dont on doit tirer le meilleur parti en début de DEUG Sciences.

V/ BILAN DES TESTS. AVANCEES DANS LA PROBLEMATIQUE.

A/ CHAMP D'INVESTIGATION SELECTIONNE.

Nous avons choisi de sonder ici les rapports personnels à la dérivée d'un public de bacheliers arrivant en DEUG Sciences, à partir des réponses qu'il donne à un test se situant *juste après les vacances d'été*, circonstances assez défavorables.

Mais surtout, les situations proposées, non routinisées en terminale, sont à considérer comme des « cas limites » d'un environnement de lycée, alors que le recul du temps les rend plus classiques au niveau Bac+1 :

Elles s'inscrivent dans une perspective totalement opposée à celle d'une épreuve de baccalauréat (notamment), l'objectif n'étant plus de sonder les étudiants sur des connaissances et des savoir-faire *minimaux*, maintes fois « bachotés », mais d'observer les réponses apportées à des problèmes *non standards*, les obligeant à une certaine réflexion. Nous avons ainsi écarté tout questionnement centré sur la dérivation formelle d'expressions, l'étude des variations de fonctions usuelles ou l'application directe d'équations de tangentes, toutes choses classiquement évaluées, peu problématiques, et en général plutôt bien maîtrisées par les étudiants ayant obtenu le baccalauréat.

Nous avons fait le choix de contextes et de questionnements originaux, mettant en jeu des changements de cadres et de registres, un rapport différent aux objets, aux définitions, au traitement formel, et tentant de forcer une attitude plus critique et engagée, une capacité à la distanciation vis à vis des connaissances et des moyens de prospection habituels du lycée. Il nous appartient à présent de résumer les lacunes et les difficultés observées à travers ce type de questionnement, en les relativisant, compte tenu de la spécificité de chacune des situations proposées pour le public concerné, et en soulignant aussi ce qui est positif dans le comportement des étudiants, et peut servir de point d'appui, ou de *levier*, au début de l'enseignement supérieur.

B/ DES IDEES ET DES TYPES DE FONCTIONNEMENT CONFIRMES D'UN EXERCICE A L'AUTRE.

1°) Rapport des étudiants au traitement formel (étude de la dérivabilité).

On retrouve dans divers exercices des deux tests, où une étude de dérivabilité est requise, des types de gestion similaires pour le problème posé.

Le comportement des étudiants, d'un exercice à l'autre, est marqué par quelques grandes tendances au sein desquelles s'exprime une certaine diversité.

Ainsi, nous avons rencontré à plusieurs reprises ce que nous avons appelé des procédures de « *niveau zéro* », qui, fondées sur la confusion entre les fonctions définies dans les exercices 1 et 2 du test de 1996 (et l'exercice 4 du test de 1995) et les fonctions usuelles $x \rightarrow ax^2-x+2$, $x \rightarrow b/x$, $x \rightarrow x(1-x)$, consistent à invoquer un théorème général du style : « *la fonction est dérivable sur son domaine de définition comme somme, produit... etc. de fonctions* *dérivables* ». Parfois, il y a dénaturation de cet argument aboutissant à l'affirmation un peu simplifiée : « *la fonction est dérivable partout où elle est définie* », ou bien au contraire adaptation de cet argument à la situation proposée : « *la fonction f est dérivable sur [0,1[comme fonction polynôme, et sur R par périodicité* ».

Par ailleurs, ceux qui tentent d'étudier localement la dérivabilité aux points où cela s'avère effectivement nécessaire procèdent à des mises en forme du problème assez variées (considération de la valeur de la fonction dérivée au point[1] ou de la limite du taux d'accroissement en ce point, en distinguant limite à gauche et à droite au point ou non,... etc.).

Cette diversité, ce foisonnement observés dans les comportements des étudiants est la résultante de la diversité des tentatives d'adaptation possibles des mécanismes routinisés au lycée à des situations complexes.

C'est ainsi que l'habitude de recourir à la fonction dérivée pour évaluer un nombre dérivé, amène bon nombre d'étudiants dans l'exercice 2 du test de 1996, à affirmer que $f'(0) = 1$ sous le prétexte que l'égalité $f(x) = x(1-x)$ *sur [0,1[* entraînerait le fait que $f'(x) = 1-2x$ *sur [0,1[*. Cette conception « *ponctuelle* » du nombre dérivé en lieu et place de la conception *locale* idoine n'est pas le fait du hasard et se retrouve dans les réponses apportées notamment dans la variante 1 de l'exercice 5 du test de 1995 (où $f(x) = -x^2+x$ pour $x \leq 0$ uniquement). Son développement découle de l'environnement assez limité de fonctions rencontrées en terminale.

La continuité et la dérivabilité en un point n'est pas toujours traduite en termes de limites, car l'utilisation de conditions de « raccordement » du type : $f_1(0) = f_2(0)$, $f_1'(0) = f_2'(0)$ (ex.1, test de 1996) ou $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$ (ex.2, même test), permet une approche à leurs yeux plus simple, efficace et opérationnelle dans leur champ d'expérience. Et une telle démarche, même si elle n'est pas conforme aux attentes institutionnelles (surtout en DEUG Sciences), témoigne bien d'une réelle adaptation de leur part.

Mais cette tendance à adapter ses connaissances selon un fonctionnement standardisé participe aussi d'une recherche de stratégies d'évitement de certaines difficultés techniques ou conceptuelles.

D'un exercice à l'autre, au sein du test de 1996, le calcul du nombre dérivé par utilisation de la définition (évaluation de la limite du taux d'accroissement), lorsqu'il est mené, l'est rarement de façon satisfaisante, du fait des difficultés techniques récurrentes qu'il occasionne (factorisations, simplifications, distinction à effectuer entre limite à gauche et à droite au point). Il fait l'objet aussi d'erreurs types en lien avec la signification du concept de limite, telles que celle de « *l'assimilation systématique à zéro*[2] » ou celle consistant à identifier comme formes indéterminées des formes qui n'en sont pas[3].

---

[1] Plus rarement de la *limite de la fonction dérivée* au point, alors que la considération de la limite de la fonction au point pour l'étude de la *continuité* est au contraire assez fréquente.

[2] Ne tentant pas de lever l'indétermination à laquelle il est confronté, l'étudiant croit que le nombre dérivé au point x_0 vaut 0, car le numérateur du taux d'accroissement tend (naturellement !) vers 0 quand x tend vers x_0.

[3] Le numérateur du taux d'accroissement vaut *exactement* 0, et l'étudiant croit voir une forme indéterminée dans l'expression « $\lim_{h \to 0} 0/h$ » parce qu'il a repéré que le dénominateur du taux d'accroissement tend vers 0.

Recourir systématiquement à la fonction dérivée permet d'éviter ces difficultés liées à l'utilisation de cette définition du nombre dérivé. Ainsi est-il naturel, pour un étudiant, dans l'exercice 3 du test de 1996, de dériver formellement l'expression de la fonction f définie par un radical et de constater que f ' n'est pas définie aux valeurs d'annulation 1 et 3 du trinôme situé sous ce radical pour en déduire que f n'est pas dérivable en ces points. Cependant, certains étudiants, conscients que ce n'est pas la démarche ici attendue, mais ayant l'intuition du fait qu'elle permet d'obtenir le même résultat que le calcul de la limite du taux d'accroissement de f en 1 et 3, présentent sans calcul préalable le résultat pressenti à partir de l'expression de la dérivée f ': « $\lim_{x \to x_0} (f(x)-f(x_0))/(x-x_0) = \infty$ » (pour $x_0 = 1$ et $x_0 = 3$). On trouve aussi des stratégies d'évitement *plus fines*, comme celle qui consiste à dire que la fonction $f : x \to (-x^2 + 4x - 3)^{1/2}$ se comporte en 1 et 3, valeurs d'annulation du trinôme concerné $(-x^2 + 4x - 3)$, comme $x \to \sqrt{x}$ en 0, donc n'est pas dérivable en ces points.

2°) Rapport des étudiants à la notion connexe de continuité.

On peut retirer des réponses des étudiants à ce sujet, des enseignements de <u>deux ordres</u> : ceux concernant spécifiquement la question de la continuité et ceux ayant trait à la gestion des *articulations* entre continuité et dérivabilité.

<u>**Les réponses fournies aux problèmes de continuité jalonnant les exercices des deux tests témoignent aussi d'une certaine diversité ayant ses propres spécificités en rapport avec cette notion encore marginale au lycée.**</u>

Concernant l'étude de la continuité par elle-même, notamment pour les fonctions des exercices 1 et 2 du test de 1996, on relève ainsi quelques comportements similaires à ceux observés pour l'étude de la dérivabilité, mais avec des nuances, qualitatives ou quantitatives. Ainsi, les procédures de « *niveau zéro* » (amalgame entre les fonctions étudiées et des fonctions usuelles) sont nettement moins fréquentes dans l'exercice 1 que pour l'étude de la dérivabilité, et un peu plus dans l'exercice 2 ; il y a donc une forte <u>sensibilité au contexte proposé</u>. Les arguments rencontrés, du style : « *f est définie sur R donc continue sur R* » ont un fondement plus difficile à cerner que ceux du type « *f est dérivable partout où elle est définie*[4] ». Sans doute sont ils liés au caractère plus « flou » du concept de continuité en terminale et font ils l'objet d'un amalgame dû à l'environnement rencontré au lycée, la quasi totalité des fonctions considérées étant continues là où elles sont définies[5]. En revanche, la mise en forme d'une condition de continuité en un point, moins sujette à variations et plus facile à effectuer que celle de dérivabilité en un point, aboutit plus souvent au résultat attendu lorsqu'elle figure dans la solution proposée.

<u>**Retenons ici que les modes d'action utilisés diffèrent selon le contexte, au moins autant que pour l'étude de la dérivabilité, en raison de la nécessité qu'il y a à contourner les obstacles liés au délicat concept de continuité.**</u>

---

[4] Il y a là un critère *opératoire* qui entre en jeu : se définissant à l'aide d'une ou plusieurs fonctions usuelles, l'expression de f(x) apparaît comme formellement dérivable partout où on la considère.

[5] Comme en témoignent les exemples de fonctions non dérivables et non continues en un point présentés par les étudiants dans l'exercice 2 du test de 1995.

Concernant la prise en compte au sein des exercices des liens existant entre continuité et dérivabilité, on est le plus souvent confronté à une gestion séparée, sans articulations, des problèmes relatifs à ces deux concepts.

Des conflits ne sont pas relevés, il n'y a le plus souvent pas de vérification de la *cohérence* entre les résultats issus du calcul et le théorème affirmant qu'une fonction dérivable en un point est continue en ce point. Ce théorème est cependant bien connu des étudiants, qui l'invoquent dans d'autres contextes : il est sous-jacent aux exemples de fonctions non dérivables car non continues qu'ils présentent dans l'exercice 2 du test de 1995, et il est parfois appliqué hors de tout calcul (voir l'exercice 1, item 3 du test de 1996). De façon similaire, l'icône de la fonction valeur absolue, cas prototypique de fonction continue, non dérivable en 0, est de l'ordre des connaissances *mobilisables* (exemple souvent cité dans l'exercice 2 du test de 1995), mais non *disponibles* (peu d'étudiants ont l'idée d'y faire appel lors de l'exercice 2 du test de 1996 où l'on demande si une fonction paire, définie sur R, est nécessairement dérivable en 0).

3°) Travail des étudiants dans le cadre graphique. Flexibilité entre cadres.

L'interprétation graphique de la dérivabilité en un point est requise dans divers exercices, issus des deux tests.

Des interprétations graphiques « simplificatrices » et certaines carences au niveau formel semblent accentuer les difficultés des élèves à réaliser les « allers-retours » nécessaires entre cadres algébrique et graphique.

Les réponses fournies par les étudiants convergent spontanément vers l'idée selon laquelle « *une fonction est dérivable en un point lorsque l'on peut tracer une (unique) tangente à la courbe en ce point* »[6]. Ce point de vue privilégie la présence d'un point anguleux comme principal cas de non dérivabilité au détriment du cas d'une tangente verticale, ici un peu oublié. Il faut le contexte de l'exercice 3 du test de 1996 (on y étudie une fonction dont la courbe représentative est un demi-cercle) pour que ce cas de non dérivabilité resurgisse à travers les réponses de certains étudiants. Cependant, dans le cadre algébrique, le cas de non dérivabilité qui leur vient le plus naturellement à l'esprit (voir l'exercice 2 du test de 1995) est justement celui correspondant à la présence d'une tangente verticale, car il est le plus simple à exprimer : $\lim_{x \to x_0} (f(x)-f(x_0))/(x-x_0) = +\infty$ (ou $-\infty$).

L'interprétation graphique de la continuité se révèle plus incertaine encore chez certains étudiants que celle de la dérivabilité, en raison de dérives langagières qui se développent à partir de l'interprétation qui en est donnée en terminale (« courbe sans sauts »). On le constate notamment dans l'exercice 3 du test de 1996 où la courbe fournie semble « *inachevée* » car elle correspond à une fonction définie sur [1,3] seulement, ce qui est interprété comme une discontinuité en 1 et 3.

Ce manque de flexibilité entre cadres graphique et algébrique est général et rend compte de fonctionnements bien séparés hors de toute sollicitation extérieure.

---

[6] Voir en particulier les exercices 2 et 5 du test de 1995.

Dans l'exercice 2 du test de 1996, où le recours au cadre graphique n'est qu'*implicitement* suggéré, bon nombre d'étudiants n'exploitent que faiblement les possibilités d'inférence que permet la représentation graphique fournie. Beaucoup affirment par exemple que f est dérivable sur R, alors que la présence de points anguleux aux valeurs d'abscisses entières est lisible sur la courbe de façon immédiate. Dans l'exercice 5 du test de 1995, les étudiants ont des difficultés à analyser l'évolution de la pente de la tangente à une courbe donnée, qui est représentative d'une fonction f, pour en déduire les variations de la dérivée f ', cette activité nécessitant un transfert d'information d'un cadre dans un autre à réaliser de façon autonome.

C/ POSSIBILITES ET LIMITATIONS LIEES AU CHAMP D'EXPERIENCE DU LYCEE.

1°) Des critères constitués dans un champ de pratiques donné.

En dehors des manières décrites, qui sont utilisées par les étudiants pour gérer efficacement l'étude de la continuité et de la dérivabilité sans avoir nécessairement recours au concept de limite[7], d'autres pratiques liées à cet environnement de lycée sont ici repérables à travers certaines réponses, correctes ou non dans l'exercice considéré (théorèmes en actes éventuels).

En lien avec des notions et des énoncés emblématiques de l'enseignement de terminale et un champ d'expérience limité aux fonctions usuelles, des critères se constituent ainsi chez l'étudiant.

L'identification d'un extremum là où la dérivée s'annule et change de signe est, par exemple, en général bien menée dans l'exercice 3 du test de 1996 et l'exercice 5 (variante 2) du test de 1995, parce que devenue routinière en terminale. Conséquence : certains étudiants tentent d'appliquer ce théorème familier dans des contextes qui ne sont pas appropriés. Par exemple, un étudiant affirme dans l'exercice 5 (variante 1) du test de 1995 que f '(6) = 0, puisque f change de sens de variation en $x_0 = 6$; or cette fonction f n'est pas dérivable en ce point, puisque la courbe (Cf) présente une angulosité en I(6,8)). Un autre affirme qu'une fonction croissante puis décroissante est dérivable, de dérivée positive puis négative, ce qui correspond à une réciproque (fausse) du théorème de monotonie usuellement appliqué pour l'étude de fonctions. Révélatrice aussi de l'environnement du lycée cette remarque d'une étudiante : « *les problèmes surviennent aux bornes de définition* ». Lorsque l'énoncé fournit des expressions usuelles, on regarde si on peut les dériver formellement, ce qui, pour certains, atteste le cas échéant de la dérivabilité des fonctions considérées,... etc.

2°) Problèmes écologiques et limitations liés à ce champ d'expérience.

L'analyse des réponses fournies aux exercices des deux tests montre bien que **les notions relatives à la dérivabilité enseignées au lycée n'ont pas toutes le même statut dans cet environnement.**

---

[7] La limite (finie) d'une fonction (ou de sa dérivée) en un point s'identifie à la valeur de cette fonction (ou de sa dérivée) en ce point pour le panel de fonctions étudiées au lycée, généralement continues ou prolongées par continuité en ce point.

On peut ainsi distinguer :

- des notions **opérationnelles** (propriétés algorithmiques : formules de dérivation, théorème de monotonie, etc.) largement routinisées,

- des **idées graphiques** qui peuvent être activées sur demande, mais avec lesquelles les étudiants n'ont pas autant de familiarité, une flexibilité restant à construire après le lycée au moyen de scénarios adéquats,

- des notions ayant surtout un statut **culturel**, telles que la définition du nombre dérivé en un point ou le théorème affirmant que toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

On identifie ainsi des notions ayant des difficultés à trouver une « niche écologique »[8] au sein d'un environnement de lycée.

La définition du *nombre dérivé* ne parvient pas à trouver réellement son champ d'action dans un environnement de fonctions usuelles où recourir à la *fonction dérivée* semble le plus souvent possible (bien qu'inapproprié, ce recours est utilisé par les étudiants dans l'exercice 2 du test de 1996, ce qui met le doigt sur ce problème). De même, le théorème : « *toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0* (sans réciproque) » n'est compréhensible que placé dans un habitat qui respecte ses *besoins trophiques*[9] : multiplicité de contre-exemples (et pas seulement $x \to |x|$ et $x \to \sqrt{x}$ en 0), travail sur la comparaison des infiniment petits d'ordre 0 et d'ordre 1, sur la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante,... etc.

Dans un environnement de lycée, c'est un *rapport au savoir* particulier qui se construit à travers les pratiques dans lesquelles est engagé ce théorème : l'accent est surtout mis sur le fait que les fonctions dérivables fournissent tout un *stock* de fonctions continues, ce qui permet au contraire de *contourner* l'obstacle du concept de continuité au lieu de l'*analyser*, tout en favorisant l'amalgame des notions. Ce théorème sert principalement l'avancement du cours (identification de fonctions continues) et il n'est donc guère étonnant que son évocation par les étudiants dans les exercices des deux tests soit dépendante du *contexte* proposé.

3°) Rapport à la généralité et à la démarche de preuve. L'hypothèse d'un rapport au savoir trop consensuel.

Le travail sur des conjectures (exercice 2 du test de 1996) a représenté par sa seule nature (les conditions de réalisation technique étant par ailleurs très favorables) des difficultés importantes pour les étudiants.

L'analyse menée montre qu'un rapport idoine à la généralité et à la démarche de preuve reste à construire à partir du DEUG, certaines conceptions initialement forgées entrant en conflit avec un tel rapport.

---

[8] Notion introduite par Y.Chevallard et reprise en 1997 par M.Artaud dans son cours de la IXème école d'été de Didactique. Il s'agit de la *fonction* qu'occupe une notion au sein d'un *habitat* donné (lieu où on la rencontre et ensemble des objets avec lesquels elle entre en association).
[9] Objets (pas uniquement mathématiques) dont ce théorème a besoin pour vivre dans l'écosystème donné [ibid.].

Il y a des étudiants qui n'arrivent pas à démarrer ce travail sur des conjectures requérant de l'initiative personnelle[10]. On assiste à des confusions entre cas général et cas particulier, mais aussi à des *généralisations abusives* à partir d'exemples précédemment étudiés, ce qui peut être considéré en un certain sens comme une attitude conforme à la façon dont beaucoup d'énoncés sont introduits dans les manuels de lycée.

On peut relever par ailleurs des *difficultés à généraliser*, détectables à travers des réponses fournies dans l'exercice 2 du test de 1995, du type : « *Il y a plusieurs fonctions non dérivables.* » ou : « *Toute fonction avec des valeurs absolues est non dérivable*[11]. ». La première réponse est sans doute à rapprocher du fait que l'on ne généralise pas l'étude de points anguleux en terminale[12], donnant ainsi aux quelques cas traités le statut « *d'exemple qui confirme la règle* » et non de contre-exemple générique.

Du côté de la démarche de preuve, on assiste davantage à des fonctionnements par recherche de concordance que par recherche de l'argument décisif[13]. Dans cette optique, les éventuels conflits (notamment celui introduit dans l'exercice 3 du test de 1996 par le questionnement lui-même) sont le plus souvent minimisés voire non relevés.

Nous faisons ici l'hypothèse selon laquelle une certaine représentation des Mathématiques comme discipline non problématique s'installe chez l'élève, en lien avec le rapport au savoir construit au lycée.

La présence de réponses « *consensuelles* » est assez générale : peu de critiques et de remises en cause des résultats, même lorsque celles-ci sont explicitement sollicitées par le texte (comme c'est le cas dans l'exercice 5 du test de 1995), quelques constats sans analyse, une propension à invoquer les « incertitudes de lecture » pour expliquer certaines incohérences de la représentation graphique au regard des résultats issus du calcul caractérisent les réponses fournies. La fonction même de « *vérification* » leur semble parfois étrangère, comme l'idée qu'il puisse y avoir contradiction entre les résultats issus du travail dans un cadre et ceux obtenus dans un autre cadre et que c'est justement cette contradiction qui est alors intéressante à analyser. L'habitude de situations très régulières amène des étudiants à s'appuyer ici sur des théorèmes en actes du type : *« conservation de propriétés par passage à la dérivée » ou « intégrations illicites de résultats de limites ».* Les situations *non étiquetées* qui sont proposées dans ces tests sont vues comme des situations particulières auxquelles il convient d'adapter de tels principes, naturels dans l'optique des questionnements standards du lycée. Seuls ces « cas limites » présentent cependant la complexité nécessaire à des traitements différenciés, offrant ainsi le relief nécessaire à la construction d'une véritable argumentation.

4°) Des éléments positifs sur lesquels l'enseignement de DEUG peut s'appuyer.

Ayant précisé les divers manques qui ressortent des réponses apportées par les étudiants dans ces tests, il nous faut également en souligner les aspects positifs.

[10] La stratégie diffère selon que l'on tente de prouver qu'une proposition est vraie ou qu'elle est fausse.
[11] Donc a priori la fonction g définie sur un intervalle I par : $g(x) = \ln(|f(x)|)$ où $f(x) \neq 0$ sur I, aussi.
[12] Selon les consignes du programme en vigueur (B.O n°7 du 7/7/1994).
[13] Comme le constate aussi L.Trouche dans différents travaux ; il parle notamment de fonctionnement par « *accumulation de preuves* » [ibid.].

- **Il convient tout d'abord de relever que ces étudiants manifestent bon nombre de connaissances et même une certaine familiarité avec les notions et les pratiques les mieux routinisées au lycée.**

Ils étudient couramment les variations d'une fonction et sont habitués à repérer des extrema, ils peuvent aisément déterminer une équation de tangente et ont dans l'ensemble une bonne appréciation graphique du nombre dérivé d'une fonction en un point ; ils sont souvent capables d'identifier les cas de non dérivabilité en un point rencontrés au lycée. Tout cela peut donc servir de point d'appui à un enseignement de DEUG.

- En outre, on a pu remarquer, notamment à travers l'exercice 2 du test de 1996 qui les faisait travailler sur un objet nouveau pour eux : la dérivée symétrique, que **la plupart des étudiants n'ont pas de blocage *a priori* vis à vis d'un monde formel neuf**. Ils n'ont pas rejeté ce nouvel objet formel qui leur a été présenté, mais ont plutôt cherché à adapter leurs connaissances et leurs pratiques antérieures, même maladroitement, pour répondre aux questions qui leur étaient posées. **L'idée même de chercher le rapport entre les deux notions, de dérivée et de dérivée symétrique, le type de problématique proposé n'ont pas été rejetés**.

Sans doute la forme du questionnement (travail initial sur des exemples) a-t-elle facilité l'entrée des étudiants dans le problème posé, mais n'est-ce pas justement le rôle du didacticien que de tenter de faciliter la *prise de sens* et les possibilités d'*instanciations* chez les étudiants à partir de la culture qui est la leur en arrivant à l'Université ? Ce que montre surtout leurs réponses, c'est la nécessité de *problématiser* ce besoin d'évolution du rapport aux concepts, l'effort didactique qui nous reste à réaliser pour leur faire sentir les enjeux d'une telle évolution, justifier et mettre en place une *opérationnalité nouvelle* en DEUG pour dépasser la conformité de fonctionnement du lycée et trouver des types d'activités adaptées à cette fin, permettant cette négociation.

- Autre élément positif, certains étudiants (pas nécessairement toujours les plus « performants » sur l'ensemble d'un test) ont pu s'engager dans des *démarches de recherche* faisant intervenir des *modèles* répondant à une situation donnée et ce, en dépit du panel d'exemples de fonctions assez peu varié à leur disposition au sortir du lycée. **Une certaine *créativité* s'est alors exprimée à travers leurs réponses, signe encourageant d'une plus grande *implication personnelle* dans le travail mathématique.**

Enfin, des procédures correctes parfois assez complexes (par ex. intégration d'inégalités, utilisation de l'inégalité des accroissements finis...) ont pu aussi être menées par des étudiants de façon autonome, hors de toute sollicitation extérieure (exercice 5 du test de 1995). Même si ces procédures ne se sont pas toujours révélées pertinentes par rapport au problème posé, elles témoignent des tentatives chez les étudiants d'*appropriation* de la situation étudiée, lorsque celle-ci est construite de façon à leur laisser une certaine marge de liberté et d'initiative personnelle.

CHAPITRE VII : CONCEPTION D'ATELIERS SUR LA DERIVEE, VISANT A PRENDRE EN COMPTE QUELQUES GRANDES EVOLUTIONS EN PREMIERE ANNEE DE DEUG ET A LES GERER.

I/ INTRODUCTION. PLAN DE CE CHAPITRE.

L'étude des rapports institutionnels à la dérivée (chapitres IV et V de cette thèse) a permis de mettre à jour la présence d'un *vide didactique* entre les deux institutions, du lycée et de l'université, vide caractérisable par divers types de tâches qui se démarquent non seulement des « standards » d'exercices de terminale, mais aussi des tâches classiques du DEUG.

L'observation du comportement des étudiants, de leurs *efforts d'adaptation* de leur culture du lycée face aux questionnements proposés dans les tests d'entrée à l'université, a confirmé ce résultat au niveau des rapports personnels qu'ils entretiennent avec la dérivée (chapitre VI). Cette observation a ainsi révélé la nécessité d'instaurer dès les débuts du DEUG un rapport nouveau non seulement aux concepts, mais aussi au travail mathématique, en lien avec une *évolution des problématiques* abordées.

Au regard des résultats obtenus à ces tests, nous faisons à présent l'hypothèse qu'un *dispositif par ateliers*, constitués de petits groupes de quatre ou cinq étudiants travaillant en interaction les uns avec les autres sur un thème donné, est apte à mettre en relief les *enjeux nouveaux*, liés à cette évolution des rapports au savoir et aux pratiques, de sorte que ces enjeux soient compréhensibles pour ces étudiants. Un tel dispositif présente en effet des possibilités d'*objectivation* des idées, de *médiations* de la part de l'enseignant, de *négociation* de comportements différents de ceux du lycée face à des situations inhabituelles apportant un questionnement neuf sur les Mathématiques.

Ces ateliers ne sont donc pas seulement destinés à remplir une fonction de *diagnostic*, mais il s'agit aussi de *construire* et de *tester* des situations permettant d'aider à gérer les problèmes de *dévolution* qui se posent dans la transition étudiée. Il nous faut ainsi trouver des *entrées pertinentes* dans ces situations afin de rendre gérable cette rupture, et à cet égard, s'inspirer des résultats obtenus aux tests pour imaginer ce qui peut être viable ou non. A terme, nous visons l'élaboration future d'ingénieries didactiques adaptées au problème posé. Mais au stade de cette thèse, nous ne nous fixons pas pour objectif que ces ateliers deviennent des « *modèles à prendre en exemple* » de gestion de la transition. Nos constructions ont un caractère *exploratoire*, mais nous espérons que l'étude de leur fonctionnement effectif nous permettra d'établir un « cahier des charges » en vue de réaliser un bilan des *contraintes* que doit respecter tel ou tel atelier dans la transition étudiée.

Dans ce qui suit, nous commencerons par présenter succinctement les deux ateliers sélectionnés, en justifiant nos choix effectués pour chaque atelier, tant au niveau du *thème* qu'au niveau de la *stratégie pédagogique* adoptée (partie II). Nous préciserons ensuite les conditions générales de déroulement de ces ateliers et notre méthodologie (partie III), avant de réaliser une analyse a priori de chacun des trois ateliers (partie IV).

II/ CHOIX EFFECTUES POUR CES ATELIERS.

A/ CONTRAINTES COMMUNES AUX DEUX ATELIERS.

Il nous est apparu d'abord que ces ateliers devaient le moins possible faire appel à un contenu *spécifique* de niveau DEUG, et ce, pour deux raisons distinctes.

D'une part, il semble d'autant plus facile de solliciter chez les étudiants un travail particulier sur un plan *qualitatif*, symptomatique des nouveaux rapports au savoir induits par la transition lycée / université[1], que ce travail concerne des objets avec lesquels ils sont déjà largement *familiarisés*. D'autre part, il nous importait de montrer ici que cette transition est largement indépendante des contenus et aussi de *le* montrer *aux étudiants*, et l'on pouvait craindre que la nécessité de recourir dans ces ateliers à un certain nombre de notions spécifiques du DEUG ne crée un effet parasite entravant notre projet. Ainsi avons-nous évité tout questionnement mettant en jeu de nouvelles fonctions (trigonométriques ou hyperboliques réciproques), formules de Taylor ou développements limités.

En revanche, nous avons fait en sorte de respecter la *contrainte de légitimité* de ces activités, qui doivent s'intégrer aussi naturellement que possible au travail en cours des étudiants, le nourrir, et s'avérer ainsi utiles à l'apprentissage visé par le programme de cette première année de DEUG A. Finalement, la seule notion propre au niveau DEUG A qui soit nécessaire à la réalisation de (l'un de) ces ateliers est le théorème des accroissements finis. Cela n'est pas fortuit, puisque ce théorème joue un rôle crucial à l'interface entre lycée et université, n'ayant ni la même *nature* (c'est un théorème d'existence), ni la même *fonctionnalité* que les inégalités des accroissements finis (déjà étudiées au lycée), bien qu'il se situe dans la filiation de ces dernières. Derrière une apparence de continuité, due au fait que ce théorème possède déjà des germes dans la culture du lycée, se cachent notamment des problèmes spécifiques d'*autonomie* pour son utilisation, que le second atelier peut mettre en exergue.

Précisons enfin que ces ateliers ne requièrent pas le niveau de formalisation de la définition en ε, α des limites et de la continuité, dont l'apprentissage est une spécificité forte du début de l'enseignement supérieur. C'est aussi en ce sens qu'ils répondent à notre préoccupation : faire travailler les étudiants sur des types de tâches qui correspondent bien, selon nous, au vide didactique entre lycée et université caractérisé dans notre analyse théorique.

B/ DESCRIPTION SOMMAIRE DES ATELIERS. CHOIX DES THEMES ET DES STRATEGIES PEDAGOGIQUES.

Notre premier atelier met en jeu un travail sur la compréhension des différentes *définitions* de la dérivabilité en un point, travail difficilement compatible avec un environnement de terminale, quoique *théoriquement* possible au vu des notions enseignées à ce niveau. On

[1] Telle qu'elle a été caractérisée au terme du chapitre I (partie théorique de cette thèse).

présente ainsi aux étudiants diverses propositions « ressemblant » d'assez près, sur un plan formel ou linguistique, aux définitions données au lycée de la dérivabilité d'une fonction en un point[2], et on leur demande de se prononcer sur les liens d'implication logique existant entre chacune de ces propositions et l'expression de la dérivabilité en ce point. La tâche sollicitée est donc emblématique des exigences nouvelles en DEUG A, puisqu'elle met en jeu divers *niveaux de formalisation* et la compréhension de la différence existant entre *condition nécessaire* et *condition suffisante.*

A posteriori, on peut se rendre compte que d'autres options pouvaient être envisagées pour enclencher un travail sur les définitions : à partir de deux objets voisins bien ciblés (dérivée et dérivée symétrique), faire travailler les étudiants sur des exemples, l'idée de *modélisation*, ou sur la *fonctionnalité* des définitions (en les amenant par exemple à comprendre, par comparaison des performances, pourquoi les calculatrices évaluent le nombre dérivé en un point à l'aide de la dérivée symétrique plutôt que par la dérivée classique[3]). Le type d'atelier pour lequel nous avons finalement opté est d'une *dévolution* plus délicate, et reste assez typique dans une culture de type universitaire. Ses exigences n'en font donc pas *a priori* un atelier facile à faire accepter aux étudiants en début de DEUG A et par conséquent, toutes leurs tentatives d'adaptation au problème posé, avec leurs modalités d'expression, constituent des signes d'évolution à analyser de près.

Notons aussi que dans l'atelier sous sa forme initiale, on demandait *directement* aux étudiants de se prononcer sur le fait que les propositions présentées étaient, ou non, des « formes nouvelles » de la définition de la dérivabilité en un point. Le déroulement d'une préexpérimentation à l'université de Marne la Vallée[4] nous a amené à distinguer au sein de ce questionnement deux étapes logiques bien distinctes : étude d'un sens d'implication, puis du sens réciproque, entre la propriété de dérivabilité et chacune des propositions.

Le second atelier fait travailler les étudiants sur des conjectures concernant une certaine *classe de fonctions*, que nous baptisons ici des fonctions *« à croissance forte[5] »* sur un intervalle I, et s'inscrit ainsi dans l'œuvre de sensibilisation nécessaire à l'étude *d'objets généraux* en DEUG. Cet atelier nous semble assez bien respecter une certaine synergie avec le programme de première année de DEUG A, puisque la classe de fonctions étudiées est strictement incluse dans celle des fonctions convexes, ordinairement abordée à ce niveau d'apprentissage. Précisons cependant qu'aucune notion sur les fonctions convexes n'est nécessaire à la réalisation de cet atelier.

Etant donné que les étudiants ne sont pas familiarisés au départ avec l'objet d'étude qui leur est soumis : les fonctions « à croissance forte », nous avons opté ici pour un scénario en *deux* parties. Une recherche guidée et l'observation préalable d'exemples (première partie de l'atelier) jouent un rôle médiateur dans le processus de familiarisation à cette classe de fonctions. Elles permettent à l'étudiant de démarrer son activité en « terrain connu » : la

[2] En l'occurrence la définition par « limite du taux d'accroissement » et celle par « approximation affine ».
[3] Une telle activité figure dans la brochure « *Des fonctions et des graphes* » écrite par R.Bernard, C.Faure et M.Noguès, et publiée par l'IREM de Montpellier II (pages 60-67).
[4] Marquée par des phénomènes d'amalgame des étudiants, une incapacité de leur part à saisir le problème posé c'est à dire à le percevoir en termes de « condition nécessaire » et de « condition suffisante ».
[5] Elles se caractérisent par leur dérivabilité sur l'intervalle I, leur stricte croissance et la stricte croissance de leur dérivée sur I.

considération de cas *particuliers*, l'aidant ainsi à mieux cerner la *réalité* de ces fonctions. La seconde partie de l'atelier est consacrée à *l'analyse de conjectures* sur les fonctions à croissance forte, conjectures à établir selon un canevas assez précis que nous indiquons (approche graphique intuitive puis démonstration rigoureuse). Les étudiants ont alors la possibilité de tester préalablement ces conjectures sur les exemples étudiés en première partie, avant de tenter de démontrer leur validité.

III/ CONDITIONS GENERALES DE DEROULEMENT. METHODOLOGIE.

Précisons tout d'abord qu'initialement ces ateliers devaient être testés sur une population plus importante issue de plusieurs universités (Lille, Besançon, Orléans, Marne la Vallée...). Mais de fait, par suite de divers problèmes, les expérimentations ont toutes été menées pendant le second semestre universitaire 1997, entre les mois de février et mai, conjointement au sein des seules universités d'Orléans et de Marne la Vallée. Par ailleurs, les circonstances dans lesquelles elles ont eu lieu n'étaient pas exactement les mêmes dans les deux établissements :

- A Orléans, les deux séances d'atelier ayant eu lieu (ateliers 1 et 2) se sont situées durant les heures normalement consacrées aux *travaux dirigés* en classe entière (une trentaine d'étudiants dans le premier cas, une dizaine dans le second), sous la direction de leur enseignant, M.Clinard.
- A Marne la Vallée, les ateliers ont eu lieu *hors* des heures d'enseignement habituelles, avec à chaque fois un groupe seulement de cinq ou six étudiants volontaires, que nous étions seul à observer.

Dans les deux cas, l'utilisation de magnétophones nous a aidé dans notre prise d'informations, bien que la qualité des enregistrements effectués à Orléans en classe entière ait été assez médiocre. De plus, à chaque séance et pour chaque groupe, un « rapporteur » des activités du groupe a été nommé, chargé de noter assez scrupuleusement les interventions de ses camarades.

Précisons que pour les deux ateliers, des préquestionnements ont été réalisés, notamment sur des étudiants redoublants de l'université de Marne la Vallée en ce qui concerne l'atelier sur les définitions (comme vu plus haut), et nous ont permis ainsi d'anticiper un peu sur les problèmes rencontrés et de modifier le texte des ateliers en conséquence. Chacun des deux ateliers, sous sa forme définitive, a été planifié sur une ou deux séances d'une durée de deux heures, les étudiants participant à une séance donnée travaillaient par groupes de quatre ou cinq et disposaient tous d'un même sujet dactylographié d'une ou deux pages (voir en annexe) et de leur calculatrice personnelle.

Une planification assez précise a été élaborée a priori (vingt minutes pour telle question, une demi-heure pour telle autre...), servant de guide général pour chaque atelier, même si dans les faits, le déroulement effectif des séances devait nous forcer à nous adapter au rythme propre des étudiants. De même, des interventions ciblées, de niveau progressif, ont été préalablement imaginées pour servir d'aides à la résolution, afin de pallier aux éventuels « blocages » rencontrés. Ces prévisions d'aides, surtout destinées à réduire un peu la part d'imprévu et à rythmer les séances efficacement, tout en évitant autant qu'il est possible les dérapages de type « effet Topaze[6] », ne devaient en aucun cas constituer pour nous un carcan, surtout dans l'hypothèse où les besoins des étudiants s'avéraient assez éloignés de nos prévisions. Pour résumer, nous disposions donc avant chaque expérimentation :

- d'une fiche-étudiant (texte de l'atelier)
- d'une fiche-technique (réponses « standards » aux questions posées)
- d'une fiche-enseignant (planification des séances, texte des médiations prévues)
- de l'analyse a priori de l'atelier (ci-dessous, partie E).

En fin de séances, à Orléans, une rapide synthèse collective avec l'ensemble de la classe sur le travail réalisé a été effectuée, les étudiants des divers groupes pouvant alors interagir entre eux. Notons ici qu'aucun des étudiants de Marne la Vallée ayant participé à ces ateliers de début d'année 1997 n'avait préalablement subi le *test* de septembre 1996, ce dernier ayant été destiné à une autre section. Nous ne pourrons donc mener ici une analyse « croisée » des réponses apportées dans le cadre des deux dispositifs. Précisons en revanche que le thème de la *dérivée symétrique*, déjà au centre de l'un des exercices du test de 1996, a été réexploité lors de l'un de ces trois ateliers.

IV/ ANALYSE A PRIORI DES DEUX ATELIERS.

Nous réalisons ici une analyse a priori de chacun des deux ateliers, en décrivant sur le fond les motivations précises de chaque questionnement, et en justifiant les choix effectués en rapport, au niveau de la forme du scénario retenu. On indique, le cas échéant, toute méthodologie spécifique à un atelier.

A/ ATELIER SUR LES DEFINITIONS DE LA DERIVABILITE.

1°) Originalité de cet atelier et précision des objectifs.

L'étude des rapports institutionnels à la dérivée, menée par l'observation des manuels, a bien montré que les tâches mettant en jeu des définitions au niveau du lycée le font en général dans un contexte de simple *application* et pour des fonctions *particulières*. Cet atelier vise au contraire *l'exploration* des définitions de la dérivabilité par limite du taux d'accroissement et par approximation affine « *pour elles-mêmes* », sollicitant à leur endroit une réflexion *générale*, les extirpant de leur perspective habituelle de *fonctionnalité* pour les *problématiser*. Ainsi, l'étudiant est amené à se prononcer sur la possibilité « *en général* » d'une substitution de l'expression habituelle du taux d'accroissement par celle d'un taux d'accroissement symétrique dans l'expression du nombre dérivé. Cette problématique, qui constituait déjà le ressort d'un exercice très « dirigé » du test de 1996, est ici exposée directement.

[6] Effet du contrat didactique (G.Brousseau, 1980).

La définition par *approximation affine* de la dérivabilité en un point, c'est-à-dire la notion de développement limité d'ordre 1, est d'une écologie difficile au lycée, car d'un intérêt plus *théorique* que *pratique*. Elle nous apparaît ainsi comme emblématique en DEUG A du changement de rapport aux concepts qui s'opère. Cette notion peut d'ailleurs davantage prendre sens en début de DEUG A, dans la perspective de l'apprentissage de la notion plus générale de développement limité d'ordre n, notamment[1]. Et la tâche ici proposée aux étudiants les amène à travailler sur différents *registres* d'expression de cette définition par approximation affine, faisant intervenir des « dosages » modulés au niveau de la *formalisation*, et posant aussi le problème de la complémentarité et de l'articulation de ces registres.

L'approximation affine au voisinage d'un point x_0 dont il est ici question n'est pas toujours l'approximation d'ordre 1 correspondant à la définition de la dérivabilité en x_0. Il peut s'agir d'une approximation d'ordre 0 traduisant alors la propriété de continuité au point x_0. Il incombe alors aux étudiants de le repérer. Ce type de questionnement est notamment inspiré d'observations réalisées par M.Rogalski sur le comportement d'étudiants[2] devant formaliser le fait que x constitue une bonne approximation de sin(x) au voisinage de 0. Il constate que ces derniers n'écrivent pas spontanément l'égalité du type : $\sin(x) = x + x.\varepsilon(x)$, mais plutôt : $\sin(x) = x + \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cet atelier doit permettre d'identifier les difficultés des étudiants de DEUG dans l'apprentissage de la notion d'approximation *locale* et du vocabulaire, du formalisme sous-jacents (notions de fonction négligeable, de voisinage d'un point…) introduits tant à Orléans qu'à Marne la Vallée. Nous voulons repérer aussi les signes d'évolution par rapport au lycée, où ce « *sens* » *du local* ne peut encore s'exprimer qu'à travers des activités d'encadrement très « dirigées », dont la signification profonde échappe sans doute aux élèves.

2°) Méthodologie particulière à cet atelier, présentation détaillée.

Les énoncés soumis au jugement critique des étudiants de DEUG, première année, qui sont à « situer » par rapport aux définitions de la dérivabilité en un point, leur sont présentés comme ayant été construits et formulés par d'autres étudiants, de même niveau, à l'occasion d'un atelier précédent effectué dans une autre université. Ce mensonge (nous avons rédigé nous-mêmes ces propositions) se justifie selon nous par les raisons suivantes :

- Le fait d'avoir à discuter des énoncés provenant de camarades de même niveau est censé mettre à l'aise les étudiants soumis à cet atelier, les amener à se prononcer de manière critique et spontanée sur ces énoncés en atténuant les effets de contrat. Des propositions officiellement formulées par l'enseignant lui-même pourraient être considérées par certains étudiants comme des « énoncés pièges » les conduisant à un comportement artificiel (le jeu, purement scolaire, consistant alors à détecter ces pièges présumés) au lieu de tenter véritablement de se forger une opinion personnelle.

[1] Il s'agit aussi de préparer le cours sur les fonctions de plusieurs variables (notion de différentielle, équation de plan tangent…).
[2] En première année de DEUG A, à l'Université de Lille.

- Affirmer que ces propositions ont été émises par leurs camarades au terme d'un travail et d'une réflexion collectifs semble crédible, et donne en outre un certain poids à ces affirmations de nature à dissuader, selon nous, les étudiants soumis à cet atelier, de se prononcer à la légère.

L'atelier, programmé pour une séance d'une durée de deux heures, se constitue de quatre parties. Les trois premières sont effectuées au sein des divers groupes travaillant indépendamment les uns des autres. La dernière est réalisée collectivement avec l'ensemble de la classe.

- Dans la partie A/ intitulée « *Résultats préliminaires* » l'étudiant est amené à faire le point de ses propres connaissances en se remémorant les notions ici en jeu, issues des cours du lycée et de DEUG : équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point où cette fonction est dérivable, diverses définitions de la dérivabilité en ce point. Un schéma et des notations (fonction f, point x_0, courbe (Cf), fonction affine g(x) = ax+b associée à la tangente à (Cf) en x_0) lui sont proposés pour la mise en forme de ces notions à rappeler. Les étudiants disposent de dix minutes pour réaliser sans l'aide de documents cette partie initiale.

- Dans la partie B/, on leur demande de se prononcer sur la validité de cinq affirmations (numérotées a-b-c-d-e) compte tenu de la situation décrite qui est ici envisagée : « *f est une fonction dérivable au point x_0, de fonction affine tangente $g : x \rightarrow g(x) = ax+b$ en x_0* ». On peut reconnaître trois conditions qui semblent impliquées par la dérivabilité de f en x_0, et donc satisfaites *par nécessité*[3] : deux conditions -a et e- de continuité de f en x_0, l'une exprimée en termes de limite, l'autre dans la langue naturelle, et une condition -d- sur l'existence d'une dérivée symétrique pour f en x_0. Les deux autres propositions (b et c) expriment des conditions *suffisantes* de dérivabilité de f en x_0 et ne sont donc pas *a priori* satisfaites dans la situation proposée. La proposition b exprime l'égalité de la fonction f et de la fonction affine g *sur tout un voisinage du point x_0*, et l'assertion c est l'expression de : « *f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$* » au moyen de la définition par approximation affine. Pour cette deuxième partie, comme pour la suivante, les étudiants disposent de cinquante minutes et de leurs notes de cours et de T.D.

- Dans la partie C/, on considère à l'inverse une fonction F satisfaisant successivement l'une de cinq propositions similaires à celles exprimées dans la partie B/ et on demande de déterminer dans chaque cas si F est, ou non, dérivable au point x_0. Ce sont donc cette fois les propositions b et c, traduisant des conditions *suffisantes* de dérivabilité en x_0, qui satisfont au problème posé.

- Enfin, en guise de conclusion, la partie D/ doit permettre aux étudiants d'effectuer le bilan du travail réalisé dans cet atelier, en constatant notamment qu'aucune des cinq propositions présentées ne correspond à une définition nouvelle de la dérivabilité en un point x_0, chacune d'entre elles constituant au mieux : soit une condition *nécessaire*, soit une condition *suffisante* de dérivabilité en ce point x_0, mais jamais les deux en même temps. Ce

[3] En fait, seules deux d'entre elles sont véritablement satisfaites sous l'hypothèse de dérivabilité de f en x_0, car la proposition a) : « La fonction g vérifie nécessairement $g(x_0) = f(x_0)$ et $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$, *et c'est l'unique fonction affine vérifiant de telles égalités* » est mise en défaut, une telle fonction g n'étant pas unique.

faisant, les étudiants sont donc amenés à s'interroger sur le *statut* des définitions, sur l'élément décisif qui fait qu'une proposition peut acquérir, ou non, ce statut. Cette synthèse est destinée à être réalisée collectivement, les étudiants des divers groupes pouvant interagir entre eux sous la direction de l'enseignant responsable de la séance durant les dix dernières minutes de celle-ci.

3°) Analyse a priori relative à la partie A.

Nous pensons que les étudiants seront capables de rappeler assez aisément l'équation de la tangente en un point, parce qu'il s'agit là d'un algorithme couramment utilisé en terminale et dans les épreuves du baccalauréat. En revanche, il nous semble qu'il n'en ira pas de même de la justification[4] de cette formule, qui apparaît sans doute à certains étudiants comme une simple *définition.* Nous fondons cette prévision notamment sur les travaux de M.Schneider Gilot concernant les difficultés d'apprentissage du concept de tangente ; elle souligne en particulier la difficulté des élèves de lycée à associer la pente d'une tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels, la tangente étant pour eux un objet premier, associé à diverses conceptions qu'ils ont antérieurement développées[5].

Concernant la seconde question, on veut voir si les étudiants arrivent à *isoler* à cette époque de l'année la définition « *abstraite* » de la dérivabilité en un point (*existence* d'une limite finie pour le taux d'accroissement), en conformité avec la culture universitaire, ou s'ils n'associent encore au phénomène de dérivabilité qu'un processus algorithmique : le nombre dérivé en x_0 est évaluable par le calcul du terme $\lim_{x\to x0}$ ($f(x)-f(x_0)$) / $(x-x_0)$. Notons à cet égard que des préquestionnements avant l'élaboration de cet atelier ont montré la difficulté de certains étudiants de DEUG, plus de six mois encore après la fin du lycée, à *désamalgamer* existence et valeur du nombre dérivé en un point ; ils expriment parfois que f est dérivable au point x_0 par : « $\lim_{x\to x0} (f(x)-f(x_0)) / (x-x_0)$ *est égale à* $f'(x_0)$ ». Quant à la définition de la dérivabilité en un point par approximation affine, bien qu'ayant été revue quelques semaines auparavant en cours de DEUG, elle ne sera sans doute pas citée très spontanément et fera probablement aussi l'objet d'erreurs dans l'expression du reste négligeable devant $(x-x_0)$ au voisinage de x_0 (pour des raisons déjà exposées ci-dessus, en D/1°).

4°) Analyse a priori relative à la partie B.

Cet atelier cumule, selon nous, plusieurs difficultés de nature *logique*. La distinction entre « *condition nécessaire* » et « *condition suffisante* » est ici cruciale, alors qu'elle n'est pas toujours bien intégrée par les étudiants, surtout après seulement quelques mois en DEUG A. De plus, trois des cinq propositions présentées (items a, b, d) sont des *conjonctions* de deux propositions, ce qui peut être source de conflit. La seconde de ces deux propositions pose à chaque fois un problème d'*unicité*, situation typique dans la culture universitaire et peu mise en valeur au lycée.

[4] Bien qu'elle fasse classiquement l'objet d'activités préparatoires dans les manuels de première S du lycée.
[5] « Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. », Repères Irem n°5, p.65-p.81, Topiques Editions, Pont-à-Mousson, 1991.

La première partie de l'item a, c'est-à-dire : « *la fonction affine g vérifie* $f(x_0) = g(x_0)$ *et on a :* $\lim_{x \to x0} (f(x)-g(x)) = 0$ » exprime une condition déguisée de continuité de f en x_0. Cette approximation *d'ordre zéro* est, selon nous, assez délicate à identifier pour des étudiants encore habitués à travailler sur des fonctions régulières (en particulier, continues) ou à être avertis par l'énoncé lorsque la question de la continuité doit être évoquée. Une interprétation en termes de droite sécante à la courbe (Cf) au point d'abscisse x_0 peut aider les étudiants à mieux saisir cet item et semble assez accessible, mais risque également d'occulter cette question de la continuité de f en x_0. En revanche, ce type d'interprétation pourrait leur permettre d'accéder *graphiquement* à la raison pour laquelle il n'y a pas unicité de g : toute fonction affine représentative d'une droite sécante en x_0 à (Cf) vérifie également cette proposition. Ce changement de cadre pourrait intervenir alors spontanément chez les étudiants.

L'étude de l'item b, qui affirme que la fonction affine tangente g en x_0 est « *l'unique fonction affine vérifiant* $g(x) = f(x)$ *au voisinage de* x_0 » nécessite une bonne compréhension préalable de l'expression « *au voisinage de* x_0 », souvent utilisée à l'oral mais susceptible de malentendus chez les étudiants. Cette notion de nature *locale*, utile à un développement du travail sur des objets généraux en DEUG A, a été clarifiée en cours comme en travaux dirigés, tant à l'université d'Orléans qu'à celle de Marne la Vallée, dans le cadre de nos expérimentations : une propriété est dite réalisée « *au voisinage d'un point* x_0 » si elle l'est sur un intervalle ouvert centré en x_0 *dont on ne maîtrise pas nécessairement la largeur.*

Dans cet item b, une conséquence faible du fait que g est la *fonction affine tangente* en x_0 pour f, est que l'on a pour $\varepsilon>0$ arbitraire, f(x) et g(x) proches l'un de l'autre <u>*à moins de* ε</u> (soit : $|f(x)-g(x)| < \varepsilon$) pour tout x d'un certain intervalle du type : $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ (α dépendant de ε). En revanche, il est impossible d'assurer sous l'hypothèse de dérivabilité au point x_0 que l'on aura <u>*exactement*</u> $f(x) = g(x)$ sur tout un intervalle de ce type, même pour α « très petit », car il s'agirait là d'un cas de tangence très particulier. La proposition b est donc fausse, mais on voit bien qu'à un niveau de DEUG première année, cette distinction à identifier, entre égalité de deux termes et égalité à ε près, reste assez subtile ; c'est l'un des enjeux « forts » de l'enseignement de l'analyse dans l'enseignement supérieur.

La proposition c) est fausse, puisqu'elle n'exprime pas seulement que f est dérivable au point x_0, mais aussi que la valeur du nombre dérivé de f en ce point est *nulle*. Cet item, a priori plus simple que les deux premiers, nécessite cependant une bonne connaissance de la définition de la dérivabilité en un point x_0 par approximation affine, pour remarquer que la proposition soumise comporte un terme « de moins » que cette définition. A défaut de se souvenir de cette définition de la dérivabilité en x_0, il est possible de la retrouver en partant de celle par limite en x_0 du taux d'accroissement $Tf(x,x_0)$ entre x et x_0, mais cette démarche nécessite une « astuce » de formalisation : il faut traduire « $\lim_{x \to x0} Tf(x, x_0) = a$ » par « $Tf(x, x_0) = a + \varepsilon(x)$ *avec* $\lim_{x \to x0} \varepsilon(x) = 0$ ».

La proposition d) est exacte et nous ne revenons pas sur ce problème de l'existence d'une dérivée symétrique en un point où il y a dérivabilité, qui a déjà été posé lors du test de 1996. Signalons simplement que les étudiants doivent faire preuve ici de bien davantage d'autonomie que lors du test où, par exemple, les définitions *utiles* du nombre dérivé au sens « classique » (entre les points x_0 et x_0+h et entre x_0 et x_0-h) étaient rappelées dans l'énoncé.

A présent, la forme même du questionnement ne facilite pas le travail d'identification de la tâche à accomplir. Il faut notamment se rappeler que « a » désigne dans l'énoncé le coefficient de la tangente à (Cf) au point d'abscisse x_0, donc le nombre dérivé en x_0.

La proposition e), exprimée dans la langue naturelle, est exacte et à l'unicité près, porteuse de la même signification que la proposition a) exprimée en termes de limite, à savoir : «*f et g coïncident en x_0 et f est continue en ce point*». On peut penser que les étudiants auront davantage de facilités à traiter cet item compte tenu du registre sémiotique utilisé.

5°) Analyse a priori relative à la partie C.

On peut estimer que le travail d'analyse des propositions effectué dans la partie B, s'il a été mené correctement et s'il est géré de manière adéquate, peut permettre des économies au moment de la réalisation de cette partie C. Mais pour cela, il faut que les étudiants fassent le lien avec ce qui leur a été demandé dans la partie B, comprennent les enjeux de cette nouvelle tâche, en quoi elle s'en distingue et la complète ; c'est à présent *l'hypothèse* qui varie selon les items et la *conjecture à étudier* (« f est dérivable en x_0 ») qui reste fixe, alors que c'était le contraire en partie B. L'étude des réciproques en partie C met en jeu pour certains items des processus de démonstration différents, mais la plupart des items restent traitables en remettant juste en perspective le travail réalisé en partie B.

Ainsi, si on a constaté dans l'item a de la partie B que la fonction affine tangente g en x_0 satisfait nécessairement les deux conditions $g(x_0) = f(x_0)$ et $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$, qui traduisent d'une part le fait que la droite représentative de g est sécante en x_0 à la courbe représentative de f, et d'autre part la *continuité* de f en x_0, on est en mesure de dire que ces conditions ne peuvent assurer réciproquement la dérivabilité de f en x_0. Encore faut-il que les étudiants gardent à l'esprit le travail effectué dans cette partie B précédente. On peut craindre en outre qu'ils éprouvent des difficultés, tant en partie C qu'en partie B, à identifier la propriété de continuité en x_0 au sein des conditions exprimées dans cet item a.

La proposition de l'item b est vérifiée, puisque la coïncidence de F avec une fonction affine H sur tout un intervalle ouvert centré en x_0 constitue un cas *très particulier* de dérivabilité en x_0. Mais cet item pose un problème plus délicat qu'en partie B : les étudiants qui utilisent le registre graphique doivent ici identifier une situation de tangence en x_0, dont on sait grâce au travail de C.Castela[6] qu'elle est la dernière reconnue par eux. Ils la perçoivent comme contradictoire avec une conception qu'ils développent, selon laquelle un point de tangence est nécessairement un point d'intersection *isolé* avec la courbe. La situation elle-même est le plus souvent non admise par eux. Ainsi donc, même en supposant que la signification de la proposition : « *$g(x) = f(x)$ au voisinage de x_0* » a été correctement clarifiée en partie B, on peut s'attendre ici à de nombreuses erreurs. Un raisonnement algébrique ou du type : « *s'identifiant sur un intervalle du type $]x_0-\alpha\ ;\ x_0+\alpha[$ à une fonction affine H, donc dérivable, la fonction F est elle-même dérivable en x_0* » suffirait pour répondre correctement à cet item. Nous faisons cependant l'hypothèse selon laquelle les étudiants auront peu recours à ce type d'argumentation et tenteront plutôt de raisonner de façon graphique.

[6] [Ibid.]

L'item c devrait en revanche être plus facilement traité par les étudiants que l'item correspondant de la partie B, car il n'y a plus besoin d'une initiative particulière au niveau de la formalisation. Il est cette fois assez naturel de reconstituer le taux d'accroissement de F, puis de calculer sa limite (nulle) en x_0, à partir de l'égalité fournie. Par ailleurs, les étudiants qui ont été capables en partie B d'identifier la situation proposée comme un *cas particulier* de dérivabilité en x_0, donc comme condition non nécessaire de dérivabilité en ce point, mais suffisante, n'ont plus ici qu'à conclure.

Contrairement à ce qui se passe pour les autres items, le travail réalisé en partie B pour traiter l'item d ne peut être réutilisé dans la partie C. La démarche, fondée sur la décomposition du taux symétrique : $(f(x_0+h) - f(x_0-h)) / 2h = ½ [(f(x_0+h) - f(x_0)) / h] + ½ [(f(x_0)- f(x_0-h)) / h]$, qui permet d'établir en partie B qu'une fonction f dérivable en un point x_0 admet alors une dérivée symétrique en ce point, n'est pas reproductible pour établir une réciproque puisque l'on ne dispose alors d'aucune hypothèse sur la limite de deux des trois termes de l'identité. Il convient donc de remettre en question cette réciproque et de rechercher un contre-exemple, démarche d'une nature très différente et qui suppose un revirement complet. Le problème nécessite de bien distinguer les divers taux d'accroissement et rompt avec le travail routinisé au lycée dont l'enjeu tient dans le seul fait de passer à la limite, dans des inégalités par exemple, ce passage pouvant se réaliser *sans précaution particulière* pour les expressions considérées.

Enfin, l'item e, qui traduit l'idée de proximité des points d'une droite et de ceux de la courbe (Cf) au voisinage de x_0, est vérifié sous l'hypothèse de dérivabilité de f en x_0. C'est une conséquence faible de cette propriété et l'analyse effectuée en partie B peut être reprise telle quelle avec une conclusion opposée. Cependant, cet item montre les limites rencontrées lorsque l'on s'efforce de travailler dans le seul registre d'expression de la langue naturelle et il faut s'attendre à ce que les étudiants soient assez déconcertés par la complexité de la proposition telle qu'elle est formulée.

B/ ATELIER SUR TAUX D'ACCROISSEMENT ET NOMBRE DERIVE. ETUDE D'UNE CLASSE DE FONCTIONS.

1°) Préparation de cet atelier : un scénario particulier.

L'atelier sous sa forme définitive a été planifié sur deux séances d'une durée de deux heures chacune, la première étant consacrée au nécessaire travail de familiarisation avec les fonctions à croissance forte (avec interprétation, et recherche d'exemples) et la seconde à l'étude des conjectures proposées[7]. Suite à deux préexpérimentations[8] (dont les résultats seront aussi analysés dans ce qui suit), l'une effectuée à Orléans et l'autre à Marne la Vallée, il s'est en effet avéré irréalisable, faute de temps, de faire tenir ces deux types d'activités, assez différentes qualitativement, au sein d'une même séance.

[7] Le texte du questionnement, pour chacune de ces deux séances, est consultable en annexe de cette thèse.
[8] Correspondant à une même version de questionnement (sur une seule séance), également présentée en annexe.

L'atelier est précédé d'un petit devoir à la maison[9] qui a été corrigé en classe une quinzaine de jours avant ces séances. Ce devoir (ne s'inscrivant pas dans le contrôle continu ordinaire) a été justifié aux étudiants au moment où il leur a été donné. On leur a ainsi précisé qu'il avait un rôle préparatoire à l'atelier, et devait, pour cette raison, être effectué avec un certain sérieux (que la participation à l'atelier soit volontaire, comme c'était le cas à l'université de Marne la Vallée, ou qu'elle prenne pour cadre des séances de travaux dirigés habituelles, comme c'était le cas à l'université d'Orléans). Force reste cependant de reconnaître que ces séances d'atelier revêtaient elles-mêmes, dans l'une et l'autre des deux universités, un caractère « extraordinaire », non institutionnel et sans enjeu d'évaluation, que les étudiants ne pouvaient ignorer.

Ce devoir à la maison reprend un thème classique des activités des manuels de première sur la dérivation : « *la tangente vue comme position limite des sécantes* », dont l'idée est en général mal assimilée par les élèves du lycée, en raison d'obstacles liés au concept de tangente, déjà évoqués plus haut[10]. Ce devoir à la maison est ainsi censé, tout d'abord, préparer les étudiants au travail d'extrapolation graphique, nécessaire lors de l'atelier, qui consiste à faire varier mentalement le point M d'abscisse x d'une droite (M_0M) pour voir comment évolue le taux d'accroissement $\alpha_{x0}(x)$ entre x et x_0. Dans la perspective de cet atelier, qui amène à comparer les termes $f'(x)$ et $\alpha_0(x) = (f(x) - f(0)) / x$ pour $x \neq 0$, pour des fonctions à croissance forte, ce devoir est aussi destiné à éviter à l'étudiant l'amalgame formel entre ces termes. Certains préquestionnements de notre thèse, ou réponses aux tests de septembre, nous ont en effet permis de constater que cet amalgame est assez fréquent, sans doute parce que le taux d'accroissement entre des points x et x_0 constitue pour des fonctions régulières (de classe C^∞, par exemple) une bonne approximation des deux nombres dérivés : $f'(x)$ et $f'(x_0)$ pour x proche de x_0[11].

2°) Analyse a priori de la première séance : étude d'exemples.

Cette séance se subdivise en deux parties, aux rôles complémentaires l'une vis à vis de l'autre. Dans une première partie A (intitulée : « *pour tenter de se représenter ce qu'est une fonction à croissance forte* »), nous posons aux étudiants le problème de la recherche de critères *généraux*, opérationnels, de natures algébrique et graphique, qui permettent de déterminer si une fonction très régulière, de classe C^∞, est ou non à croissance forte sur un intervalle. La *recherche d'exemples de fonctions à croissance forte* proprement dite intervient ensuite dans la partie B de cette première séance d'atelier.

Cette recherche d'exemples est à nos yeux incontournable, puisqu'elle doit permettre à l'étudiant de prendre contact avec la réalité de ces fonctions, et aussi, le cas échéant, de disposer de ces exemples en vue de tester les conjectures proposées lors de la seconde séance d'atelier. Mais il nous a semblé après réflexion qu'une première séance centrée uniquement sur la recherche d'exemples de fonctions à croissance forte sur un intervalle à partir de la donnée de familles de fonctions paramétrées[12] limiterait l'étudiant à un travail sur des

[9] Dans les deux versions de l'atelier (préexpérimentation et version finale). L'énoncé de ce devoir est en annexe.
[10] Maggy Schneider-Gilot [ibid.]
[11] Ce qu'un certain nombre d'exercices ou d'activités des manuels de première mettent en relief.
[12] Familles du type $x \to x^n$, $x \to (x-a)^n$, $x \to A\ln(|x-a|)$,…

fonctions *particulières*, qualitativement sans lien réel avec ce qui est sollicité lors de la seconde séance de l'atelier. Du reste, dans la version initiale de cet atelier (préexpérimentations sur une seule séance), la recherche de critères opérationnels généraux, permettant de décider si une fonction donnée est ou non à croissance forte, n'était pas demandée, ce qui a semblé préjudiciable à l'étude ultérieure des conjectures. Le dédoublement des séances décidé au terme de ces préexpérimentations a permis cette recherche supplémentaire lors de la première séance. En outre, il convient de noter les difficultés des étudiants, observées lors de ces préexpérimentations, s'agissant de la détermination *qualitative* (par identification de fonctions usuelles prototypiques) des valeurs de paramètres pour lesquelles les familles de fonctions proposées sont à croissance forte sur un intervalle donné[13]. Il nous a semblé alors nécessaire, pour des raisons de viabilité de l'atelier, que ces étudiants puissent aussi disposer en vue de ce travail, s'ils en éprouvent le besoin, d'une méthode générale directe et efficace (par évaluation du signe des deux premières dérivées), ce qui justifie aussi a posteriori la recherche sollicitée dans la version définitive de l'atelier de ces critères opérationnels de croissance forte.

Les questions posées dans la partie A, qui portent donc sur la traduction de la propriété de « croissance forte », en termes *algébrique* (stricte positivité des deux premières dérivées de f) et *graphique* (la pente de la tangente au point d'abscisse x croit avec x), risquaient selon nous d'être interprétées de diverses façons par les étudiants. Il était cependant difficile de les formuler de façon plus précise sans dévoiler les réponses attendues, et nous avons pensé que la formule de l'atelier permettrait le cas échéant de réguler et de recentrer le travail des étudiants. Notons que la stricte positivité des dérivées première et seconde de f est une condition suffisante mais non nécessaire à la stricte croissance de f et f ' ; ce problème n'est cependant pas central dans l'optique de cet atelier portant d'abord sur l'identification de *critères opérationnels* et d'*exemples concrets*.

En fin de partie A, on demande de tracer, par utilisation des critères graphiques définis précédemment, une ou plusieurs courbes susceptibles de correspondre à des fonctions à croissance forte, ce qui doit permettre aux étudiants de préparer le début de la partie B de cet atelier. Nous pensons que la réalisation grossière de courbes répondant *qualitativement* à un problème posé est une étape souvent indispensable pour la détermination analytique ultérieure d'exemples. Et cela nous semble s'appliquer tout particulièrement à l'étudiant, qui n'a pas toujours de références *disponibles* en nombre et en qualité suffisants pour faire l'économie de cette étape. Insistons ici sur le fait que la recherche d'exemples ou de contre-exemples est une partie importante du travail scientifique, à laquelle l'étudiant est souvent mal préparé et qui s'accomplit selon des processus (par exemple, observation de schémas, raisonnements par induction,... etc.) qui lui sont propres, et offre à l'individu une marge de manœuvre intéressante. En l'occurrence, les tracés à main levée que l'on peut réaliser pour la courbe représentative d'une fonction à croissance forte semblent tous aboutir à l'idée de la fonction exponentielle, tant les deux contraintes, de stricte croissance sur f <u>et</u> sur f ', paraissent limiter les possibilités pour ces tracés.

[13] Cette difficulté nous a d'ailleurs amené, suite aux préexpérimentations effectuées, à une légère simplification des familles proposées pour la version remaniée de l'atelier : $x \to x^n$, puis $x \to (x-a)^n$ (progressivité) se substituent à la famille : $x \to A(x-a)^\alpha+B$, la famille $x \to A.\tan(x-a)+B$ est remplacée par l'unique fonction sinus. De plus, un jeu variable est introduit dans la dernière version : tantôt le domaine est donné, tantôt il est à préciser.

En début de partie B, l'étudiant est donc censé annoncer cet exemple sans aide autre que la précision du fait qu'il s'agit d'une « *fonction usuelle très simple* » et nous faisons ici l'hypothèse que le canevas de questions qui a été choisi en partie A doit l'amener assez naturellement à produire cet exemple. Nous pensons en revanche qu'il aura une certaine difficulté à en déduire des *familles* de fonctions usuelles à croissance forte comme cela est demandé. Avoir l'idée d'introduire *soi-même* des paramètres au sein de l'expression d'une fonction nous semble en effet assez inaccessible pour des étudiants encore peu habiles à gérer des problèmes où la présence de paramètres est *imposée*. Une réponse attendue ici serait : « *toutes les fonctions du type* $x \to e^{ax}$ *avec* $a>0$ », ou bien encore : « *toutes les fonctions du type* $x \to Ae^{ax} + bx+c$ *avec* $A>0$, $a>0$ *et* $b>0$ ». De telles réponses demandent en outre une certaine capacité à la généralisation, sans doute encore peu développée chez les étudiants en début de DEUG.

Suit, en question 2° de cette partie B, la détermination d'exemples « moins évidents » de fonctions à croissance forte, à partir d'expressions générales *données* de fonctions paramétrées prises dans l'éventail des fonctions classiques (puissances, trigonométriques, logarithmes,... etc.). Le scénario retenu pour aider l'étudiant dans cette détermination d'exemples se devait de ne pas être trop directif pour qu'il y ait effectivement *recherche* de la part de cet étudiant. Ce scénario correspond bien selon nous à un compromis nécessaire dans les médiations apportées : l'étudiant dispose de formes générales de fonctions, mais garde à sa charge la détermination des valeurs adéquates des paramètres pour l'obtention des exemples recherchés. Cette aide à la résolution, que l'on a voulu relative et équilibrée, doit, selon nous, permettre de repérer le fonctionnement des étudiants, leurs difficultés éventuelles : il s'agit ici de mettre le doigt sur des ruptures fines (au niveau technique, en particulier), et en même temps, d'avoir la possibilité de les gérer au mieux lors de la séance en classe, de se donner localement les moyens d'y remédier.

Rappelons que <u>deux</u> méthodes nous semblent envisageables pour l'étudiant en vue de la détermination de ces exemples. L'une, déjà intégrée au niveau de la culture du lycée, consiste à utiliser des connaissances générales ayant trait aux fonctions de référence ou prototypiques mises en jeu, $x \to (x-a)^n$ et $x \to A.\ln(|x-a|)$. La seconde méthode, qui a dans l'ensemble une portée plus large, vient enrichir la première au niveau du supérieur et consiste à étudier le signe des deux premières dérivées pour répondre au problème posé. Il sera donc intéressant de voir quel est le *mode de fonctionnement* qui caractérise plutôt les étudiants lors des préexpérimentations, puis lors de l'expérimentation finale, en rapport avec les conditions (différentes dans les deux cas[14]) créées par le questionnement. La méthode plus qualitative du lycée va-t-elle résister au saut introduit par les paramètres ? Sinon, les étudiants seront-ils capables de basculer sur l'autre méthode ? Telles sont les questions qui se posent ici.

Le travail réalisé en question B/2°) montre la difficulté qu'il y a à obtenir, à partir de fonctions usuelles, des fonctions à croissance forte *sur R*, alors qu'il est finalement assez aisé de trouver des fonctions à croissance forte *sur un certain intervalle de R*. Dans la logique de ce constat, la question 3°) suggère ainsi une <u>méthode d'obtention</u> de fonctions à croissance forte <u>sur R</u>, par « *recollement* » d'expressions valables sur des intervalles constituant une

[14] D'une part, parce que les étudiants ayant subi l'expérimentation finale disposaient explicitement, à l'inverse de leurs prédecesseurs, du critère opérationnel de croissance forte, relatif au signe des deux premières dérivées, et aussi car le panel des fonctions proposées à été un peu revu à la baisse entre les deux expérimentations.

partition de R, chacune de ces expressions correspondant à une fonction à croissance forte sur l'intervalle où on la considère. Le principe de cette méthode est-il compréhensible pour l'étudiant ? C'est notamment ce que nous souhaitions tester ici.

Les conditions précises d'obtention d'une telle fonction à croissance forte sur R sont *doubles*, la tâche ne se résumant pas à la vérification de la condition de croissance forte de chaque expression sur les divers intervalles. Le travail, consistant à s'assurer de ce que les conditions de continuité et de dérivabilité *aux points de jonction* de deux expressions distinctes sont bien satisfaites, risquait selon nous de rester dans l'ombre de cette première partie de la tâche pour bien des étudiants. C'est donc pour atténuer cette difficulté de repérage de ces conditions et aussi pour faciliter l'identification de la méthode d'obtention de fonctions à croissance forte par *« recollement d'expressions »* que nous avons demandé aux étudiants de se prononcer d'abord sur le cas général d'une fonction f définie par : $f(x) = f_1(x)$ pour $x \leq 0$, et $f(x) = f_2(x)$ pour $x>0$, f_1 et f_2 étant de classe C^∞ sur R, avant l'étude d'un exemple particulier. Nos premières prévisions ont d'ailleurs été confirmées par le déroulement des différentes préexpérimentations, à l'occasion desquelles nous avions soumis *directement* l'étude d'un exemple aux étudiants ; il s'est avéré nécessaire de leur faciliter la prise de recul sur le problème posé, et nous avons opté par la suite pour cette modification du questionnement en vue d'y parvenir.

3°) Analyse a priori de la seconde séance : étude de conjectures.

L'une de ces conjectures ayant trait aux fonctions à croissance forte porte sur les variations de la fonction α_0 définie par $\alpha_0(x) = (f(x) - f(0)) / x$ pour $x \neq 0$, et l'autre, sur le signe de la différence $(f'(x) - \alpha_0(x))$ selon $x \neq 0$, autrement dit sur la position relative des courbes représentatives des deux fonctions f ' et α_0.

Il nous a semblé pertinent de poser ce type de problèmes dans la perspective d'un travail visant à désamalgamer le taux d'accroissement et le nombre dérivé, car ils permettent de relever des régularités dans les comportements comparés de f ' et α_0. Ayant donc prolongé la fonction α_0 par continuité en 0 en posant $\alpha_0(0) = f'(0)$, on peut alors constater dans le cas de fonctions f à croissance forte, que α_0 est strictement croissante sur R, comme f ', mais que les courbes représentatives de α_0 et f ' se croisent au point d'abscisse 0 seulement, et que l'on a : $\alpha_0(x) < f'(x)$ sur R_+^* et $f'(x) < \alpha_0(x)$ sur R_-^*. Cependant, ces résultats ne sont pas annoncés dans le texte de l'atelier et ce sont donc les étudiants eux-mêmes qui doivent produire les conjectures, même si on leur indique sur quoi elles vont porter, à savoir le sens de variation de α_0 et le signe de $(\alpha_0 - f')$. Ce faisant, nous tentons de solliciter un rôle plus actif de la part des étudiants, tout en les guidant sur la voie à explorer. Le scénario adopté, que nous avons voulu aussi représentatif que possible d'un scénario de recherche, ou d'investigation, est le suivant :

- Dans la partie A, les étudiants sont amenés à utiliser successivement le cadre graphique pour *mettre en place* les conjectures, puis le cadre algébrique pour *démontrer* rigoureusement ces conjectures, dans le cas particulier de la fonction exponentielle.

- Dans la partie B, ils doivent généraliser ces conjectures à toutes les fonctions à croissance forte, par le même processus en deux temps.

- Dans la partie C enfin, on propose d'appliquer les résultats démontrés à une nouvelle fonction à croissance forte *particulière*.

Ce scénario était déjà en grande partie présent dans la version initiale de cet atelier (préexpérimentations), mis à part le fait que l'on ne demandait qu'une seule démonstration, relative au cas général ; la preuve par études de fonctions dans le cas particulier de la fonction exponentielle n'était pas sollicitée. Le fait que des étudiants aient tenté spontanément (seconde préexpérimentation) une démonstration d'abord limitée à l'exponentielle nous a donné l'idée de cet enrichissement du questionnement, sans doute bien adapté au mode de fonctionnement cognitif de l'étudiant. Le travail à réaliser dans le *cadre graphique*, en partie B, reste le même qu'en partie A, et les étudiants ont tout loisir, comme les y engage le texte, de tester les divers exemples mis à jour lors de la première séance d'atelier. En revanche, le traitement *algébrique* diffère à la fois dans sa nature et son déroulement, lorsque l'on passe de la fonction exponentielle aux fonctions à croissance forte en général.

Dans le cas de la fonction exponentielle, on demande tout d'abord d'étudier les variations de la fonction α_0, ce qui pose un problème de nature purement technique, la dérivée $(\alpha_0)'(x)$, égale à $(xe^x-e^x+1) / x^2$ n'étant pas directement identifiable comme un terme positif sur R^*. Il faut prendre ici l'*initiative* d'effectuer une *seconde dérivation*, non pas sur $(\alpha_0)'(x)$ (sinon on obtient une expression plus complexe dont le signe est encore moins identifiable !), mais sur $u(x) = xe^x-e^x+1$. On obtient alors : $u'(x) = xe^x$, donc u, décroissante sur R_-, croissante sur R_+, et valant 0 en 0, est positive sur R et α_0, prolongée par continuité en 0, est donc croissante sur R. L'autonomie requise pour ce type de tâche a été identifiée lors de notre étude institutionnelle comme un élément typique de l'évolution devant intervenir dans la transition lycée / université ; il sera instructif de voir si le fait de travailler en groupes permet aux étudiants, après quelques mois en DEUG, de gérer la situation proposée.

Pour étudier le signe de $(f'-\alpha_0)$, les étudiants peuvent refaire une étude de fonction, comme suggéré par le texte ou, ayant obtenu le signe de $(\alpha_0)'(x)$, en déduire celui de $(f'-\alpha_0)$ à partir de l'égalité : $(\alpha_0)'(x) = (f'(x)-\alpha_0(x)) / x$. Le texte de l'atelier ne fournit cependant pas cette identité, comme ce serait par exemple le cas dans un sujet de baccalauréat, ce qui nécessite là encore une certaine autonomie dans le travail de la part de l'étudiant.

Dans le cas général, la démonstration suit le processus *inverse* : c'est l'étude du signe (selon x) de la quantité $(f'(x)-\alpha_0(x))$ qui est sollicitée d'abord et les étudiants doivent recourir pour cela au *théorème des accroissements finis*. Là encore, cet outil de preuve est suggéré seulement de façon *implicite*. Puis la formule $(\alpha_0)'(x) = (f'(x)-\alpha_0(x))/x$, qui est généralisable à toute fonction dérivable sur R^*, peut être réappliquée en vue de retrouver cette fois le sens de variation de α_0 à partir du signe de $(f'(x)-\alpha_0(x))$.

L'une des vocations de cet atelier est aussi de tenter d'installer chez les étudiants un autre rapport à la représentation graphique, et de pointer les difficultés que cela pose. Après s'être remis en mémoire[15] l'interprétation de la quantité $\alpha_0(x)$ en termes de pente de la corde joignant deux points de la courbe, l'étudiant doit imaginer l'évolution de cette corde selon x, pour des fonctions à croissance forte. Il ne s'agit donc plus de lire sur une courbe, de façon *directe*, des informations *globales* immédiatement apparentes, telles que la croissance ou la

[15] C'est l'un des objets du devoir à la maison.

présence d'une asymptote, mais de se représenter mentalement pour x croissant le « *mouvement* » d'un segment, afin d'en tirer une information. Il nous semble que cette aptitude à extrapoler sans aide la *variabilité* d'une certaine grandeur graphiquement interprétable à partir d'une représentation graphique *fixe* induit une rupture conceptuelle majeure pour cet étudiant. Ce type de tâche a d'ailleurs déjà été sollicité dans la variante 1 de l'exercice 5 du test de 1995 avec le peu de succès que l'on sait[16].

Quelques mois après le début de l'année universitaire, quelle évolution peut on attendre chez l'étudiant dans sa capacité à exécuter une telle tâche ? Telle est la question qui est ici posée. Ce *rapport nouveau au graphique* intervenant ici, qui reste selon nous en grande partie à construire chez l'étudiant de DEUG première année comporte un autre aspect, celui de la *réminiscence* : la considération conjointe de la corde joignant O'(0,f(0)) à M(x,f(x)) et de la pente f '(x) au point d'abscisse x de la courbe exponentielle doit faire penser à l'interprétation graphique du théorème des accroissements finis[17], donc à la pertinence de l'utilisation de ce théorème dans le contexte proposé pour établir la preuve formelle des conjectures. Cet atelier a donc aussi pour finalité de mettre en évidence l'intérêt du recours au cadre graphique, non seulement comme moyen de prospection de certaines propriétés (ce qui était déjà le cas au lycée : *« on constate graphiquement que... »*), mais aussi comme aide à la *recherche d'une démonstration*. Un tel projet apparaît naturellement un peu ambitieux pour un simple atelier, et l'on cherchera d'abord à établir ici un diagnostic du comportement des étudiants devant une telle situation et à rechercher les éléments qui peuvent entraver leur prise de conscience du phénomène.

[16] Il fallait alors extrapoler l'évolution selon x du nombre dérivé en x d'une fonction f, à partir de la seule courbe représentative de f, afin d'en déduire un tracé de la courbe représentative de la fonction dérivée f '.

[17] En d'autres termes, il y a une *icône du théorème des accroissements finis* qui, idéalement, devrait faire partie des connaissances disponibles chez l'étudiant. A ce sujet, on pourra plus généralement se reporter au mémoire de D.E.A de Michela Maschietta sur le rôle des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'Analyse (Université de Jussieu - Paris 7, septembre 1998).

CHAPITRE VIII : RESULTATS DES EXPERIMENTATIONS DES ATELIERS.

I/ L'ATELIER SUR LES DEFINITIONS DE LA DERIVABILITE.

A/ DEROULEMENT GENERAL DES EXPERIMENTATIONS.

1°) Préexpérimentation à l'université de Marne la Vallée (mai 1996).

Dans une première version, expérimentée sur un groupe d'une douzaine d'étudiants volontaires, redoublant le premier semestre de la première année de DEUG Sciences, nous avons pu identifier certains facteurs nuisant à la *viabilité* de ce travail. Cela nous a amené à effectuer quelques modifications en vue de l'élaboration du questionnement soumis ultérieurement.

Cette préexpérimentation a été réalisée avec l'aide de M.Artigue, qui s'est plus particulièrement attachée à l'observation de l'un des trois groupes d'étudiants, tandis que je tentais de coordonner l'ensemble de la séance. Nous avons pu remarquer tout d'abord que les items soumis à leur jugement étaient à la fois trop nombreux pour le temps imparti (huit items) et parfois redondants ou d'un intérêt restreint (deux d'entre eux, notamment, revenant à identifier des expressions transformées du taux d'accroissement usuel). Par ailleurs, ce préquestionnement ne dissociait pas nettement, dans sa forme, l'étude des assertions proposées en tant que conditions *nécessaires*, de celle de ces assertions en tant que conditions *suffisantes* de dérivabilité, même si l'énoncé suggérait implicitement d'effectuer cette discrimination. Cela a eu pour conséquence que les étudiants les ont jugé de façon assez « globale », comme exprimant ou non, selon eux, la dérivabilité au point x_0. Un manque de clarté et de rigueur dans les raisonnements formulés, lié à une certaine confusion au niveau logique, s'est alors installé.

Suite à cette préexpérimentation, nous avons donc limité à cinq items le travail proposé dans la nouvelle version, avec étude *séparée* des caractères nécessaire et suffisant de dérivabilité de chaque proposition. Cette préexpérimentation nous a aussi permis de repérer assez tôt certains phénomènes *répétés* dans le comportement des étudiants (importance de la langue naturelle ou du recours au cadre graphique pour envisager ou traiter certains items, problèmes liés à leur compréhension / leur formalisation,... etc.).

Compte tenu du décalage très grand, apparu lors de cette préexpérimentation, entre ce qui était attendu et le travail *effectif* des étudiants pour chaque item, l'étape de *synthèse* inter-groupes que j'ai coordonnée au terme de la séance aurait exigé une reprise assez conséquente qui n'a pu être menée que très partiellement, ce qui justifie également les allégements effectués par la suite.

2°) Côté enseignants : le choix de deux types de gestion bien distincts.

Nous avons expérimenté cet atelier sous sa forme définitive, pour la première fois, à l'université d'Orléans, pendant une séance de travaux dirigés ordinaire en classe entière, sous la direction de M. Clinard. Ce dernier ayant rempli à cette occasion le rôle de coordinateur de l'atelier, j'ai pu me consacrer de façon quasi exclusive à l'observation du travail d'un groupe particulier de cinq étudiants (voir protocole en annexe). Au sein de ce dispositif, j'ai choisi d'intervenir assez souvent auprès de ces étudiants, de façon à pouvoir établir ensuite des comparaisons entre le comportement d'un groupe piloté et aidé de très près, et celui des autres groupes, qui ne disposaient que de quelques indications sporadiques et collectives de la part de M.Clinard.

Dans le premier cas, c'est une analyse des *interactions* entre l'enseignant (nous-mêmes) et les étudiants qui est réalisable, avec étude des possibilités de réaction de ces derniers, et analyse des choix d'intervention de cet enseignant. Pourquoi ce dernier fait-il approfondir telle idée et laisse-t-il de côté telle autre, pourquoi laisse-t-il se développer telle polémique, ou au contraire, y met-il un terme en conseillant aux étudiants de changer de voie ou en répondant lui-même à une question qui est posée par le groupe ? Pour les autres groupes, assez peu aidés, seule une analyse de leurs productions et de leurs discussions est envisageable.

Naturellement, on conçoit aisément que le déroulement de la séance, pour un groupe donné de cette classe, a pu être profondément influencé par la façon selon laquelle ce groupe a été géré par l'un ou l'autre des deux enseignants. Il est ainsi intéressant de comparer la *gestion du temps* dans les deux cas (quelle durée consacrée à chaque item, par exemple), les types de questions qui ont été soulevées dans chacun de ces cas. C'est ce qui va être décrit sommairement dans ce qui suit.

3°) Les grandes lignes du déroulement de l'expérimentation d'Orléans.

La partie A (résultats préliminaires) a été abordée de façon *très succincte* par l'ensemble des groupes travaillant sans soutien individualisé, en partie du fait de la *consigne* donnée par M.Clinard de passer rapidement à l'étude des items, après avoir rappelé les définitions de la dérivabilité en un point. Mais cela tient aussi et surtout à ce qu'ils ont oublié presque systématiquement de mentionner la définition par approximation affine (pourtant revue en cours), et n'ont pas du tout vu quelles justifications apporter à l'équation de la tangente : « *C'est une définition !* », ont-ils parfois affirmé. L'étude de ces résultats préliminaires n'a pas dépassé alors sept à huit minutes.

Dans le groupe que je me suis attaché à suivre, en revanche, ces deux points ont été abordés du fait de mon intervention, des questions que j'ai posées aux étudiants. Un temps assez important (20mn) a été ainsi consacré à retrouver la définition par approximation affine et à démontrer son équivalence avec la définition par limite du taux d'accroissement. Je les ai orienté délibérément vers cette tâche, et les ai aidés à la réaliser. Dans la mesure où plusieurs items sont à rapprocher de cette définition, il m'a semblé sur le moment que cet investissement pouvait être utile pour la bonne compréhension ultérieure de ces items, tout autant que pour faire rentrer les étudiants de plain-pied dans une optique de démonstration.

Les divers groupes ont consacré l'essentiel de leur temps aux items a, b et d, tandis que les items c et e n'ont guère fait l'objet de discussions. Encore convient-il de préciser que, dans un premier temps, plusieurs groupes avaient tout d'abord identifié l'item b comme une reformulation de l'item a, l'assertion : « *$f(x) = g(x)$ au voisinage de x_0* » étant perçue comme synonyme de : « *$f(x)$ et $g(x)$ sont de plus en plus proches pour x s'approchant de x_0* ». Par suite, la question avait été rapidement close, chacun s'accordant à dire qu'une fonction dérivable en un point x_0 vérifie bien l'item b, avant que M.Clinard n'intervienne pour suggérer que l'interprétation effectuée n'était pas la bonne, et qu'il convenait de repréciser la signification de l'expression : « *au voisinage d'un point x_0* ». Cette intervention a relancé alors un débat au sein des divers groupes, qui s'est rapidement empêtré dans une certaine confusion, jusqu'à ce que M.Clinard leur suggère de retrouver dans leur cours la définition précise du terme de « *voisinage* ».

La principale raison pour laquelle les items a et b ont particulièrement focalisé l'attention tient dans la tendance des étudiants à tenter de les traiter en utilisant systématiquement pour *registre principal* celui de la langue naturelle (ici, peu adapté), ce qui soulève désaccords et interrogations. Le recours à des considérations d'ordre *graphique*, que l'on peut imaginer moins sujettes à caution quoique n'ayant pas la valeur de preuve, n'intervient qu'en second lieu et amène aussi des erreurs d'interprétation. Dans l'étude de l'item b, l'opinion des étudiants a ainsi été influencée, comme prévu dans notre analyse a priori, par une des conceptions de la tangente dégagées par C.Castela, le fait que f se confonde avec la fonction affine g sur tout un intervalle ouvert centré en x_0 n'étant bien souvent pas interprété comme un cas de tangence en x_0 pour la courbe et la droite associées.

L'item a est perçu comme particulièrement problématique, car les étudiants ne voient pas, en général, de différence entre les propositions « $g(x_0)=f(x_0)$ » et « $\lim_{x\to x0} (f(x)-g(x)) = 0$ » ou se demandent si les égalités « $\lim_{x\to x0} (f(x)-g(x)) = 0$ » et « $\lim_{x\to x0} f(x) = \lim_{x\to x0} g(x)$ » s'équivalent. La propriété de continuité, qui est au cœur de cet item, n'est pas du tout identifiée[1], et la définition de la dérivabilité par approximation affine, qui pourrait permettre d'approcher le problème d'un point de vue *formel*, n'est jamais envisagée de manière spontanée par les étudiants, même au sein du groupe que j'ai aidé, et qui a eu l'occasion de se remémorer cette définition. Au bout du compte, c'est bien une approche purement intuitive, graphique, en termes de droite et de courbe sécantes en x_0, qui emporte l'adhésion, et les étudiants arrivent alors à se convaincre du fait qu'une fonction dérivable en x_0 satisfait l'énoncé. Concernant la réciproque, les avis sont plus partagés, car certains étudiants estiment que l'on ne peut avoir « $\lim_{x\to x0} (f(x)-g(x)) = 0$ » si la courbe représentative de f et la droite associée à g se coupent en x_0 *à angle droit*[2], et cela les amène finalement à penser que cette propriété nécessite *en retour* la tangence en x_0. Au sujet de cet item en particulier, une impression de flou semble demeurer au terme d'une réflexion assez longue, dans les groupes gérés collectivement.

L'item d semble davantage faire sens pour les étudiants, qui identifient mieux le problème posé : il y a un taux d'accroissement, qui n'est pas celui qui intervient usuellement dans la

---

[1] Dans le groupe que j'ai personnellement observé, cela est très net. Après de multiples tentatives pour mettre les étudiants sur la voie, il faut en arriver à leur demander ce que traduit l'égalité « $\lim_{x\to x0} f(x)=f(x_0)$ », considérée jusque là comme allant de soi, pour obtenir enfin la réponse attendue.
[2] Courbe et droite semblent alors s'éloigner « *rapidement* » l'une de l'autre, même pour x encore voisin de x_0.

définition du nombre dérivé ; est-ce que cela a ou non une importance ? Ils mettent alors en œuvre plus spontanément des considérations de nature graphique ou algébrique, quels que soient les groupes concernés. Le temps assez important consacré à cet item d correspond ainsi à un travail de production plus fructueux que pour les items a et b, même lorsqu'il reste inachevé ou n'aboutit pas au résultat correct.

Le travail mené dans le groupe que j'ai observé a été d'une *nature* très différente de celui réalisé dans les autres groupes, la différence étant surtout notable au niveau de la formalisation, que j'ai suggérée à plusieurs reprises aux étudiants, les guidant à chaque fois dans cette tâche (items b et d, notamment en vue de traduire la propriété «$f(x) = g(x)$ *au voisinage de* x_0 »). Elle reste, en regard, très pauvre dans le travail des autres groupes.

Les items c et e, beaucoup plus simples, ont été quant à eux traités assez rapidement (5 à 10mn), et le plus souvent de façon convenable. La reconstitution du taux d'accroissement de f entre les points x et x_0 (à partir de l'égalité donnée dans l'item c), suivie d'un passage à la limite, a été menée sans encombre. Il s'agit d'une tâche régulièrement sollicitée en première année de DEUG A pour l'étude de la dérivabilité en un point (et plus marginale au lycée). Compte tenu des observations précédentes (sur la propension des étudiants à recourir à la *langue naturelle* pour le traitement des autres items), on conçoit aisément pourquoi l'item e, exprimé dans ce registre, et qui correspond en quelque sorte à une traduction de l'item a, *déjà étudié*, a été bien réussi.

La séance arrivant à son terme, l'étape de synthèse n'a duré que cinq minutes, M.Clinard effectuant lui-même un rapide bilan des réponses à apporter aux divers items. Il apparaît ainsi clairement, au terme de cette expérimentation, que de nouveaux aménagements sont nécessaires au niveau du questionnement, afin de laisser un temps plus important à la phase de synthèse, qu'il nous semble nécessaire de mener de manière *collective*, avec la participation effective des étudiants.

4°) Les expérimentations suivantes de Marne la Vallée.

Cet atelier, avec le même questionnement, a été soumis à expérimentation à plusieurs reprises à l'université de Marne la Vallée avec des petits groupes d'une dizaine d'étudiants volontaires et redoublants (comme cela avait été le cas lors de la préexpérimentation). Nous avons assumé seuls la prise en charge de ces séances en enregistrant les interventions orales des étudiants sur magnétophone.

B/ ANALYSE DETAILLEE DE L'EXPERIMENTATION D'ORLEANS.

Nous avons choisi de structurer cette analyse selon cinq lignes directrices : les *trois premières* correspondent plus spécialement à chacun des items a, b et d, à la *nature* d'un problème central qu'ils posent, respectivement : articulations entre les notions d'approximation d'ordre 0 et d'ordre 1 pour l'item a, difficultés liées à l'utilisation de la langue naturelle pour l'item b, écueils aux niveaux formel et conceptuel pour l'item d. La *quatrième* ligne directrice de cette analyse touche à une question de fond, qui jalonne l'ensemble de l'atelier : les problèmes liés à la *logique* (le travail mettant en jeu les notions de condition nécessaire et de condition suffisante, notamment). Enfin notre *cinquième* ligne d'analyse concerne la *gestion du travail* par l'enseignant, telle qu'elle a été observée par nous-mêmes a posteriori, la critique des choix qu'il peut être poussé à réaliser, et la façon dont il tente d'amener la dévolution aux étudiants de cette activité non évidente a priori.

1°) Le travail sur les notions d'approximations d'ordre 0 et d'ordre 1.

Les étudiants interprètent d'abord l'item a avec difficulté, en termes de « *proximité* » (en un sens qui reste au début assez vague) de la courbe représentative de f et de la droite associée à la fonction affine g, lorsqu'on se rapproche du point x_0. Pour certains, cette idée de « *rapprochement* » exprime que cette droite est *tangente* à cette courbe en x_0, et pour d'autres pas. En revanche, tout le monde semble s'accorder à dire que si la fonction f est dérivable en x_0, alors la fonction affine g correspondant à la droite tangente à la courbe en ce point vérifie bien : $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$. Dans le groupe que j'observe, Florent propose même une démonstration de ce fait, à partir de l'équation de la tangente en x_0 ; il écrit ainsi :

$$\text{« } \lim_{x \to x_0} f(x)-g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - (f(x_0) + (x-x_0).f'(x_0))$$
$$= \lim_{x \to x_0} (f(x) - (f(x_0)) - (x-x_0).f'(x_0) = 0,$$
$$\text{car } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ et } \lim_{x \to x_0} (x-x_0).f'(x_0) = 0 \text{ ».}$$

Encore faut-il signaler que Florent ne trouve pas utile, en dépit de ma demande, de justifier l'égalité entre les termes $\lim_{x \to x_0} f(x)$ et $f(x_0)$; elle lui paraît, ainsi qu'à l'ensemble de ses camarades, « naturelle ». La propriété de continuité en un point, banalisée dans les exemples de fonctions rencontrées au lycée, et ici sous-jacente à la dérivabilité en ce point, passe donc inaperçue, quelques mois après l'entrée en DEUG, ce qui n'est pas très étonnant dans la mesure où la situation proposée n'amène guère de « *problématisation* » de cette notion. Sans doute faut-il y voir d'ailleurs une des faiblesses de cet atelier.

Cependant, dans d'autres groupes, qui partent de la définition de la dérivabilité en un point par limite du taux d'accroissement, le travail de formalisation à réaliser, en vue de démontrer qu'une fonction dérivable au point x_0 satisfait l'item a, s'avère en général beaucoup plus difficile. Un étudiant écrit : $\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) / (x-x_0) = f'(x_0)$, puis annonce :

Etudiant A : « *Il suffit de multiplier cette égalité par $(x-x_0)$!* »
Il écrit alors : $(x-x_0).(\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) / (x-x_0)) = (x-x_0).f'(x_0)$.
Etudiant A : « *On simplifie par $(x-x_0)$ le terme de gauche, et on obtient alors :*
$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = (x-x_0).f'(x_0)$, *donc* $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) - (x-x_0).f'(x_0)=0$,
c'est-à-dire $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = 0$! »
Etudiant B : « *Tu crois qu'on a le droit de faire ça ? Moi je sais pas si on peut simplifier directement la fraction par $(x-x_0)$, parce que le taux d'accroissement, il est dans une limite !* »
Etudiant A : « *Pourquoi pas ?* » (...)

Cet exemple permet bien de comprendre les difficultés des étudiants dans l'articulation des diverses définitions de la dérivabilité et leur manque de contrôle au niveau formel. Dans ce contexte, la distinction entre les divers degrés d'approximation (ordre 0 - ordre 1) ne se fait pas, et certains étudiants proposent ainsi une preuve pour établir que réciproquement s'il existe une fonction H affine telle que $\lim_{x\to x_0} F(x)-H(x) = 0$, avec $F(x_0) = H(x_0)$, alors F est dérivable point x_0 ; ils sont peu contredits par leurs camarades qui ne voient pas d'objection valable à cette démonstration, ignorant en outre assez souvent si, en lui-même, le résultat est, ou non, valable :

> Etudiant X : « *$\lim_{x\to x0} F(x)$-$H(x) = \lim_{x\to x0} (F(x) - F(x_0) -(H(x) - H(x_0)) = 0$, donc en divisant par $(x-x_0)$, on obtient alors :*
> *$\lim_{x\to x0} (F(x) - F(x_0)) / (x-x_0) - (H(x) - H(x_0)) / (x-x_0) = 0$,*
> *d'où $\lim_{x\to x0} (F(x) - F(x_0)) / (x-x_0) = a$, car H est affine* »
> Etudiant Y : « *Oui, mais alors cela voudrait dire que la réciproque est vraie ?* »
> Etudiant X : « *Pourquoi pas ?* » *(...)*

Les étudiants n'ont, semble-t-il, pas de références disponibles leur permettant de dépasser le stade de la simple opinion, et apparaissent dans l'ensemble assez déstabilisés par cet item a. Ainsi, ils considèrent les conditions données, « $\lim_{x\to x0} f(x)-g(x) = 0$ » et « $f(x_0) = g(x_0)$ » comme redondantes et même interchangeables, ce qui les désoriente. Le cours de terminale affirme que si une fonction définie en un point admet une limite finie en ce point, cette limite est égale à la valeur de la fonction en ce point. Or, de fait, on rencontre au lycée bien peu de fonctions définies en un point et n'admettant pas de limite finie en ce point, et les fonctions admettant une limite finie en un point sont assez systématiquement prolongées par continuité en ce point. L'amalgame entre les deux notions est alors favorisé. On voit que cet amalgame est assez résistant en début de DEUG.

Notons ici que la condition « $\lim_{x\to x0} f(x) - g(x) = 0$ » serait effectivement suffisante à exprimer l'item a, puisque l'on sait que f et g sont définies en x_0 et que g, affine, admet une limite finie en ce point. De « $\lim_{x\to x0} f(x)-g(x) = 0$ », on peut alors en déduire les égalités : « $\lim_{x\to x0} f(x) = \lim_{x\to x0} g(x) = g(x_0)$ », puis que « $f(x_0) = g(x_0)$ » puisque la limite de f en x_0, finie, est donc égale à $f(x_0)$. Nous avons rajouté cette condition « $f(x_0) = g(x_0)$ » à la condition « $\lim_{x\to x0} f(x)-g(x)= 0$ » dans le libellé de l'item a, afin que les étudiants pensent plus aisément ici à évoquer la continuité de f au point x_0 pour interpréter l'item a. L'expérience montre a posteriori que ce choix n'était pas pertinent. Insistons donc sur le fait que les étudiants rencontrent, à l'occasion du traitement de cet item, des problèmes non prévus, et que l'item n'amène pas *spontanément* le travail attendu sur l'articulation des propriétés de continuité et dérivabilité.

2°) Les difficultés liées aux pièges de la langue naturelle.

Ces difficultés sont tout particulièrement observables chez les étudiants lors de l'étude de l'item b, en lien avec l'interprétation qu'ils donnent à l'expression : « *au voisinage de x_0* ». La notion de « *voisinage d'un point x_0* » a été définie en cours, mais il n'a pas été précisé qu'une propriété est dite satisfaite « *au voisinage d'un point x_0* » lorsqu'elle l'est pour toute valeur de la variable x appartenant à *un certain voisinage de x_0* non précisé à l'avance (quantification existentielle *implicite*). On peut constater qu'il s'agit là d'une expression appartenant à un certain « *jargon* » mathématique couramment employé au sein de la communauté universitaire pour exprimer l'idée de propriété *locale*, mais dont la signification n'est pas forcément aussi transparente pour les étudiants qu'il nous paraît. Nous avions déjà constaté lors de notre mémoire de DEA l'existence de *malentendus* liés à l'usage d'idiotismes mathématiques[3] constitués à partir d'expressions courantes de la langue naturelle, et

[3] Comme par exemple : « les inégalités strictes *ne passent pas* à la limite », ou : « *contrôler* la dérivée ».

susceptibles pour ce motif, d'interprétations très personnelles de la part des étudiants. C'est le même phénomène qui semble se produire ici : l'expression utilisée, « *au voisinage de* », revêt ordinairement une signification un peu vague, ce qui favorise dans le contexte mathématique une certaine dérive du sens, là où elle est au contraire censée exprimer de façon précise « *sur un voisinage de* », le terme de voisinage d'un point ayant été préalablement défini.

Ainsi, on constate que pour une majorité d'étudiants, l'expression « $g(x) = f(x)$ *au voisinage de* x_0 » signifie que g(x) et f(x) sont d'autant plus proches l'un de l'autre que x est proche de x_0. Ils traduisent cela par : « $g(x) = f(x) + \varepsilon(x)$ *avec* $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ », ou bien identifient directement les propositions a et b, ou encore, introduisent une nuance entre ces deux propositions en affirmant que l'item b traduit la proximité de f(x) et de g(x) pour x *proche* de x_0, mais pris *distinct* de x_0. Il y a bien des étudiants qui remettent en cause ce type d'interprétations en objectant que la proposition b exprime l'égalité des termes f(x) et de g(x) « *un peu autour de* x_0 » (donc sur un intervalle contenant x_0), et non leur proximité. Mais l'impression de *flou* ressentie à travers l'expression « *au voisinage de* » est résistante, car ils ont bien du mal à préciser qualitativement ce qu'ils entendent par « un peu autour de x_0 ».

Etudiant X : « *Cela veut dire que pour x voisin de* x_0 *on a…* » *Il écrit :* $f(x) \approx g(x)$.
Etudiant Y : « *Oui, plus x est proche de* x_0, *plus f(x) est proche de g(x).* »
Etudiant Z : « *C'est bizarre. Dans ce cas, ça voudrait dire la même chose que le petit a, que* $\lim_{x\to x_0} f(x)-g(x)= 0$ *?* »
Etudiant Y : « *Oui, mais on n'a pas forcément* $f(x_0) = g(x_0)$ *ici, on a* $f(x) = g(x)$ *seulement au voisinage de* x_0, *donc c'est différent du petit a.* »
Etudiant X : « *Moi, je crois que c'est la même chose que a !* »

Un silence, les étudiants réfléchissent à ce qui vient d'être dit, ou griffonnent quelque chose (…)

Etudiant Z : « *Je ne suis pas d'accord avec ce que vous avez dit ! Vous dites que f(x) est* ***proche*** *de g(x) pour x proche de* x_0, *mais d'après l'énoncé f(x) est* ***égal*** *à g(x) au voisinage de* x_0 *!* »
Etudiant X : « *Oui, si on passe à la limite quand x tend vers* x_0, *on obtient f(x) égale g(x), donc cela donne que* $f(x_0)$ *égale* $g(x_0)$. »
Etudiant Z : « *Non, pas seulement ! C'est vrai aussi un peu autour de* x_0, *sur un petit intervalle.* »
Etudiant X : « *Quel intervalle ?* »
Etudiant Z : « *Je ne sais pas. Un petit intervalle contenant* x_0 *!* »

L'idée selon laquelle on aurait f(x) = g(x) sur un certain intervalle centré en x_0 (et non réduit à x_0) finit par faire son chemin, surtout après les aides apportées par M.Clinard et moi-même (dans le groupe que j'observe, je les mets sur cette voie de façon directe). Cependant, les étudiants des divers groupes ont du mal à *accepter* cette situation où la courbe représentative d'une fonction se confond avec une droite sur un certain segment. L'obstacle possède encore une dimension langagière (« Comment une courbe pourrait-elle cesser d'être *courbe* pour devenir *droite* ? », ce qu'exprime à sa façon Thierry, dans mon groupe), même si c'est la perception graphique des choses qui impressionne surtout les étudiants. L'un d'eux cherche une fonction usuelle susceptible de rendre crédible cette situation, et finit par citer l'exemple de la fonction f_n qui à x associe x^n, pour n grand (tracé très « évasé » en 0), avant que l'un de ses camarades lui fasse remarquer que $f_n(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$, donc que la courbe représentative de cette fonction ne se confond pas avec l'axe horizontal sur un intervalle non réduit à un point. C'est le besoin de se référer à des situations familières du lycée, tant au niveaux graphique et fonctionnel[4] qu'au niveau langagier, qui s'exprime ici chez les étudiants.

En début de DEUG A, ces derniers auront peut-être relevé aussi que la notion de *voisinage d'un point* est le plus souvent évoquée par l'enseignant à l'occasion d'un problème de *limite*, ce qui peut les amener de façon un peu superficielle à une association d'idées systématique entre les deux choses.

3°) Spécificités de l'item d : travail formel et écueils conceptuels.

L'item d s'avère être, de tous les items proposés, le plus riche de potentialités en questionnements divers, car porteur de difficultés particulières liées à une *imbrication complexe* des niveaux <u>conceptuel</u>, <u>technique</u>, <u>formel</u> et <u>graphique</u>. Bien que doté d'une originalité propre, au sein d'un atelier dont les autres items sont plutôt centrés sur l'idée d'approximation affine, il présente un *condensé* des problèmes posés par cet atelier, soulignant notamment les insuffisances d'une approche intuitive basée sur la perception graphique, et le caractère délicat des *médiations* et des *recentrages* de l'enseignant, face à la multiplicité des conflits soulevés. En cela, il constitue un *révélateur* des <u>reconstructions</u> nécessaires à la transition secondaire / supérieur, et de certains <u>décalages</u> entre ruptures *supposées* et ruptures *réelles* au sein de cette transition. Ainsi avons-nous pu constater, notamment lors de la préexpérimentation de Marne la Vallée, que l'identification, que nous pensions (trop) naturelle pour l'étudiant, entre le terme : $\lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / (2h)$ et le nombre dérivé de f en x_0, est effectivement réalisée dans certains groupes, mais au terme d'un travail de <u>repérage formel</u> parfois assez *chaotique* :

<u>Etudiant A</u> : « *Quand h tend vers 0, $f(x_0+h) - f(x_0-h)$ est la distance entre le trait haut et le trait bas... ça va faire zéro... donc on arrive au point M_0* »
(il a tracé une courbe, sa tangente en un point M_0, deux autres points sur la courbe, et deux traits horizontaux passant par ces points)
<u>Etudiant B</u> : « *C'est plutôt un rapport de deux distances, ça fait la pente de la tangente en M_0.* »
<u>Etudiant A</u> : « *Oui, mais ça va tendre vers le point quand même.* »
<u>Etudiant B</u> : « *Non, moi je crois que c'est la pente de la droite entre les deux points. Si je trace une droite (AB), le coefficient directeur de la droite c'est égal à : a =* $(y_A-y_B) / (x_A-x_B)$ »
(il trace une droite, place deux points A et B sur la droite, dessine le triangle rectangle correspondant, dont un côté représente la différence d'ordonnées et l'autre la différence d'abscisse entre A et B, et donne un exemple numérique)
<u>Etudiant B</u> : « *...par exemple, si $y_A = x_A = 1$ et $y_B = x_B = 2$, on a : (2-1) / (2-1) = 1* »
<u>Etudiante C</u> : « *On fait pas la limite alors ? Au fait, c'est quoi la définition du coefficient directeur pour la tangente ?* »
<u>Etudiant A</u> : « *... C'est $(f(x_0+h) - f(x_0)) / h$* »

Les étudiants du groupe semblent perdus. M.Artigue leur conseille alors de refaire un schéma plus grand et d'interpréter d'abord le terme : $(f(x_0+h) - f(x_0-h)) / 2h$ comme coefficient

[4] Ici, il faudrait pouvoir invoquer des fonctions définies par morceaux, et elles ne font pas partie des objets familiers au lycée.

directeur d'une *certaine* droite, pas forcément la tangente au point x_0, puis de passer ensuite à la limite. Lors du test écrit de septembre 1996, cette question du rapport entre dérivée symétrique et dérivée au sens classique avait été exploitée, mais le libellé de l'exercice, plus directif, proposait une entrée purement algébrique dans le problème. Il est intéressant de constater ici, qu'en l'absence d'indication, c'est graphiquement que les étudiants raisonnent spontanément, pour aboutir tous finalement, mais avec plus ou moins de facilités, à la conclusion que le terme $\lim_{h\to 0} (f(x_0+h)-f(x_0-h))/(2h)$ est égal au nombre dérivé de f en x_0.

Ce qui renforcent souvent leur conviction, c'est le fait que la sécante passant par les points d'abscisses x_0+h et x_0-h leur parait sur leur schéma, *avant tout passage à la limite*, parallèle à la tangente au point x_0...et l'est effectivement, puisqu'ils tracent généralement une courbe ressemblant à une parabole[5] ! D'autres étudiants relèvent simplement que le processus de passage à la limite ici en jeu est déjà sous-jacent à la relation d'égalité *connue* entre le coefficient directeur de la tangente en x_0 et le terme $\lim_{h\to 0} (f(x_0+h)-f(x_0))/h$, au sein duquel $(f(x_0+h)-f(x_0))/h$ mesure le taux d'accroissement d'une sécante (M_0M). Pour eux, la nouvelle expression obtenue, du nombre dérivé, n'appelle aucune *démarche de preuve* particulière, mais force est de constater que lorsque l'on sollicite cette démarche de leur part, ils invoquent parfois des justifications qui ne sont pas si aisées à contredire, et montrent la consistance du problème posé :

L'enseignant : « *...vous allez un peu vite, lorsque vous supposez que faire tendre deux points à la fois va donner le même résultat que d'en faire tendre un seul ! Cherchez une preuve par le calcul !* »
Florence conseille de poser : $X = x_0-h$, ce qui lui donne alors : $x_0-h = X+2h$.
Elle écrit ainsi : $\lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / (2h) = \lim_{h\to 0} (f(X+2h) - f(X)) / (2h)$.
Florence : « *Et si on pose $H = 2h$, on retrouve le taux d'accroissement du cours.* »
L'enseignant : « *Regardez ! Dans le taux d'accroissement habituel, que vous avez vous-même rappelé, on a : $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) / h$, avec x_0 fixé, alors que votre X, lui, est variable, puisque $X = x_0-h$. Il est amené à tendre vers x_0 quand h tend vers 0. Donc vous ne pouvez pas remplacer votre terme par $f'(X)$, et encore moins par $f'(x_0)$, d'accord ?* »
Florence : « *Oui !* »

La proposition formulée par Florence atteste de signes d'évolution par rapport aux attentes du lycée : cette étudiante montre une certaine familiarisation vis à vis de changements de variables dont elle a elle-même l'initiative. Mais le rapport qu'elle entretient à la *formalisation* ne lui permet pas d'identifier le problème posé du statut de chaque terme de la formule.

De façon similaire, on constate que certains étudiants, au sein des divers groupes, repèrent bien le rôle, dans la résolution du problème posé, de la décomposition du taux d'accroissement symétrique en somme de deux taux d'accroissement « classiques », sans toutefois cerner la raison pour laquelle cette décomposition permet d'établir pour l'item d un sens d'implication mais pas l'autre. C'est la technique même du raisonnement par *implication*, avec identification précise de l'hypothèse de départ et de la conclusion visée, qui

[5] Il s'agit là d'une propriété bien connue des paraboles.

leur fait ici défaut, alors qu'ils ont bien eu l'idée d'introduire la transformation algébrique ad hoc. Ils jugent alors globalement l'identité :

$$(f(x_0+h) - f(x_0-h)) / (2h) = ½ [(f(x_0+h) - f(x_0)) / h + (f(x_0) - f(x_0-h)) / h],$$

comme corrélative de l'égalité entre dérivée symétrique et dérivée usuelle, par suite d'un « simple » passage à la limite.

Notons que la proposition faite aux étudiants, pour l'étude de la réciproque, de tester la fonction $\varphi : x \to |x|$ en 0, n'a pas toujours eu l'effet attendu. Certains, par exemple, estiment que $\lim_{h\to 0} (\varphi(h)-\varphi(-h)) / (2h)$ est une forme indéterminée[6], et les arguments mis en œuvre pour les convaincre du fait que cette limite est nulle (en insistant par exemple sur le fait que la fonction de h présente au numérateur est la fonction nulle) ne dissipent pas toujours leur scepticisme. Là encore, c'est l'argument graphique qui emporte l'adhésion de ces étudiants : les segments joignant deux points d'abscisses h et –h du graphe de $x \to |x|$ sont horizontaux *quel que soit l'ordre de proximité de h à 0*, tandis que la courbe n'admet pas de « pente à l'origine » (voir la représentation graphique à la fin du protocole en annexe). Ce mode de fonctionnement est déjà familier au niveau du lycée et le médiateur peut donc s'appuyer sur lui avec profit.

4°) Les difficultés d'ordre logique.

De telles difficultés avaient déjà été repérées lors de la préexpérimentation réalisée à l'université de Marne la Vallée. On s'était ainsi rendu compte que l'idée d'envisager chaque proposition en tant que condition nécessaire, puis en tant que condition suffisante de dérivabilité en x_0, ne correspond pas au fonctionnement usuel des étudiants, même si cette démarche est suggérée par le texte. Ils tentaient seulement de déterminer, à chaque fois, si cette proposition exprimait, ou non, selon eux, la dérivabilité de la fonction au point x_0 considéré.

On s'aperçoit avec la nouvelle forme de questionnement, *imposant* cette fois de travailler *séparément* sur le caractère nécessaire, puis le caractère suffisant des propositions, que les étudiants ont de grandes difficultés à *respecter*, voire même à *comprendre* la consigne. J'ai ainsi été obligé de recentrer à plusieurs reprises, en début de partie B, le travail des étudiants du groupe dont j'avais la charge[7], et j'ai observé un moment de « flottement » en début de partie C (étude des réciproques) : certains d'entre eux n'identifient pas immédiatement la tâche proposée et ont d'abord l'impression qu'on leur demande de recommencer le même travail. Comme nous l'avions repéré dans notre analyse théorique (cf. chapitre I de cette thèse), il y a ici en jeu un mode de fonctionnement qui n'est pas encore un objectif d'apprentissage très affirmé au lycée, où la plupart des raisonnements, surtout en Algèbre et en Analyse, s'effectuent directement par équivalences. Cet atelier montre que cet apprentissage, désormais indispensable en début de DEUG, et plutôt en rupture avec les habitudes acquises au lycée, s'avère très délicat et doit se mener sur le long terme.

---

[6] On retrouve là un obstacle d'ordre conceptuel, déjà rencontré dans les réponses du test écrit de 1996.

[7] Dans les autres groupes, gérés de façon collective, les injonctions de l'enseignant ont été inégalement suivies.

Dans ce contexte, les questions d'*unicité* venant se superposer à ce problème initial de nature logique passent inaperçues dans de nombreux groupes (qui les ignorent) ou aboutissent parfois à des *contresens*. Ainsi, y a-t-il des étudiants qui affirment que l'item a (partie B) est vrai parce que la tangente en un point donné est unique, ce qui n'est pas du tout le problème posé ici. Le fait d'avoir à se prononcer sur la validité de propositions qui se présentent comme la conjonction de deux assertions amène ainsi une certaine confusion et ce, même lorsque ces dernières sont correctement identifiées et interprétées. Ainsi, les étudiants du groupe « *Florent, JP, Thierry, Christel, Florence* » ayant établi pour cet item a que la fonction affine tangente en x_0 vérifie effectivement la proposition «$g(x_0)=f(x_0)$ *et* $\lim_{x\to x0} (f(x)-g(x)) = 0$ », mais que ce n'est pas *l'unique* fonction affine satisfaisant à cette condition, sont désorientés pour conclure sur la validité, ou non, de la proposition B/a) :

> J.P : « *Mais alors, la proposition a, elle est vraie ou elle est fausse ?* »
> Thierry : « *Ben, elle est vraie, sauf l'unicité.* »
> Florent : « *Non, elle est fausse, puisqu'on demande aussi l'unicité !*
> Devant la perplexité du groupe, je les départage :
> Nous-mêmes : « *C'est Florent qui a raison. Rappelez vous d'une proposition de la forme : (p et q) est vraie si et seulement si p est vraie et q est vraie à la fois.* »

5°) Choix d'approfondissement : analyse critique.

Il est instructif d'étudier les interactions entre les étudiants et l'enseignant, au sein du groupe « *Florent, JP, Thierry, Christel, Florence* » que nous avons piloté de près, afin d'analyser a posteriori nos choix d'interventions, leurs *raisons*, et en constater *l'influence* prépondérante sur le *déroulement* de la séance (si on se réfère, par comparaison, à ce qui s'est passé dans les autres groupes, moins aidés).

On peut ainsi relever que les potentialités de la situation sont particulièrement importantes concernant les items a, b, d, qui soulèvent parfois des discussions et des questions tout à fait imprévues (Par exemple : « *Est-ce qu'il est équivalent de dire que* $\lim_{x\to x0} f(x)-g(x) = 0$ *et que* $\lim_{x\to x0} f(x) = \lim_{x\to x0} g(x)$? », ou : « *Est-ce que* $f(x)=g(x)$ *au voisinage de* x_0 *signifie que* $f(x) = g(x)$ *sur un intervalle de largeur dx infinitésimale ?* »). Il se peut, dans ce cas, que le conflit ou l'interrogation se situent un peu *en marge* de l'atelier et éloignent le groupe de l'essentiel, de la trame centrale du questionnement. Il nous appartient alors de décider dans l'instant de laisser les débats se développer, ou d'y couper court en répondant nous-mêmes ou en recadrant la discussion[8], selon que l'on juge que le problème soulevé peut avoir, ou non, par la suite, une utilité par rapport au travail visé dans l'atelier. A l'inverse, il nous arrive parfois à notre tour, de solliciter des réponses sur un problème que ne se posaient pas les étudiants et que nous leur signalons. On peut constater que la fréquence de toutes ces décisions, déchiffrables à la lecture de la transcription écrite de la séance (en annexe), est très importante.

Ainsi avons-nous demandé ici aux étudiants (partie A : résultats préliminaires) de retrouver la définition de la dérivabilité par approximation affine (qu'ils n'avaient pas évoquée d'eux-

[8] Le même type de problème se pose dans la gestion des débats en cours de M.Legrand (lire l'article : « Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse. », Repères-Irem n°10, Topiques Editions, p.123-p.159, M.Legrand, Pont-à-Mousson, 1993).

mêmes), parce que nous estimions que cela pourrait leur être utile pour la suite de l'atelier. Nous les avons dirigé dans cette tâche de façon précise, les aidant à exclure au moyen d'un raisonnement ad hoc la formule incorrecte qu'ils proposaient d'abord pour cette définition (à savoir : $f(x) = f(x_0) + (x-x_0).f'(x_0) + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$), pour retrouver après, le résultat convenable à partir de la définition par le taux d'accroissement (mieux connue de leur part). En revanche, nous n'avons pas tenté, par exemple, de solliciter chez les étudiants une critique de la définition de la dérivabilité en x_0 qui a été donnée par Christel : « *f est dérivable en* x_0 *si* $\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0))/(x-x_0) = f'(x_0)$ », parce qu'il nous a semblé que cela présentait moins d'intérêt vis à vis des objectifs de l'atelier. De même, nous avons coupé court au débat qui risquait de naître entre Florence et certains garçons du groupe, sur la différence entre définition mathématique et définition pour la physique.

Concernant le problème des rapports entre continuité et dérivabilité en x_0, qui est visé dans l'item a, on voit très bien qu'une *négociation* se dessine peu à peu en cours de séance entre le groupe d'étudiants et nous-mêmes. Au début, nous favorisons et nous alimentons le travail de réflexion du groupe sur des questions telles que : « *Est-ce que* $\lim_{x\to x_0} f(x)-g(x) = 0$ *équivaut à dire que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$? » ou bien : « *Les deux assertions,* $f(x_0) = g(x_0)$ *et* $\lim_{x\to x_0} f(x)-g(x) = 0$ *sont-elles équivalentes ?* ». Nous le faisons car nous pensons que cela peut aider les étudiants à traduire ensuite l'item a en termes de continuité de f au point x_0. Mais devant leur grande difficulté à percevoir le rôle de cette propriété dans l'item a, qu'ils traduisent uniquement en termes graphiques de droite et courbe sécantes au point x_0, nous nous contentons, lors de l'étude du problème réciproque (partie C), de leur interprétation, fournissant alors nous-mêmes la réponse attendue :

Florence : « *Il y a une infinité de droites qui marchent, on l'a vu, toutes celles qui coupent la courbe au point* M_0 *; pas seulement la tangente.*
Donc F n'est pas forcément dérivable au point x_0 *!* »
Nous-mêmes : « *Voilà, c'est l'idée, mais avec en plus F continue en* x_0*, rappelez vous ! Donc la proposition a est fausse. D'ailleurs vous savez qu'une fonction continue en un point* x_0 *n'est pas forcément dérivable en ce point* x_0*.* »

Nos interventions ont souvent pour objectif de mettre en évidence ou bien d'exprimer plus clairement une idée que les étudiants n'osent pas vraiment formuler[9], ce qui leur permet le cas échéant d'*objectiver* cette pensée. Mais ces interventions peuvent aussi viser à faire produire aux étudiants une véritable démonstration là où ils seraient enclins à se forger une opinion sur des considérations graphiques sujettes à caution. C'est le cas dans l'item d, où les étudiants raisonnent à partir du tracé qu'ils ont réalisé, d'une courbe « bien ronde » type parabole, et s'appuient sur le fait que la corde définie par les points d'abscisses x_0-h et x_0+h semble adopter pour position limite celle de la tangente au point d'abscisse x_0 pour affirmer que dérivée symétrique et dérivée usuelle en un point sont interchangeables. De même, aux étudiants qui doutent qu'un segment de droite puisse admettre une tangente en chacun de ses points, la même pour tous, nous demandons si une fonction affine est dérivable en chacun de ses points, quelle est sa dérivée, et si, en conséquence, la droite qui en est la représentation graphique admet une tangente en tout point :

J.P : « *La tangente touche la courbe en un point unique !* »

[9] Parfois, parce qu'ils n'en ont pas encore évalué toutes les conséquences.

Florence : « *Pas toujours ! Par exemple, elle peut être tangente à la courbe en deux points différents.* » (elle fait un schéma)

J.P : « *Oui, mais c'est pas pareil, là ce sont des points éloignés l'un de l'autre.* »

Christel : « *Dans le cas de la tangente, on a $f(x_0) = g(x_0)$, mais on n'a pas $f(x)=g(x)$ tout autour de x_0. Par exemple, pour x donne x^2, l'axe horizontal est tangent en 0 seulement !* »

Florent : « *Mais si on a $f(x)=g(x)$ tout autour de x_0, c'est encore mieux ! C'est tangent sur tout l'intervalle où on a $f(x)=g(x)$.* »

Nous-mêmes : « *Est-ce qu'une fonction affine g est dérivable en tout point ?* »

Les étudiants (un peu étonnés de ma question) : « *Oui !* »

Nous-mêmes : « *Et comment est sa dérivée ?* »

Thierry : « *Constante ! $g'(x) = a$ si on pose : $g(x) = ax+b$* »

Nous-mêmes : « *Est-ce qu'une fonction dérivable en un point correspond toujours à une courbe admettant une tangente en ce point ?* »

Thierry : « *Oui ! Donc on peut dire qu'une droite est sa propre tangente en tout point ?* » (encore vaguement interrogatif, il semble accepter l'idée)

J'acquiesce doucement d'un mouvement de tête. Chacun paraît alors convaincu...

On constate que les conceptions des étudiants sur la tangente s'effacent alors devant l'évidence des résultats obtenus par le calcul. Une telle façon de gérer la difficulté des étudiants à concevoir qu'une droite confondue avec une courbe sur tout un segment est un cas particulier de tangence nous a semblé ici plus pertinente que de trancher nous-mêmes la question en affirmant de manière péremptoire qu'il en va bien ainsi.

S'agissant en revanche du problème de la valeur de vérité de la conjonction de deux propositions, l'une vraie, l'autre fausse (item a), comme vu plus haut nous avons départagé rapidement les étudiants d'avis opposés, car nous ne voulions pas permettre à une polémique éloignée du sujet de l'atelier et risquant de tourner à vide assez vite, de se développer. Sur la fin de l'atelier, pressés par le temps, nous nous sommes montrés plus *directifs*, en particulier en ce qui concerne la réciproque de l'item d : le contre-exemple leur est livré brutalement (ils n'ont plus qu'à le tester). L'interprétation graphique du phénomène leur est également suggérée.

Etudiant X : « *Bon ben..., c'est pareil que tout à l'heure !* »

(...) Les autres restent perplexes.

Etudiant X : « *Mais si ! Rappelez vous, on avait réussi à prouver l'égalité entre le terme $\lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / (2h)$ et $f'(x_0)$* »

Etudiant Y : « *Oui, mais c'est pas exactement pareil ! C'était un sens d'implication, et là, c'est l'autre sens qu'il faut étudier...* »

Etudiant X : « *Mais ça marche dans les deux sens, puisqu'il y a égalité !* »

Etudiant Z : « *Tu crois ?...* »

Etudiant X : « *Je ne vois pas pourquoi on ne pourrait pas utiliser le même raisonnement qu'en partie B !* »

Ils en conviennent tous ; ils n'ont rien d'autre à proposer...

L'enseignant (un peu ennuyé de la tournure que prennent les choses):

« *Bon, vous allez tester la fonction « valeur absolue de x », calculer la dérivée symétrique en 0 pour cette fonction...* »

Nous avons estimé nous trouver là devant une sorte d'*impasse*, n'ayant pas d'autre alternative en tête au niveau du *pilotage* : les étudiants sont en général portés à penser que la réciproque est satisfaite, et se mettre alors à imaginer un contre-exemple constitue pour eux, dans le contexte, un « virage à 180° » qu'ils ne prennent jamais. Ils nous semble cependant qu'une médiation moins fruste de la part de l'enseignant reste ici possible et mérite d'être repensée. Le problème de la *dévolution* de l'ensemble de l'activité proposée ici, assez inhabituelle pour ces étudiants, a priori peu évidente, se pose de façon cruciale. On a vu en particulier que l'analyse dédoublée qui leur est demandée, par condition nécessaire puis par condition suffisante, n'est pas très bien comprise en début de séance par les étudiants, qui n'arrivent à intérioriser ce travail que peu à peu, *dans la durée*, avec la répétition des items.

De même, la nécessité de dépasser ses *premières impressions*, de ne pas rester à un niveau purement *« intuitif »*, pour se mettre en quête d'une démonstration rigoureuse et, le cas échéant, de recourir pour cela à une formalisation précise de certaines propriétés, relève d'une prise de conscience progressive. C'est véritablement ce type de démarches, de modes de fonctionnement, que cet atelier nous donne l'occasion de travailler avec les étudiants pour qu'ils leur deviennent peu à peu plus familiers.

C/ RECONSTRUCTION DE L'ATELIER A POSTERIORI.

1°) Allégements dans la forme et sur le fond. Justifications.

A la lumière du déroulement des diverses expérimentations menées, nous tentons à présent d'établir un cahier des charges pour un tel atelier, visant à en améliorer la *viabilité* et en faciliter la *gestion* en resserrant le travail proposé autour de quelques objectifs d'apprentissage bien ciblés.

Tout d'abord, nous devons procéder à une simplification de la forme du questionnement permettant de rendre mieux perceptible pour l'ensemble des étudiants le *fil directeur* général de cet atelier. Ainsi, il apparaît au terme des expérimentations menées à Orléans comme à Marne la Vallée, que la présentation initiale d'une fonction dérivable en un point x_0, avec interprétation de cette situation dans le cadre graphique en termes de tangente, et introduction de notations ($y = ax+b$ pour l'équation de cette tangente, $g(x) = ax+b$ pour la fonction affine associée) est peu pertinente. Non seulement cette présentation *alourdit* le texte de l'atelier, en précisant les composantes d'une situation somme toute assez banale, mais en outre, elle se situe dans ce texte trop loin de l'énoncé des items qui s'appuient (inutilement) sur elle, ce qui nuit gravement à la *lisibilité* du questionnement. Cet aspect prend même un tour caricatural dans l'item d de la partie B (situé page 2) où il est question du coefficient directeur « a » de la tangente en x_0, auquel on n'avait jamais fait allusion depuis le début du texte de l'atelier.

Pour les mêmes raisons, nous pensons préférable de supprimer également la partie intitulée « *résultats préliminaires* », qui est consacrée au rappel et à la justification de l'équation de la tangente, et au rappel des définitions de la dérivabilité en un point. Ces définitions peuvent être rappelées par les étudiants *pendant* l'étude des items, selon leur choix et leur besoin. Quant à l'équation de la tangente, familière aux étudiants, elle n'est pas un enjeu de cet atelier[10].

[10] Expérience faite, la rappeler n'amène en rien les étudiants à se référer ensuite à la définition par approximation affine de la dérivabilité, ici utile, mais qui n'a pas le même statut et s'avère beaucoup plus complexe à saisir.

Compte tenu des difficultés logiques inhérentes à cet atelier, liées au travail sur condition nécessaire et condition suffisante, nous proposons aussi de supprimer dans la formulation des items tout ce qui a trait à *l'unicité*, qui amène une perturbation supplémentaire. Peut-être serait-il aussi profitable d'expliciter davantage les quantifications universelles sous-jacentes : *« Ces assertions sont-elles toujours vraies si f est dérivable en x_0 ? »*, *« Sous telles hypothèses, est-on sûr que f est dérivable en x_0 ? »*...

A la suite de ces différentes dispositions, nous aurions un atelier constitué simplement de deux parties :

1) *« Pour une fonction f dérivable en x_0, dites si les propositions suivantes sont nécessairement vérifiées : ... »*,
2) *« Dans chacun des cas suivants, peut-on assurer que la fonction f est dérivable en x_0 ? ... »*.

Le travail demandé s'en trouverait selon nous clarifié, du fait de la mise en évidence d'une ligne directrice, d'un thème central bien identifiables.

Afin de ménager une phase de synthèse *collective* incluant la participation *active* des divers groupes d'étudiants, d'une durée *minimale* nécessaire, selon nous, d'une vingtaine de minutes, nous estimons qu'il y a lieu de ne pas trop diversifier les formes de problèmes présentes au sein de ce questionnement. Nous pensons ainsi que le travail sur la différenciation entre approximations d'ordre 0 et 1, incluant les notions connexes de *voisinage d'un point* et de *propriété locale* suffit largement à nourrir un tel atelier en lui conférant en outre une certaine unité. L'item d semble dans ce contexte un peu « décalé » par rapport au travail nécessité par les autres items, et demande un investissement trop important, soulevant des problèmes qualitatifs majeurs. Sa prise en charge nécessite selon nous un scénario particulier, en plusieurs étapes, par exemple du type de celui imaginé dans l'exercice du test de 1996. Pour toutes ces raisons, il nous semble nécessaire de l'écarter d'une version remaniée de cet atelier. En revanche, le travail réalisé avec le groupe *« Florent, JP, Thierry, Christel, Florence »* en vue de reconstituer la définition de la dérivabilité par approximation affine nous a montré l'utilité d'une étude du lien entre une assertion du type : « $f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ », et la dérivabilité au point x_0. Cela nous paraît bien s'inscrire dans la perspective d'un approfondissement sur le thème de l'ordre d'une approximation. Cet item pourrait se situer en première position dans la liste, permettant ainsi un travail de mise au point préalable concernant la définition visée, et aux étudiants, de recourir plus spontanément à des formalisations[11] susceptibles d'être ensuite réinvesties lors de l'étude des autres items. Notons encore que ce nouvel item peut se substituer avantageusement à l'item c actuel, correspondant au cas de dérivabilité en un point x_0 avec valeur nulle du nombre dérivé, item dont l'analyse ne présente pas d'intérêt particulier.

Les items a, b, e, en revanche, nous semblent utiles à conserver, avec un léger aménagement pour l'item a : la condition « $f(x_0) = g(x_0)$ », qui est apparue comme redondante avec la condition « $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$ » dans le contexte proposé (où f et g sont définies en x_0 et g affine) n'aide en rien les étudiants à percevoir le problème de continuité en x_0 qui se pose et peut donc être supprimée. Nous aurions ainsi, dans une nouvelle version du questionnement

[11] Recomposition du taux d'accroissement, puis tentative de passage à la limite.

consultable en annexe, présence de quatre items seulement, ce qui doit faciliter selon nous la gestion de cet atelier, tout en lui conservant une certaine richesse.

2°) Une aide à la résolution possible.

Nous pourrions joindre au questionnement, sur une feuille à part, un certain nombre de représentations graphiques figurant différentes possibilités de positions relatives d'une droite et d'une courbe, positions susceptibles ou non de caractériser la tangence en un point x_0. Le cas d'une courbe et d'une droite se confondant sur tout un intervalle ferait notamment partie des situations envisagées, ce qui éluderait tout naturellement pour l'étudiant la question de savoir si une telle situation est envisageable ou non. D'autres représentations graphiques correspondraient à des cas de non continuité en x_0, de continuité mais de non dérivabilité au point x_0, ou au cas où la courbe et la droite sont simplement sécantes en ce point, ce qui pourrait permettre selon nous aux étudiants à mieux cerner la signification de l'item a. Un exemple d'une telle feuille d'aide au repérage des situations est consultable en annexe.

3°) Institutionnalisation, bilans.

Un tel atelier doit déboucher notamment sur une institutionnalisation de la notion de « *propriété vérifiée au voisinage d'un point x_0* » et de la définition de la dérivabilité en un point par approximation affine. Cette dernière, souvent délicate à mémoriser pour les étudiants, surtout au niveau du reste auquel ils n'accordent généralement pas un sens très précis, pourrait acquérir désormais davantage de signification du fait du travail de comparaison ici sollicité avec les diverses propositions envisagées.

Quelques aides très ponctuelles doivent, selon nous, permettre à présent d'amener les étudiants à réaliser ce travail que nous souhaitons leur voir ici aborder. Par exemple, nous pouvons leur préciser que l'expression « *au voisinage de* » signifie simplement « *sur un voisinage de* » en leur rappelant que la notion de voisinage d'un point a été précisément définie en cours. Leur conseiller de formaliser la propriété à l'aide de quantificateurs et, un peu plus tard, de se demander si une fonction affine est dérivable en chacun de ses points pour décider si une droite est, ou non, sa propre tangente en tout point, fait partie des autres aides à la résolution envisageables. Leur rappeler assez souvent de fonder leur jugement sur des exemples et des contre-exemples paraît constituer une nécessité pour gérer ce type d'atelier, comme le fait de les inciter à produire des schémas divers et variés, correspondant *ou non* à des fonctions usuelles ou d'expression analytique facilement identifiable.

Au terme de nouvelles séances d'atelier faisant suite à la reconstruction envisagée pour ce dernier, une *synthèse écrite* pourrait être distribuée aux étudiants, cette synthèse dressant le bilan des principaux débats ouverts, les réglant chacune tour à tour et présentant ensuite une solution correcte pour chaque item, avec institutionnalisation de certaines notions fondamentales. Compte tenu de ce que nous avons pu observer durant les séances décrites, cette synthèse devrait notamment aborder largement la question des diverses interprétations données par les étudiants à l'égalité « $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$ », ou à l'expression « *au voisinage du point x_0* », faire peut-être aussi le point sur certaines conceptions liées à la notion de limite, à celle de tangente,... etc.

On peut aussi prévoir, à l'inverse, de *demander* aux étudiants un travail de synthèse postérieur à la séance, articulé par des questions précises ayant trait à un ou plusieurs items.

II/ L'ATELIER SUR LES FONCTIONS A CROISSANCE FORTE.

A/ DEROULEMENT GENERAL DES EXPERIMENTATIONS.

1°) Présentation des préexpérimentations d'Orléans et de Marne la Vallée.

Les conditions générales de déroulement ont été assez différentes pour ces deux préexpérimentations, ce qui a notamment eu une forte influence au niveau de la gestion du temps imparti à chacune de ces séances d'atelier. Cependant, dans les deux cas, nous avons pu *piloter de près* le travail des étudiants en groupes, ce qui a largement facilité l'avancement de ce travail.

A Orléans, la séance d'atelier remplaçait une séance de travaux dirigés ordinaire d'une durée de deux heures dans l'une des classes de M.Clinard qui ne comportait ce jour là que dix étudiants que nous avons répartis sur trois groupes. Nous étions donc deux enseignants, M.Clinard et nous-mêmes, pour diriger et observer cette séance. Le temps effectif consacré à cet atelier fut en réalité d'une heure et quarante minutes, les vingt premières minutes étant consacrées à une interrogation écrite (sans rapport avec l'atelier). Les trois groupes, constitués d'étudiants en milieu de première année de DEUG A (enseignement annualisé), se sont révélés à travers leur participation et leurs productions respectives de « niveaux » très variables.

A Marne la Vallée, environ un mois plus tard, nous étions seul pour gérer et observer un groupe unique de six étudiants *redoublant* le premier semestre de la première année de DEUG A, et *volontaires* pour participer à cette séance d'atelier en dehors des heures « normales » d'un enseignement organisé par semestres immédiatement redoublables. Le temps effectif consacré à cet atelier fut en fait de deux heures et quinze minutes, ce qui a été rendu possible par l'absence de contraintes de nature institutionnelle. Le groupe, à la fois plus homogène et plus faible que celui d'Orléans, a travaillé beaucoup plus lentement. C'est ce qui nous a amené à rallonger un peu la durée initialement prévue pour cette séance.

Le travail proposé, planifié sur une seule séance d'atelier, et constitué d'une partie A consacrée à la recherche d'exemples de fonctions à croissance forte, une partie B à l'étude des conjectures, et une partie C à une application, s'est avéré lors de chacune des deux préexpérimentations bien trop long pour le temps imparti.

A Orléans, le groupe le plus rapide a consacré l'essentiel de son temps (environ une heure et quart) à la partie A, mais a réalisé sur cette partie un travail consistant, ne négligeant aucune question. La recherche d'exemples de fonctions à croissance forte au sein de l'échantillon proposé de fonctions paramétrées a nécessité beaucoup d'énergie de la part des étudiants, occasionnant en particulier d'importantes discussions. Mais c'est la preuve du fait que la fonction définie par : $f(x)= -\ln(|x-1|)$ pour $x\leq 0$, et $f(x) = x+x^3/3$ pour $x>0$, est à croissance forte sur R, qui a généré les débats les plus longs et les plus *riches*, mettant en relief au niveau du contenu bien des subtilités mathématiques sous-jacentes au problème posé[1]. Ainsi, c'est donc l'étude de cet exemple qui, du fait de sa richesse, nous a semblé la plus incompatible avec le choix d'une planification de cet atelier sur une seule séance, voire même sur deux séances, car cette étude présente par elle-même un enjeu de travail assez lourd et bien spécifique. La partie B/ de l'atelier a ensuite été, en contrepartie, seulement effleurée lors de la préexpérimentation d'Orléans.

A Marne la Vallée, fort de cette première expérience, et prenant en compte le fait que nous aurions à réaliser cet atelier avec des étudiants redoublants, donc a priori « plus faibles », nous avons choisi délibérément de laisser de côté l'une des trois recherches de fonctions paramétrées à croissance forte (celle concernant la fonction tangente) et toute la fin de la partie A/ (questions 3°)b) et 3°)c) liées à l'étude de la fonction définie par recollement de deux expressions algébriques). Les étudiants ont ainsi pu consacrer plus de la moitié de leur temps à l'étude des conjectures.

Notons enfin que nous avions fait l'expérience, à Orléans, d'accorder l'usage des calculatrices à l'un des trois groupes et pas aux deux autres, afin de voir si cette variable pouvait jouer un rôle dans le travail des étudiants. Dans la mesure où ceux qui disposaient des calculatrices ne les ont guère utilisées, nous avons décidé, au terme de cette première séance, de laisser la calculatrice à tous les étudiants lors de la seconde préexpérimentation, puis lors des expérimentations suivantes à l'université de Marne la Vallée. L'expérience a montré systématiquement qu'ils n'en faisaient usage que *très exceptionnellement*, jamais de manière *collective* et, qu'à chaque fois, cela n'influait en rien sur le déroulement général de l'atelier.

2°) Déroulement des préexpérimentations d'Orléans et de Marne la Vallée.

Lors des deux préexpérimentations, les étudiants ont cité assez spontanément l'exponentielle comme exemple de fonction à croissance forte sur R. A Orléans, deux des trois groupes ont rapidement pensé à évoquer aussi les fonctions du type : $x\to a^x$, avec $a>1$, comme famille de fonctions à croissance forte sur R. A Marne la Vallée, en revanche, la recherche d'une telle famille aura duré une demi-heure, faisant l'objet de débats que nous avons nous-mêmes entretenus, les étudiants formulant au départ des théorèmes en actes, et proposant des familles ne répondant pas à la propriété de croissance forte sur R (telles que : $x\to \exp(f)$ avec f strictement croissante sur R, $x\to \exp(x^\alpha)$ avec α entier naturel impair, ou encore $x\to a^x$ avec $a>0$,... etc.). Nous sommes intervenu notamment afin de leur suggérer de mettre leurs (nombreuses) propositions à l'épreuve du calcul. Face à la répétition de généralisations hâtives, nous nous sommes montré avec eux rapidement très *directif*, leur suggérant

[1] La richesse de cette problématique était cependant prévisible, puisque l'étude d'une fonction définie par deux expressions algébriques de part et d'autre d'un point donné a préalablement fait l'objet d'un exercice des tests de septembre (partie VI de cette thèse).

notamment de déterminer le signe des deux premières dérivées d'une fonction pour tester la propriété de croissance forte[2].

La question A/2°) n'a fait l'objet d'aucun développement particulier lors des deux préexpérimentations, chacun s'accordant à dire qu'il existe sans doute bien d'autres fonctions à croissance forte sur R que celles désignées, même s'il se sent pas capable pour le moment d'en citer.

La recherche de fonctions à croissance forte sur un intervalle donné, au sein de familles données de fonctions paramétrées, pose quelques problèmes de nature technique rencontrés lors des deux préexpérimentations : *« Comment adapter le paramètre a pour que la quantité (x-a) soit positive pour tout x de]-10000, +∞ [? »* (condition de stricte croissance de $x \to A(x-a)^{\alpha} + B$ sur cet intervalle), ou bien : *« La dérivée de $x \to A.\ln(|x-a|)$ est-elle $x \to A/(x-a)$ ou $x \to A/(|x-a|)$? »*. La durée de cette recherche est à peu près la même (environ 20-25mn) lors des deux préexpérimentations, mais la méthode mise en jeu par les étudiants est très différente du fait de nos interventions. *Spontanément*, les étudiants se sont référés pour réaliser la question A/1°) à leur connaissance générale des fonctions prototypes du lycée ($x \to e^x$, $x \to x^n$, $x \to a^x$,... etc.), et ceux d'Orléans tentent aussi de le faire lors de ce travail sur des familles de fonctions paramétrées. Ils ne procèdent pas en dérivant *deux fois* ces fonctions pour déterminer si leur dérivée première est strictement croissante[3] sur tel ou tel intervalle, mais raisonnent plutôt de façon qualitative (affirmant par exemple que $x \to (x-a)^{\alpha}$ est strictement croissante sur $]a,+\infty[$ pour $\alpha>0$). Cependant, à Marne la Vallée, devant les nombreuses erreurs commises par les étudiants dans ces raisonnements qualitatifs, il nous a semblé plus simple de leur conseiller de procéder par double dérivation, de sorte que *seule* cette méthode est utilisée à partir du A/3°)a) lors de la seconde préexpérimentation.

La question A/3°)b) n'a été traitée que lors de la première préexpérimentation à Orléans, par les deux groupes les plus « performants », et a fait l'objet de leur part d'un travail de réflexion et de débats assez longs (une demi-heure environ), dont nous rendrons compte de façon plus détaillée un peu plus loin. Comme nous l'avions prévu dans notre analyse a priori, le problème du « raccord » en zéro (continuité et dérivabilité) pour la fonction f définie par : $f(x) = -\ln(|x-1|)$ pour $x\leq 0$, et $f(x) = x+x^3/3$ pour $x>0$, est au départ oublié par les étudiants car il se *superpose* ici à l'étude des variations des deux fonctions $x \to -\ln(|x-1|)$ et $x \to x+x^3/3$ sur R_- et R_+^* respectivement, et de leurs dérivées premières. En outre, les étudiants ont le sentiment qu'il suffit de vérifier que ces fonctions sont à croissance forte respectivement sur R_- et R_+^* pour pouvoir en déduire que f l'est sur R, autrement dit ils estiment qu'*une fonction croissante sur R_- et R_+^* est nécessairement croissante sur R.* Une telle supposition, qu'il est assez naturel de formuler lorsque l'on est habitué à l'environnement fonctionnel du lycée, montre bien l'évolution qui reste à provoquer chez ces étudiants dans la transition secondaire / supérieur. Cette supposition ne favorise pas, par ailleurs, la prise de conscience chez les étudiants du fait qu'une étude particulière de la

[2] C'est un phénomène couramment observé : face à un public plutôt faible, un enseignant a souvent tendance à restreindre rapidement le champ des possibles (bien que cette mesure ne soit pas très souhaitable) pour tenter de canaliser l'action de ce public vers l'obtention des solutions correctes qu'il attend de lui voir produire.

[3] Cette observation répond à une des interrogations de l'analyse a priori. Des étudiants en milieu de première année de DEUG Sciences, et en l'absence de toute indication, vont-ils plutôt avoir recours à leurs connaissances de terminale sur les fonctions usuelles, ou utiliser une méthode générale très emblématique de la culture du supérieur, et certes très efficace, mais non indispensable ici : dériver autant de fois que nécessaire la fonction ?

continuité et de la dérivabilité en zéro s'impose ici. La question A/3°)c) a été « survolée » par ces étudiants, qui ne décèlent pas à travers l'exemple étudié en A/3°)b) de mode d'obtention général de fonctions à croissance forte sur R. Nous les laissons cependant passer à la partie B de l'atelier, car il ne leur reste que peu de temps pour l'étude des conjectures.

La partie B a été travaillée de manière très inégale à Orléans et à Marne la Vallée, le groupe d'étudiants le plus avancé lors de la première préexpérimentation ne disposant que de vingt-cinq minutes à consacrer à cette partie, tandis que les étudiants de Marne la Vallée ont eu une heure et quart pour la traiter, puisque nous leur avions demandé de laisser de côté certaines questions relatives à la recherche d'exemples. En dépit du devoir à la maison, soumis aux étudiants et corrigé peu de temps avant cet atelier, on constate que les étudiants d'Orléans comme ceux de Marne la Vallée ont de grandes difficultés à *interpréter graphiquement* le terme $\alpha_0(x) = (f(x)-f(0)) / x$, pour x réel donné non nul, et à le situer par rapport au terme $f'(x)$. De nombreuses confusions jalonnent leur travail au début de cette partie B : confusions entre tangente et sécante, droite tangente et tangente de l'angle fait par la sécante avec l'horizontale, interférences avec des connaissances antérieures un peu fragiles sur les fonctions convexes,... etc. De même, la conjecture sur le signe de la quantité $(\alpha_0-f')(x)$ selon x est dégagée avec beaucoup de difficulté, en particulier du fait de l'égalité entre f et f' pour la fonction exponentielle, et de la nécessité de distinguer les cas $x<0$ et $x>0$. Nous revenons sur tout cela dans ce qui suit.

La question de la *généralisation* à l'ensemble des fonctions à croissance forte des conjectures mises à jour pour l'exponentielle a été à peine effleurée lors des deux préexpérimentations d'Orléans et de Marne la Vallée, et a posé un problème de dévolution de la tâche, que nous analysons plus loin. Seul le groupe de Marne la Vallée a vraiment pu se pencher sur le problème de la preuve des conjectures générales (pendant à peu près une demi-heure). Un peu paradoxalement, la démonstration de la conjecture sur le signe de $(\alpha_0-f')(x)$, pour x réel non nul, a posé plutôt moins de problèmes que celle de la croissance de α_0, parce qu'une étudiante a eu assez rapidement l'idée d'appliquer le théorème des accroissements finis à f. En revanche, les étudiants ont estimé que l'étude des variations de la fonction α_0 n'était guère envisageable dans le cas général, et ont d'abord tenté, à défaut, de l'effectuer pour la fonction exponentielle. Ils se sont alors heurtés à un problème précis d'ordre technique, et il a été nécessaire de les aider de manière soutenue à réaliser cette tâche, comme ensuite pour l'étude du cas général.

3°) L'expérimentation de la version définitive de l'atelier sur deux séances.

Cette expérimentation a été menée à l'université de Marne la Vallée, environ un mois après la seconde préexpérimentation, avec un groupe unique de cinq étudiants volontaires ayant été admis à suivre les cours du second module de la première année de DEUG A, suite aux examens de janvier. Il s'agit donc d'étudiants se situant dans le tiers supérieur de l'effectif initial d'étudiants admis en première année de DEUG A à la rentrée de septembre.

La durée effective de chacune des deux séances d'atelier a bien été cette fois de deux heures, et l'ensemble du travail sollicité a été réalisé (exception faite, en seconde séance, de la partie C, d'un intérêt moindre). Il s'est écoulé environ un mois entre la première séance, consacrée au travail de familiarisation avec les fonctions à croissance forte, et la seconde séance réservée au travail de conjecture et de démonstration. Les étudiants disposaient de calculatrices, mais n'en ont guère fait usage, et nous étions seul pour diriger et observer les deux séances qui ont eu lieu en dehors des séances « normales ».

Déroulement général de la première séance : La recherche de conditions, de natures *algébrique* et *graphique*, pour qu'une fonction donnée soit à croissance forte sur un certain intervalle I de R, a permis en partie A de mettre en évidence chez plusieurs étudiants un théorème en acte (*« si f ' est croissante, alors f est croissante »)*, et certaines conceptions[4] sur les fonctions à croissance forte, qui étaient parfois restées larvées lors des préexpérimentations. De même, la référence aux fonctions convexes est cette fois *spontanément* évoquée à l'occasion de cette partie A, le terme de convexité ne figurant plus dans les titres du questionnement comme c'était le cas lors de la préexpérimentation. Un travail très constructif d'objectivation des idées et de mise au clair a alors pu être réalisé lors de cette première partie de la séance, concernant en particulier le caractère nécessaire, ou simplement suffisant, de critères annoncés, tels que : *« f ' et f '' sont strictement positives sur I »*. Des propositions *variées*, *non prévues*, en ce qui concerne l'interprétation graphique à donner au phénomène de croissance forte, ont largement alimenté les débats auxquels nous avons pris part, et nous avons été amenés à piloter le travail des étudiants de manière assez serrée. Le temps consacré à cette première partie, que nous avions dans l'ensemble jugé a priori comme assez « *transparente* »[5], a ainsi été de cinquante minutes, dépassant de loin notre prévision initiale qui était une demi-heure.

Abordant la première question de la partie B, les étudiants ont cité tout de suite l'exponentielle, déjà évoquée dans la partie A, comme exemple de fonction à croissance forte sur R. Ils n'ont pu cependant en déduire une famille de fonctions de ce type, constatant notamment que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, les fonctions de référence $x \to x^n$ sont à croissance forte sur R_+ mais non sur R. Ils sont passés rapidement à la question B/2°) portant sur la recherche de fonctions paramétrées, à croissance forte sur un intervalle. Dans l'ensemble, cette question B/2°), dont le texte a été un peu remanié à la suite des deux préexpérimentations, a été traitée avec plus d'aisance par les étudiants de Marne la Vallée qu'elle ne l'avait été par les étudiants les plus performants d'Orléans, a priori de même profil. On retrouve cependant certaines difficultés, notamment d'ordre *technique* (adaptation de la valeur du paramètre « a » au domaine considéré, dérivation de $x \to A.\ln(|x-a|)$,...), qui avaient été déjà entrevues à Orléans. Le temps consacré à cette question B/2°) a été d'environ une demi-heure.

Dans la question B/3°)a), certains étudiants ont perçu immédiatement que la condition *« f_1 est à croissance forte sur R- et f_2 l'est sur R_+^* »* est insuffisante en elle-même à assurer la croissance forte de f sur R. Contrairement à leurs camarades d'Orléans, ils constatent très spontanément qu'une ou plusieurs conditions de « raccordement en 0 » s'avèrent aussi nécessaires. Il semble donc que notre choix, au terme des préexpérimentations, de leur faire considérer préalablement la situation *générale* d'une fonction f définie par : $f(x) = f_1(x)$ sur R- et $f(x) = f_2(x)$ sur R_+^*, où f_1 et f_2 sont de classe C^∞ sur R quelconques, plutôt que de les faire

[4] Au sens didactique du terme.

[5] Mise à part la question du caractère nécessaire ou non de la condition de stricte positivité de f ' et f '' sur I pour que f soit à croissance forte sur I, considérée par nous comme délicate.

travailler directement sur un exemple précis (avec toutes les contingences particulières que cela suppose au niveau des calculs), soit, comme nous l'avions prévu, de nature à faciliter cette prise de conscience. Notons cependant ici que leurs propositions de conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit à croissance forte sur R sont assez variées et ne se résument pas, comme nous le pensions au départ, à l'adjonction d'une condition de dérivabilité en 0. Il y a ainsi débat pour savoir si une condition du type : « $f_1'(0) \leq f_2'(0)$ », ou : « $f_1'(0) < f_2'(0)$ » est notamment nécessaire à exprimer la stricte croissance sur R. Nous y reviendrons.

La simple application que constitue la question 3°)b), au terme du travail précédent, est ensuite traitée sans aucune difficulté par les étudiants. En revanche, la question 4°) consistant à tirer la leçon du 3°) pour extrapoler une méthode générale de génération de fonctions à croissance forte sur R n'est pas traitée ; cela avait déjà été le cas lors des préexpérimentations, et le scénario retenu ici (étude préalable du cas général) n'a donc pas d'influence. Les étudiants achèvent leur travail à peu près cinq minutes avant la fin de la séance prévue, d'une durée de deux heures.

Déroulement général de la seconde séance : Là encore, en dépit du petit devoir à la maison sur « taux d'accroissement et nombre dérivé », donné aux étudiants participant à cet atelier puis corrigé, l'extrapolation graphique des variations de α_0 et du signe selon x du terme $(\alpha_0 - f')(x)$ pour la fonction exponentielle est source de multiples problèmes, révélant notamment diverses confusions déjà constatées lors des préexpérimentations[6]. L'adjonction d'une question préalable au sein de cette version remaniée du questionnement (*« Que mesurent graphiquement, pour x réel fixé non nul, les termes $\alpha_0(x)$ et $f'(x)$? »*) ne modifie donc en rien les difficultés des étudiants à traiter le problème posé. Les étudiants ont ainsi consacré plus de quarante cinq minutes aux deux premières questions de la partie A.

Les étudiants rencontrent les mêmes difficultés techniques pour étudier les fonctions α_0 et $(\alpha_0 - f')$ dans le cas de l'exponentielle que les redoublants de Marne la Vallée lors de la seconde préexpérimentation, mais font davantage de propositions, souvent intéressantes même si elles n'aboutissent pas. Ils arrivent en outre à résoudre finalement le problème posé sans notre aide. Il faut noter ici que nous avons ajouté cette étude de fonctions *particulières* suite à la seconde préexpérimentation, au cours de laquelle certains étudiants ont éprouvé le besoin de démontrer *préalablement* pour l'exponentielle les deux conjectures imaginées, avant de tenter une preuve dans le cas général. Cet ajout nous semble à l'expérience profitable, notamment car l'un des étudiants participant à l'atelier (nouvelle version) a spontanément remarqué la relation : $(\alpha_0)'(x) = (f'(x)-\alpha_0(x)) / x$, après avoir dérivé la fonction $x \rightarrow (e^x-1) / x$, tâche devenue routinière pour lui. Une *familiarité* plus grande des étudiants à l'étude d'une fonction particulière a donc semblé faciliter ici les choses en servant de *levier* à des déductions moins convenues. Le temps consacré à cette question A/3°) a été d'une demi-heure.

La question B/1°) a posé le même problème de *dévolution* que lors des deux préexpérimentations. Les étudiants n'ont pas bien compris que l'on attendait d'eux qu'ils constatent graphiquement, à partir des courbes représentatives de *différentes* fonctions à

[6] Il y en a aussi de nouvelles, comme par exemple celle considérant à confondre pente et coefficient directeur pour une fonction qui est décroissante.

croissance forte ou des propriétés caractéristiques de telles fonctions (vues en première séance), que les deux résultats déjà établis pour l'exponentielle se généralisent à toutes les fonctions à croissance forte. Ils réfléchissent quelques minutes à cette question, puis passent à la recherche de la preuve rigoureuse, après avoir constaté leur accord sur l'idée que les conjectures se généralisent sans doute.

La démonstration des deux conjectures dans le cas général (question A/2°)) n'a pas posé exactement les mêmes problèmes techniques aux étudiants que lors de la seconde préexpérimentation. Par ailleurs, il convient de noter que le groupe s'est dédoublé lors de la réalisation de cette tâche, certains étudiants tentant d'utiliser le *théorème* des accroissements finis, et d'autres préférant avoir recours aux *inégalités* des accroissements finis. Les deux démarches étaient possibles ici, et nous avons pu observer avec le plus grand intérêt les difficultés, de natures différentes, éprouvées par les étudiants selon qu'ils utilisaient l'une ou l'autre des deux voies. Le temps consacré à cette question A/2°) a été d'une demi-heure. Les étudiants ont ensuite disposé de quelques minutes pour commencer la partie C, mais n'ont pas eu le temps de produire un travail très significatif.

B/ ANALYSE DETAILLEE DES EXPERIMENTATIONS.

Cette étude est organisée à partir de quatre lignes directrices particulières.

Tout d'abord, il nous a semblé intéressant d'analyser plus précisément le comportement des étudiants face aux difficultés inhérentes au travail initial de familiarisation avec les fonctions à croissance forte (notamment la recherche d'exemples de telles fonctions). La recherche d'une certaine opérationnalité, et une tendance à la simplification, en partie liées à la *complexité* de certains des problèmes posés, semblent caractériser ici leurs propositions. Ce type de comportement, que nous avions déjà pu observer à l'occasion des tests, se trouve donc ici confirmé.

La *deuxième* ligne directrice de l'analyse touche aux problèmes des étudiants en phase d'interprétation graphique de certaines questions, notamment celles mettant en jeu le taux d'accroissement : $\alpha_0(x) = (f(x)-f(0)) / x$.

La *troisième* ligne directrice concerne les difficultés particulières, d'ordre technique ou conceptuel, rencontrées par les étudiants au moment où on leur demande de produire une démonstration (c'est en particulier le cas dans la partie finale de l'atelier), mais aussi les signes d'*évolution* (par rapport au lycée) du public concerné face à ce type de tâche.

Enfin, dans une *dernière partie*, nous tentons de prendre du recul par rapport aux interventions des enseignants, telles qu'elles nous apparaissent dans nos transcriptions de séances (voir annexes), et d'analyser la façon dont s'effectue ici la dévolution des diverses tâches.

Notons enfin que l'étude qui suit prend en considération l'expérimentation finale et les deux préexpérimentations *conjointement*, tout en précisant le cas échéant les différences de comportement des étudiants liées aux modifications du questionnement entre les deux phases d'expérimentation.

1°) Modèles simplificateurs et recherche d'opérationnalité.

A travers les expérimentations menées, on constate que deux conceptions distinctes sur les fonctions *« à croissance forte »* semblent influencer les considérations des étudiants en début d'atelier, avec l'objectif de donner sens à cette expression *« à croissance forte »*, tout en recherchant la simplification.

On peut constater d'abord que les étudiants proposent à plusieurs reprises des exemples de telles fonctions sans en avoir calculé explicitement au préalable les dérivées premières[7]. On peut toujours penser qu'ils ont fait mentalement ce calcul pour les fonctions $x \to e^x$, $x \to x^2$ ou $x \to x^3$, dont les dérivées sont très simples. Mais il est plus douteux que ce soit aussi le cas pour des fonctions telles que $x \to a^x$ (a, réel strictement positif quelconque) ou $x \to \exp(x^\alpha)$. De fait, le comportement des redoublants lors de la seconde préexpérimentation à Marne la Vallée semble assez explicite à ce sujet. La spontanéité de leurs affirmations[8], de certains gestes effectués, évoquant le graphe de la fonction exponentielle ou de la fonction $x \to x^3$, montrent bien que leur premier critère pour savoir si une fonction est à croissance forte consiste à jauger « à l'œil » la vitesse de croissance de son graphe[9], au moins à partir d'un certaine valeur, et non à tester précisément la définition donnée dans l'énoncé d'une fonction à croissance forte. Lors de l'expérimentation finale, un bref échange entre Stephen et Sylvain montre que ce type de considération reste présent même chez des étudiants qui appliquent plus scrupuleusement la définition fournie par le texte[10] :

> Ayant évoqué la condition de stricte positivité des deux premières dérivées :
> Stephen : *« Alors une fonction affine n'est pas à croissance forte ? »*
> Sylvain : *« Ben... non ! Je suppose que à croissance forte, ça veut dire que ça monte très vite ! »*

Cette conception semble privilégier l'aspect *asymptotique* du comportement des fonctions, et plus précisément cet aspect sur un intervalle du type $[a,+\infty[$ caractérisant le devenir, l'évolution finale de cette fonction. C'est en tous cas une explication plausible au fait que certains étudiants d'Orléans commettent au départ une erreur, en disant que $x \to x^2$ est à croissance forte sur R, alors qu'elle l'est sur R_+ seulement[11]. Le fonctionnement *« à l'économie »* des étudiants dans cette recherche d'exemples se caractérise aussi, tantôt par l'évocation *judicieuse* de propriétés du lycée (par exemple : *« si f n'est pas monotone sur R, alors e^f n'est pas non plus monotone sur R »*), tantôt par celle de propriétés fausses.

La seconde conception influençant le comportement de certains étudiants donne naissance à un théorème en acte : *« si f'' est strictement positive sur un intervalle I, alors f' l'est aussi »*,

---

[7] La condition de « forte croissance » d'une fonction comprenant une condition de stricte croissance sur sa dérivée première, il convient donc au moins d'évaluer cette dérivée première.
[8] Avec des exemples fournis qui sont incorrects, là où un calcul (en général très simple) de la dérivée aurait tout de suite révélé l'erreur.
[9] Ce n'est pas le comportement attendu, mais il dénote cependant une évolution positive depuis le lycée.
[10] La nouvelle version du questionnement, qui sollicite une réflexion préliminaire sur les conséquences de la définition donnée, a sans doute aussi pour effet de limiter les jugements hâtifs se basant sur la seule intuition.

ouvertement affirmé lors de la seconde préexpérimentation. Cette conception consiste à estimer que la condition de stricte croissance de la dérivée première d'une fonction f exprime déjà à elle seule l'idée que la fonction f est *« de plus en plus croissante sur I »*, donc à croissance forte sur I. Elle reste ici très liée à *l'amalgame* fait entre fonctions convexes étudiées en cours et fonctions à croissance forte ; on la repère déjà chez les étudiants d'Orléans, bien qu'ils soient réticents à invoquer le théorème en acte précité :

Nous-mêmes : *« Est-ce que si la dérivée seconde est positive, la fonction est nécessairement à croissance forte ? »*
Gilles : *« Ben... non, peut-être pas ! Il faut aussi vérifier que la dérivée est positive. »*
Nous-mêmes : *« D'accord. Alors vous l'aviez oublié ? »*
Gilles : *« Non, c'est parce que l'atelier porte sur les fonctions convexes d'après le titre... »*
François : *« Moi, c'est parce que je croyais que f' croissante, ça voulait dire que la pente de la courbe est de plus en plus forte, donc que la fonction est de plus en plus croissante. »*

Cet extrait a motivé la disparition du terme de « convexité » des titres des questionnements de la nouvelle version de l'atelier sur deux séances, la présence de ce terme dans le titre favorisant probablement l'amalgame simplificateur entre « fonctions convexes » et « fonctions à croissance forte » par un *effet de contrat.*

La recherche d'exemples de fonctions à croissance forte sur un intervalle, à partir de familles données de fonctions paramétrées, fait aussi l'occasion de considérations simplificatrices et de théorèmes en acte, qui témoignent chez l'étudiant de certaines faiblesses vis à vis de connaissances générales (sur les fonctions usuelles, la monotonie...), que l'on pourrait supposer acquises en fin de terminale S. Cette recherche, qui nous semblait se situer *a priori* dans la continuité du travail ordinaire au lycée, s'avère ainsi bien plus délicate que nous ne l'avions supposé. Parmi les erreurs rencontrées, on trouve le fait d'estimer « à l'œil » que la fonction $x \rightarrow A/(x-a)$ est décroissante sur son domaine de définition (quelles que soient les valeurs de a et A), que $x \rightarrow \tan(x-a)$ est positive pour $x>a$, ou encore que la fonction dérivée $f'(x) = A.(1+\tan^2(x-a))$ est croissante là où $x \rightarrow \tan(x-a)$ l'est.

Lors de l'expérimentation finale, la question relative à l'interprétation, au niveau *graphique*, de la propriété de croissance forte, fait également l'objet de propositions que l'on peut considérer comme « simplificatrices » par rapport à la réalité de la situation. Elles correspondent en tous cas à une traduction incorrecte du phénomène, mais plus simple à appréhender dans la culture du lycée (*« f est strictement croissante et f '(0)>1 », « f(x) ≥ x à partir d'une certaine valeur », « la fonction x →f(x)-x est strictement croissante »*...), que la stricte croissance de la fonction et de la pente à la courbe en tout point[12].

L'étude du caractère de « croissance forte », pour des fonctions définies par deux expressions algébriques distinctes de part et d'autre de zéro, débouche sur la mise en évidence par les étudiants de conditions très *opérationnelles* sur les dérivées, notamment en zéro, à l'instar de ce que l'on avait observé dans les tests de septembre 1996. C'est la stricte positivité des deux

[11] Quant au graphe de la fonction $x \rightarrow x^3$, sa croissance ne *s'accélère* qu'à partir de zéro (sur R_+).

[12] Comme l'a déjà montré l'étude des productions des étudiants au niveau des activités graphiques proposées à l'occasion du test de septembre 1995 (partie VI de cette thèse), l'interprétation graphique de la stricte croissance de la dérivée ne va généralement pas de soi pour un étudiant au sortir du lycée.

premières dérivées de chaque expression, sur R_-^* et R_+^*, qui est évoquée en tout premier, car elle permet d'assurer la stricte croissance de f et f ' sur ces intervalles. A Orléans, où les étudiants travaillent sur un exemple : $f(x) = -\ln(|x-1|)$ pour $x \leq 0$, et $f(x) = x+x^3/3$ pour $x>0$, François rappelle qu'il faut également vérifier que la fonction f est dérivable en 0. Gilles lui répond...

> <u>François :</u> « *Moi, je pense qu'il faut aussi voir que f est dérivable en 0.* »
> <u>Gilles :</u> « *Oui, mais ça c'est évident. On a $f(x) = -\ln(|x-1|)$ pour x **inférieur ou égal** à zéro, donc $f'(x) = 1/(1-x)$, ce qui donne **en 0**, $f'(0) = 1$.* »
> <u>François</u> : « *D'accord.* »

On retrouve là un mode de fonctionnement déjà rencontré dans l'exercice 1 du test de septembre 1996, avec une sensibilité au *repère sémiotique* <u>$x \leq 0$</u> qui amène les étudiants à « simplifier » le problème de la dérivabilité en 0. Lorsque l'on sollicite alors un retour de leur part sur le problème de la stricte croissance de la fonction et de sa dérivée première, non seulement sur R_-^* et R_+^* mais aussi sur R tout entier, ce sont des conditions du même type qui nous sont proposées par eux :

Les étudiants ont vérifié rapidement que les dérivées premières $x \to 1/(1-x)$ et $x \to 1+x^2$ sont positives sur R_- et R_+^*...

> <u>Nous-mêmes</u> : « *Et en 0, il n'y a pas de problème ?* »
> <u>Stéphane</u> : « *D'après le calcul des deux premières dérivées de la fonction qui à x associe $-\ln(|x-1|)$, on voit que $f'(0) = f''(0) = 1$, donc la fonction f est dérivable en 0, et les deux premières dérivées sont positives en 0 donc f et f ' sont strictement croissantes en 0 !* »
> <u>Nous-mêmes</u> : « *Qu'est-ce que ça veut dire f et f ' croissantes en un point ?* »
> <u>Stéphane :</u> « *C'est juste pour dire qu'on doit avoir $f'(0)$ et $f''(0)$ positifs...* »

Autrement dit, les étudiants raisonnent ici de façon très pratique, par simple *recollement* des diverses conditions à vérifier, et presque indépendamment de la signification du problème : pour vérifier que la fonction est strictement croissante sur R, il leur suffit de constater qu'elle l'est avant et après zéro, et « au » point zéro, en se fiant au signe de la dérivée. Dans le même esprit de recherche d'opérationnalité, à Marne la Vallée, pour l'étude du <u>cas général</u> (c'est-à-dire : $f(x) = f_1(x)$ si $x \leq 0$, et $f(x) = f_2(x)$ si $x>0$, où f_1 et f_2 sont de classe C^∞ sur R), des étudiants proposent une condition type $f_1'(0) \leq f_2'(0)$ pour traduire la croissance de la dérivée « y compris en zéro », avant d'être contredits :

> <u>Smail</u> : « *Moi, je crois qu'il faut aussi avoir $f_2'(0)$ supérieur ou égal à $f_1'(0)$ pour que ça marche.* »
> <u>Stephen</u> : « *$f_2'(0)$ strictement supérieur à $f_1'(0)$, non ?* »
> <u>Sylvain</u> : « *Non, il faut qu'elle soit dérivable en 0, donc on doit avoir $f_2'(0)$ égal à $f_1'(0)$* »

Force est de reconnaître cependant, que la situation étudiée ici est <u>complexe</u>, avec une interpénétration des conditions de stricte croissance et de la condition de dérivabilité sur R : celle ci assure la continuité en zéro, qui permet à coup sûr à la fonction d'être strictement croissante sur R, dès lors qu'elle l'est sur R_- et R_+^*. Saisir ce « jeu » nécessite une certaine *flexibilité cognitive* évoquée dans l'analyse théorique de cette thèse, manquant aux étudiants, qui ne font ici que *juxtaposer* les conditions demandées. Bien entendu, si l'on trace sous leurs yeux une fonction discontinue en 0 et strictement croissante sur R_- et R_+^* mais pas sur R, ils ont tôt fait de relever que c'est en raison de la discontinuité que cette fonction n'est pas croissante sur R, que cela ne pourrait se produire si la fonction était continue en zéro[13]. Il n'empêche que cette idée ne leur vient pas spontanément à l'esprit, et que la stricte positivité des dérivées respectives des deux expressions sur R- et R_+^* leur paraît de prime abord suffisante à assurer la stricte croissance sur R.

Cette condition de continuité en zéro, absente des propositions initiales des étudiants, est introduite ensuite à partir du débat, ou est prise en compte indirectement, à travers l'expression *standard* de la condition de dérivabilité en zéro par *limite du taux d'accroissement*, sollicitée des étudiants. A Marne la Vallée, lors de l'expérimentation finale, elle est prise en compte sur le tard, en même temps que la dérivabilité, à travers la double condition, très opérationnelle : « $f_1(0) = f_2(0)$ et $f_2'(0) = f_1'(0)$ » :

Béatrice : « *Et si $f_2'(0)$ est égal à $f_1'(0)$, est-ce qu'on est sûr que f est dérivable en zéro ?* »
Sylvain : « *Ah oui, c'est vrai ça, il faut aussi avoir $f_1(0)$ égal à $f_2(0)$ pour qu'elle soit continue.* »[14]

2°) Problèmes d'interprétation graphique.

D'importantes difficultés, en partie prévues lors de notre analyse a priori, mais dépassant aussi ces prévisions, ont été éprouvées par les étudiants à l'occasion des questions de cet atelier sollicitant une interprétation graphique de leur part. Nous faisons ici référence tout particulièrement à la mise en place des conjectures sur les variations de la fonction α_0 et le signe, selon x, de $(\alpha_0\text{-}f\,')(x)$ pour des fonctions à croissance forte, par interprétation, pour x réel fixé non nul, de la quantité $\alpha_0(x) = (f(x)-f(0)) / x$.

De telles difficultés doivent retenir notre attention concernant une activité qui revêt une certaine importance sur le plan du *fonctionnement mathématique*, tout en se situant à l'interface entre le lycée et l'université[15]. L'absence de prise en compte d'activités de ce type par les deux institutions nous semble alors préjudiciable à l'apprentissage au niveau post-bac, et donc de nature à aggraver les difficultés liées à la transition secondaire / supérieur.

Comme nous l'avons signalé plus haut, l'interprétation graphique du terme $\alpha_0(x)$ pour x réel fixé non nul, qui est pourtant sollicitée lors d'une question préalable, bien *isolée*, dans la version remaniée du questionnement[16], et a été préparée avant la séance d'atelier par un devoir à la maison, fait l'objet de bien des confusions. L'erreur la plus fréquente, prévue lors de l'analyse a priori, consiste à faire l'amalgame entre $\alpha_0(x)$ et le coefficient directeur de *la* tangente[17].

Différentes considérations font converger les étudiants vers cet amalgame, et notamment l'idée que pour x tendant vers zéro, $\alpha_0(x)$ admet pour limite un nombre dérivé (il s'agit certes de f '(0), mais qui n'est peut-être pas très différent de f '(x), si justement x tend vers zéro).

[13] Un étudiant d'Orléans estime d'ailleurs qu'un tel problème ne pose pas, concernant la fonction étudiée en exemple, car selon lui, cette fonction est nécessairement continue en zéro, puisque définie en zéro (erreur déjà rencontrée lors des tests de septembre).

[14] Le fameux débat : « Est-ce que la condition de continuité en zéro, $f_1(0) = f_2(0)$, est incluse dans la condition (identifiée par les étudiants *comme* condition de dérivabilité en zéro) $f'_1(0) = f'_2(0)$, parce que la dérivabilité en un point implique la continuité en ce point ? » n'aura pas lieu ici. Son éventualité témoigne cependant, là encore, de la complexité du problème posé.

Certains invoquent le théorème des accroissements finis, qui leur semble prétexte à identification entre taux d'accroissement et nombre dérivé. D'autres, enfin, effectuent un schéma de la courbe exponentielle, tracent bien le segment joignant les points O'(0,1) et M(x,e^x), puis repèrent l'angle θ dont la *tangente* égale $\alpha_0(x)$. Il se produit alors une confusion au niveau de ce terme de « tangente », entre la tangente de cet angle et la *droite tangente* à la courbe au point d'abscisse x.

<u>Grégory</u> : « *On n'a pas $f'(x) = (f(x)-f(0))/(x-0)$, mais en passant à la limite dans ce taux on obtient $f'(x)$.* »
<u>Stéphane</u> : « *Non, je ne suis pas d'accord ! La limite de ce taux quand x tend vers zéro, c'est $f'(0)$ et pas $f'(x)$...* »
<u>Sébastien</u> : « *Ce qu'il veut dire, c'est que si x est très proche de 0, $\alpha_0(x)$ et $f'(x)$ c'est la même chose.* »
<u>Grégory</u> (pas très convaincu) : « *Ouais, c'est ça...* »
<u>Olivier</u> : « *Je ne comprends pas pourquoi vous dites que $\alpha_0(x)$ et $f'(x)$ ce n'est pas la même chose. D'après le théorème des accroissements finis on sait que ces termes sont égaux !* »

On peut penser que certaines de ces erreurs sont liées au statut habituel de *variable* pris par la lettre x, qui favorise l'idée de passage à la limite pour le terme $\alpha_0(x)$. En tous cas, on constate que les divers groupes ne commencent pas, en général, par effectuer un schéma en plaçant le point d'abscisse x *fixée*, afin de visualiser la situation, mais évoquent plutôt, d'abord, des notions *théoriques*. Mais ce défaut dans la façon de procéder est sans doute davantage imputable au manque d'habitude de telles activités graphiques en DEUG A qu'au statut de variable de la lettre x.

Concernant la mise en place des conjectures proprement dite, la lecture graphique de la stricte croissance de la fonction α_0 pose moins de problèmes aux étudiants que l'extrapolation du signe de ($\alpha_0(x)$-f '(x)), qui oblige, elle, à considérer conjointement deux termes distincts. Notons cependant que l'un des étudiants, lors de l'expérimentation finale, perçoit α_0 comme décroissante sur R^*_- et croissante sur R_+^*, car il se place par rapport à l'origine du repère et considère l'évolution de $\alpha_0(x)$ au fur et à mesure que le point M d'abscisse x de la courbe *s'éloigne* de cette origine. Le <u>double aspect</u> du problème posé, *géométrique* et *fonctionnel*, est sans doute aussi une des difficultés de cette partie de l'atelier, mais elle ne semble guère gêner les étudiants, qui y ont été habitués au lycée (voir notamment les problèmes d'optimisation de distances, fréquents en première S).

En revanche, ils commettent bon nombre d'erreurs au moment de comparer $\alpha_0(x)$ et f '(x) selon x réel non nul, se fiant à la *position relative* de cordes et de tangentes, au lieu de jauger les *pentes* de telles droites obtenues pour une même valeur x d'abscisse ; comme la corde entre deux points de la courbe exponentielle est toujours située au dessus de cette courbe, et la tangente en un point, en dessous de cette courbe, ils en déduisent que $\alpha_0(x) \geq f'(x)$ pour tout $x \neq 0$. De même, comme pour $f : x \rightarrow e^x$ on a $f' = f$, certains étudiants comparent la position

[15] Pour des raisons qui ont été précisées lors de notre analyse a priori, cette activité graphique se démarque assez nettement, sur un plan qualitatif, de celles du lycée, tout en ne mettant en jeu que des notions qui sont propres à l'enseignement secondaire.
[16] On demande conjointement une comparaison de ce terme avec le terme f '(x) pour x réel fixé non nul.
[17] Ils ne précisent pas toujours en <u>quel</u> point ils considèrent cette tangente, ce qui ne fait qu'ajouter à la confusion.

relative d'une corde et de la courbe exponentielle pour les mêmes valeurs d'abscisses, et aboutissent à une conclusion semblable. Le fait de comparer les positions relatives de droites et de courbes correspond à une observation simple et immédiate du schéma, du type de celles qui sont usuellement demandées au lycée. Un autre rapport au graphique reste quant à lui manifestement à construire dans la transition lycée / université.

On constate ensuite que le tracé d'une *allure de courbe* pour les fonctions α_0 et f ' pose un problème aux étudiants des deux groupes de Marne la Vallée, parce qu'ils estiment devoir effectuer une étude préalable « en bonne et due forme » de la fonction $\alpha_0 : x \to (e^x - 1)/x$. Toutes les informations nécessaires à un tracé fidèle sont pourtant déjà réunies au terme du travail d'interprétation graphique réalisé, à l'exception de celles concernant les limites aux bornes du domaine de définition (faciles à obtenir). Mais le mode d'obtention de ces informations, *inhabituel* et plus *qualitatif* que la classique étude de fonction, routinisée au lycée, n'a pas vraiment convaincu le public. Il est jugé « moins rigoureux » par les étudiants qui, dans un groupe, seront d'abord confortés par le verdict de la calculatrice graphique. Mais derrière cette réserve, ce qui est surtout en cause, c'est leur difficulté d'appropriation des raisonnements graphiques ici mis en jeu, nécessitant un travail spécifique.

D'autres problèmes liés à l'interprétation graphique sont rencontrés par certains étudiants, notamment dans la recherche d'exemples de fonctions paramétrées à croissance forte sur un intervalle :

Sylvain : « *La fonction* $x \to A.\ln(\lvert x-a \rvert)$ *ne peut pas être à croissance forte, puisque le log croit lentement !* »

Un manque de recul, d'un point de vue (là encore) « qualitatif », sur ce *type* de fonctions par ailleurs très présentes en terminale S, mais au sein d'études de fonctions *particulières*, une certaine tendance à se fier aux apparences, semblent ici à l'œuvre. On rencontre aussi une certaine « naïveté » face au graphique, chez des étudiants qui remettent en cause le fait que la fonction $x \to x^3$ soit *strictement* croissante sur R :

Leslie : « *Tu dis que c'est strictement croissant, x donne* x^3 *? En zéro, c'est constant !* »
Sylvain : « *Non, ça continue de monter !* »
Béatrice : « *Moi, je crois que c'est pas strictement croissant. En zéro, elle est plate !* »
Stephen : « *Je suis d'accord avec elle !* »

3°) Difficultés techniques et conceptuelles en phase de démonstration.

Ces difficultés sont repérables principalement lors de l'établissement des conjectures sur les fonctions à croissance forte et, dans la version de l'atelier sur deux séances, au moment de la recherche de critères algébriques et graphiques permettant de caractériser une fonction à croissance forte. Nous commençons par les analyser dans ce second cas.

A l'occasion du débat sur le caractère suffisant et/ou nécessaire, de la stricte positivité des deux premières dérivées d'une fonction pour que cette fonction soit à croissance forte, un conflit oppose les étudiants au sujet de la fonction $x \to x^3$. Sylvain estime que cette fonction est strictement croissante sur R, mais ne peut l'établir de façon rigoureuse, précisément parce qu'il ne peut invoquer ici la stricte positivité sur R de la dérivée $x \rightarrow 3x^2$. Il ne pense pas à appliquer la définition de la stricte croissance d'une fonction sur un intervalle[18], ou l'a oubliée, et lorsqu'elle lui est rappelée, il ne sait en faire usage[19].

Cette incapacité à produire une démonstration d'un niveau très élémentaire provient, selon nous, de ce que le travail du lycée se cible sur quelques objectifs précis à l'horizon du baccalauréat, et ne répond pas aux exigences d'une pratique mathématique plus générale. Il peut en découler alors diverses « failles » dans la culture de l'étudiant en début de DEUG, que la transition secondaire / supérieur est susceptible de faire éclater à un moment donné.

L'interprétation graphique de la croissance forte fait l'objet d'une proposition d'un étudiant (*« courbe qui se sépare de plus en plus de la droite y=x »*), qui est ensuite retraduite à l'aide de propriétés plus simples, que nous avons déjà présentées plus haut (*« f est strictement croissante et f'(0)>1 », « f(x)≥ x à partir d'un certain rang », « x → f(x)-x est strictement croissante »*). Mais les étudiants ayant fait ces propositions n'arrivent pas à les mettre à l'épreuve de la démonstration. Une tentative se fonde ainsi sur une erreur assez grave qu'aucun étudiant ne relève :

Stephen : *« Si je pose φ(x) = f(x)-x, par dérivation ça donne φ'(x) = f'(x)-1, et ce terme est positif au moins à partir d'un certain rang car si f' est strictement croissante elle dépasse 1 à partir d'un certain rang. »*

En outre, ils disposent de peu d'exemples de fonctions à croissance forte *« prets à l'emploi »* et faciles à tester ($x \rightarrow x^n$ sur R_+, $x \rightarrow e^x$ sur R...), et ces exemples ne permettent pas de contredire toutes les propositions formulées[20]. Ainsi sont-ils enclins à admettre que leurs propositions se généralisent bien à toutes les fonctions à croissance forte, tout au moins comme conditions *nécessaires* de croissance forte :

Stephen : *« Moi je dirais que c'est une fonction qui se sépare de plus en plus de la droite y = x, ... au moins à partir d'un certain rang... ou partout... c'est-à-dire... vérifiant f(x)≥ x et la fonction x→ f(x)-x strictement croissante ! »*
Sylvain (dubitatif) : *« C'est une conjecture ? »*
Stephen : *« Ben, si on prend des exemples de fonctions à croissance forte, ça marche, non ? »*
Sylvain : *« Quels exemples ? La fonction exponentielle ? »*
Stephen : *« Oui, ou bien x donne x^n sur R_+, regarde ! »*

[18] Devenue obsolète depuis la fin du lycée, les études de fonctions sollicitées en première S et en terminale S portant pour l'essentiel sur l'utilisation de la dérivée en vue de déterminer les variations de ces fonctions.

[19] La démonstration peut se réaliser ici de différentes manières, par exemple en factorisant x^3-y^3 et en constatant la stricte positivité du terme $x^2+xy+y^2 = (x + y/2)^2 + 3y^2/4$ pour $x \neq y$, ou en observant le signe de x^3-y^3 selon la position de x et y par rapport à zéro, au sein du couple (x,y) tel que $x<y$.

[20] On a pour tout entier naturel n avec $n \geq 2$: $x^n \geq x$ pour $x \geq 1$ et $x \rightarrow x^n-x$ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, et on a aussi : $e^x \geq x$ pour tout réel x, et $x \rightarrow e^x-x$ strictement croissante sur R_+.

Les étudiants sont assez étonnés de constater ensuite, grâce à notre aide, que leurs propositions ne n'étaient ni nécessaires, ni suffisantes par rapport au problème posé :

Smail : « *Moi je pense que pour que f soit à croissance forte, il faut d'une part avoir f croissante... enfin, strictement croissante,... et d'autre part, la pente de la tangente en 0 doit être supérieure ou égale à celle de y = x, donc f'(0)> 1.* »
Il trace un début de courbe à croissance forte pour illustrer son idée.
Nous-mêmes (aux autres) : « *Vous êtes tous d'accord ?* »
(...) Ils ne savent pas, ne se prononcent pas.
Nous-mêmes : « *Votre condition f'(0)> 1 n'est pas nécessaire. Pour la fonction qui à x associe x^2, à croissance forte sur R_+, on a f'(0)=0 !* »
Smail : « *Oui, mais si on a les deux conditions : f est strictement croissante et f'(0)> 1, la fonction f sera à croissance forte !* »
Nous-mêmes (écrivant) : « *Pas davantage, ça peut monter doucement à partir de zéro ! Si je prends racine carrée de x+1,... disons le triple de cela, la dérivée en zéro vaut 3/2, la fonction est strictement croissante sur R_+, mais pas à croissance forte.* »

Il convient de noter toutefois, que réfuter leurs affirmations nécessite parfois des contre-exemples assez délicats à imaginer. Ainsi en est-il de la fonction $x \to x/2+ e^{-x}$, qui est à croissance forte sur [ln(2),+∞[, et dont le graphe reste en dessous de la première bissectrice au moins sur [1,+∞[.

Les raisons de l'échec des étudiants à remettre eux-mêmes en question leurs propositions semblent alors assez claires, et le fait qu'ils aient pu formuler de telles propositions est à considérer comme un fait déjà encourageant. D'une part, la recherche de contre-exemples n'est pas *culturellement* un objectif qui peut prendre sens dans un environnement de lycée, où c'est surtout *l'application* qui est visée[21]. D'autre part, ce type de tâche devient, à l'université, compatible avec les objectifs de l'enseignement, mais ne fait pas l'objet, en général, d'un apprentissage particulier, comme si la *construction* personnelle et autonome de contre-exemples allait de soi. Or il convient d'insister sur le fait que la recherche de contre-exemples *en général* (en Analyse), et celle qui nous intéresse ici *en particulier*, sollicite d'abord des connaissances théoriques bien structurées[22], ensuite une approche qualitative et heuristique idoine[23], et enfin une certaine adaptation de références particulières (ici la connaissance des fonctions usuelles) pour *modéliser* notre idée.

Quelques difficultés techniques sont rencontrées par les étudiants à l'occasion de la recherche d'exemples de fonctions paramétrées à croissance forte, mais elles sont souvent assez locales, « circonstancielles »[24]. Notons seulement ici que le fait d'interroger les étudiants, dans la nouvelle version de l'atelier, de façon *progressive*, d'abord sur le domaine de forte croissance d'une fonction du type $x \to x^n$ (n entier naturel), très familière, puis d'une fonction du type

[21] Voir l'analyse théorique de cette thèse (partie I).
[22] Nous savons bien que des fonctions strictement croissantes, convexes, ne correspondent pas aux propositions que formulent les étudiants, ce qui nous engage à chercher en toute confiance les dits contre-exemples.
[23] On peut imaginer, par exemple, selon quel *processus* une courbe qui « grimpe de plus en plus vite » peut rester en dessous de la première bissectrice, ou comment elle peut rester au dessus de cette droite en « grimpant de moins en moins vite ».
[24] Nous avons déjà évoqué les problèmes d'ajustement des paramètres aux conditions sollicitées, ou l'erreur commise dans la dérivation de la fonction $x \to A.\ln(|x-a|)$, des étudiants obtenant $x \to A/|x-a|$ pour dérivée.

$x \to (x-a)^n$, semble les aider à traiter de façon qualitative le problème (avec considération du *graphe* de $x \to x^n$, puis *translation* du problème posé pour $x \to (x-a)^n$). Rappelons que dans la version initiale du questionnement, on leur proposait de travailler directement sur la famille de fonctions $x \to A(x-a)^\alpha + B$, où A, B sont deux réels, et α un *réel* strictement positif. Les étudiants éprouvaient alors davantage le besoin de dériver l'expression, et certains, l'ayant dérivé deux fois, en arrivaient à donner des conditions incompatibles, fruit d'un travail purement « mécanique » ($A>0$, $\alpha>1$, $\alpha-1$ *et* $\alpha-2$ entiers naturels *pairs*, car $f'(x)= A\alpha(x-a)^{\alpha-1}$ et $f''(x)= A\alpha(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-2}$).

Concernant la démonstration des conjectures sur les variations de α_0 et le signe de (α_0-f'), le travail réalisé par les étudiants montre, en particulier lors de l'expérimentation finale, des *signes d'évolution* intéressants du point de vue de leur autonomie personnelle. Certes, les deux groupes se heurtent, dans le cas particulier de la fonction exponentielle, à l'étude du signe de $(\alpha_0)'(x) = (xe^x-e^x+1)/x^2$, et commencent d'abord par tenter de résoudre l'équation : $xe^x-e^x+1=0$, dont ils ne font que trouver la racine évidente zéro. Mais Sylvain[25] repère que le numérateur de $(\alpha_0)'(x)$ s'écrit sous la forme $(x-1)e^x +1$, en déduit donc qu'il est strictement positif pour $x\geq 1$ et que α_0 est strictement croissante *au moins* sur $[1,+\infty[$. Smail[26] a déjà remarqué la relation entre $(\alpha_0)'(x)$ et $(\alpha_0-f')(x)$ qui permet de prouver une conjecture dès lors que l'autre sera établie, et Leslie[27] a soudain l'idée de *redériver* la fonction $u(x) = xe^x-e^x+1$ pour étudier le signe de α_0'. Avec un peu d'aide de notre part, elle finit par établir la stricte croissance de sur R^*_- et R_+^*.

Lors de la seconde préexpérimentation, il a été nécessaire, en revanche, de conseiller aux étudiants d'effectuer une nouvelle dérivation. Un débat s'est instauré entre ceux qui pensaient devoir dériver l'ensemble de l'expression de $(\alpha_0)'(x)$ pour obtenir les variations, puis le signe de cette expression, et ceux qui ont choisi de dériver seulement son *numérateur*, puisque celui-ci donne à $(\alpha_0)'(x)$ son signe. L'échec des uns et la réussite des autres a alors permis de trancher ce débat. La preuve de la conjecture sur le signe de α_0-f', dans le cas général d'une fonction à croissance forte quelconque, est réalisée assez rapidement lors de la seconde préexpérimentation, car Malika a bien en tête l'icône du théorème des accroissements finis :

Nous-mêmes : *« A quelle pente est égale la pente de la corde ? »*
Malika : *« A la pente en un point entre 0 et x ! »*
Nous-mêmes : *« Oui, très bien ! Placez la sur le schéma ! »*
Elle le fait sans encombre...
Nous-mêmes : *« A quoi vous fait penser cette situation ? »*
Malika : *« A la formule des accroissements finis, (f(b)-f(a)) / (b-a) = f'(c), le dessin a été fait en cours ! »*
Grégory et Stéphane : *« Nous, on n'a jamais vu ce dessin en cours au moment où on a fait le théorème des accroissements finis ! »*
Nous demandons alors à Malika d'expliquer son idée à ses camarades. Elle obtient ainsi l'égalité : $f(x)-f(0) = x.f'(c)$, pour c entre 0 et x. Eric termine le raisonnement :
Eric : *« Comme $\alpha_0(x) = f'(c)$ pour $0<c<x$, et comme $f'(c)<f'(x)$, on en déduit que $\alpha_0(x)<f'(x)$! »*

[25] Lors de l'expérimentation finale sur deux séances.
[26] Idem.
[27] Idem.

Le groupe soumis à l'expérimentation finale bénéficie d'une indication supplémentaire de l'énoncé pour résoudre le problème : *« Quel résultat général connaissez vous, liant un taux d'accroissement et un nombre dérivé ? »*. Cette indication amène deux propositions de la part des étudiants : le *théorème* des accroissements finis et les *inégalités* des accroissements finis. Ceux qui tentent de travailler avec le théorème ont quelques difficultés à gérer le choix de la fonction, des points a et b auxquels ils vont appliquer la formule et surtout la présence du « c » intervenant dans cette formule :

Sylvain : *« On prend x pour b et 0 pour a… ça donne : $f(x)-f(0) = f'(c).(x-0)$ »*
Leslie : *« Oui, donc on a : $\alpha_0(x) = f'(c)$. »*
Sylvain : *« …Ah oui, et comme f' est croissante, α_0 est croissante, c'est bon ! »*
Nous-mêmes : *« Attention, vous avez obtenu $\alpha_0(x) = f'(c)$, et pas $\alpha_0(x) = f'(x)$. Est-ce que cela ne pose pas un petit problème tout de même, de dire que α_0 est strictement croissante comme f' ? Ou se situe c ? »*
(…)
Sylvain : *« … c est entre 0 et x. On peut écrire le TAF entre 0 et x_1, entre 0 et x_2… »*
Il écrit…
Sylvain : *« On obtient $\alpha_0(x_1) = f'(c_1)$, et $\alpha_0(x_2) = f'(c_2)$, avec c_1 entre 0 et x_1 et c_2 entre 0 et x_2, disons 0 inférieur à c_1 inférieur à x_1 et 0 inférieur à c_2 inférieur à x_2 »*
Nous-mêmes : *« Cela vous donne quoi, alors ? »*
Sylvain : *« Ben…si par exemple on a x_1 strictement inférieur à x_2, on a c_1 strictement inférieur à c_2 donc comme f' est croissante, α_0 est croissante ! »*
Nous-mêmes : *« Pourquoi dites vous que x_1 strictement inférieur à x_2 implique c_1 strictement inférieur à c_2 ?… Si vous prenez deux nombres a et b, sachant que a appartient à [0,1] et b appartient à [0,2], vous pouvez en déduire que a est forcément inférieur à b ? »*
Sylvain : *« Ben,… non ! Et si on prend c entre $x-\varepsilon$ et $x+\varepsilon$? »*
Nous-mêmes : *« De toutes façons il faudra fixer ε, même très petit ; donc même dans ce cas vous ne pourrez identifier f'(c) avec f'(x) ! »*

Les étudiants qui tentent de travailler avec les inégalités des accroissements finis ont davantage de facilités à comparer $\alpha_0(x)$ et f '(x) pour x strictement positif, mais ils trébuchent sur le cas « $x<0$ »[28] : les bornes 0 et x de l'intervalle s'intervertissent alors tout comme les valeurs f '(0) et f '(x) du minorant et du majorant de la dérivée sur cet intervalle, ce qu'il faut ici constater pour réaliser une démonstration correcte. L'obstacle n'est pas cependant pas de même nature, aussi « consistant », que celui rencontré dans l'application du théorème des accroissements finis :

Smail : *« Quand x est négatif, le b ce n'est plus x, c'est zéro ! On a : a=x et b=0 »*
Stephen : *« Pourquoi ? C'est pareil ! On peut prendre a=x et b=0 ou le contraire dans la formule… »*
Smail : *« Non ! La formule est valable pour x appartenant à [a,b], donc a est inférieur à b… »*
Stephen : *« Tu crois ? »*
Smail (moins sûr de lui) : *« Oui, c'est le théorème de terminale. »*

[28] Nous sommes d'ailleurs obligés de leur signaler qu'il convient de traiter ce cas séparément du cas $x>0$.

Ils n'arrivent pas à trancher cette question. Smail tente de réécrire la formule en tenant compte du fait que $a = x < b = 0$: $f'(0).(0-x) \leq f(0)-f(x) \leq f'(x).(0-x)$.
Stephen : « *Oui, mais comme –x est positif, les inégalités ne changent pas de sens. On retrouve la même chose que tout à l'heure ! Ca ne va pas !* »

Smail et Stephen sont ici confrontés à une petite difficulté technique qu'un énoncé « bien pensé » de terminale S réduirait aisément à l'aide de directives et d'indications très précises données aux élèves (mais *précisément*, les étudiants ne disposent pas ici de telles aides). Le problème de la maîtrise du « c » dans le théorème des accroissements finis est, lui, beaucoup plus complexe et qualitatif (c dépend des points a et b choisis, tout en restant, pour l'essentiel, *inconnu*). On sent bien ici, à travers le travail et les difficultés des étudiants, tout ce qui est à l'œuvre, aux niveaux technique et conceptuel, dans la transition lycée / université.

La démonstration de la croissance s'établit aisément après généralisation à toutes les fonctions à croissance forte de la formule $(\alpha_0)'(x) = (f'-\alpha_0)(x)/x$. Outre le fait qu'il est nécessaire ici de solliciter de la part des étudiants cette généralisation, la dérivation de α_0 dans le cas général pose un ultime problème, de nature conceptuelle, rencontré lors de la préexpérimentation : certains étudiants estiment que la dérivée de $x \to f(x)-f(0)$ est la fonction $x \to f'(x)-f'(0)$. C'est là un type de problème bien spécifique du post-bac, que la dérivation de fonctions usuelles ne permet pas de rencontrer.

4°) Problèmes de dévolution. Gestion de l'atelier par l'enseignant.

Il nous faut tout d'abord signaler les quelques questions, au sein de l'énoncé relatif à la préexpérimentation et de celui relatif à l'expérimentation finale, qui posent des problèmes de dévolution particuliers, sont parfois mal comprises ou interprétées par les étudiants, ou les laissent sans réponse.

Il y a d'abord la question A/2°) de l'énoncé de la préexpérimentation : « *Le panel de fonctions à croissance forte sur un intervalle se réduit-il, selon vous, à une telle famille (les exponentielles de base a>1) ?* », et celle qui s'y substitue dans l'énoncé de l'expérimentation finale : « *Effectuez plusieurs représentations graphiques différentes pouvant correspondre à des fonctions à croissance forte sur R. Dites ce qui varie à chaque fois.* ». Concernant la première question, certains étudiants répondent « non », mais n'arrivent pas à présenter d'autres exemples, et d'autres citent juste l'exemple des fonctions $x \to x^n$ sur R_+, mais poussent ensuite leur ambition à trouver d'autres fonctions à croissance forte sur R, et restent bloqués à ce stade :

Jean-Marc : « *Celles qu'on a trouvées sont à croissance forte sur un intervalle de R, mais pas sur R tout entier* »
Franck : « *Il y en a sûrement d'autres que l'exponentielle qui sont à croissance forte sur R, puisque ce sont des fonctions convexes, mais c'est difficile de voir lesquelles !* »

En réalité, la question posée ne sollicitait pas explicitement de nouveaux exemples, mais plutôt d'extrapoler par un *raisonnement* divers graphes *possibles* pour de telles fonctions, et la référence de Franck aux fonctions convexes, pertinente, aurait pu être mieux utilisée. L'objectif, reprécisé dans l'autre question, relative à la seconde version du questionnement, laisse les étudiants encore plus perplexes, car ils ne perçoivent pas de différences entre les divers graphes qu'ils effectuent (ce qui était assez prévisible). Nous avons alors demandé à l'un des groupes d'étudiants, pour l'aider, lors de la première préexpérimentation à Orléans, de construire le tableau de variation de la dérivée d'une fonction à croissance forte sur R, en y indiquant les différentes limites aux bornes possibles : cela permet ainsi de synthétiser les deux informations *« f 'est positive et strictement croissante sur R »* au sein d'un même tableau. A partir de là, une extrapolation de différents types de graphe possibles pour f ', puis pour f, devient réalisable.

Disons que, dans l'ensemble, les étudiants ont finalement réussi à obtenir ce que l'on attendait, mais n'ont pas bien compris au départ l'objectif visé, en dépit de nos explications. Il a donc été nécessaire de les suivre pas à pas pour ce travail. Par exemple, ils ont d'abord tenté de réaliser un tableau des variations de f (au lieu de f '), parce que cela correspondait à leurs habitudes. Il a fallu les guider au niveau des limites possibles en $-\infty$ et $+\infty$ pour f ', car ils n'avaient pas envisagé l'éventualité d'une limite finie en $+\infty$. Enfin, à l'instar de ce que l'on a pu observer lors des tests (partie VI de cette thèse), l'extrapolation du graphe de la fonction à partir de celui de la dérivée s'est avérée également assez délicate. Un pilotage de très près a été nécessaire.

La dernière question de la partie initiale de l'atelier (recherche d'exemples) n'a guère été traitée par les étudiants dans les différentes expérimentations. Rappelons que cette question posait, suite à l'étude d'exemples[29], le problème de l'existence de fonctions à croissance forte, en particulier sur R, en dehors de celles trouvées spontanément (toujours les mêmes) par les étudiants. On constate donc ici une difficulté de ces derniers à prendre du recul par rapport à cette étude d'exemples qui les a absorbés pendant un long moment, à tirer une « morale » de leur travail. Il y a peut-être, à la source de cette difficulté, aussi un problème de contrat, les étudiants n'étant pas habitués du tout, ni au lycée, ni même à l'université (au moins dans les pratiques les plus courantes), à tirer *eux-mêmes* les leçons, d'un point de vue heuristique, de leur propre travail.

L'étude des conjectures démarre à peu près de la même façon lors de toutes les séances, par une courte période de « flottement », certains étudiants s'interrogeant même sur le sens de l'expression *« raisonner graphiquement »*, ce qui montre bien le caractère inhabituel, en DEUG, de l'activité proposée, qui se distingue aussi des interprétations graphiques réalisées au lycée. C'est ensuite la *généralisation* à l'ensemble des fonctions à croissance forte, de ce raisonnement graphique mené dans le cas particulier de la fonction exponentielle, qui n'est pas traitée, ou avec difficulté, ce qui est en partie dû au fait que la tâche à réaliser ici n'est pas clairement spécifiée. Il ne s'agissait pas encore de démontrer de façon « rigoureuse » les conjectures, mais de s'appuyer sur les exemples de fonctions à croissance forte mis en évidence précédemment, ou sur les propriétés graphiques caractéristiques de telles fonctions, afin de constater que les conjectures se généralisent. Le « jeu scientifique » que l'on souhaiterait faire jouer aux étudiants, et qui consiste par deux fois successivement[30] à se forger d'abord une conviction par observation du graphique, puis à établir la conjecture imaginée par une démonstration formelle standard, n'est pas bien compris. On constate que

[29] Notamment celui d'une fonction construite par « recollement » de deux expressions distinctes de part et d'autre d'un point.
[30] D'abord pour la fonction exponentielle, et ensuite dans le cas général.

les étudiants mélangent parfois les deux phases, et que leur *rapport à la rigueur*, en évolution, voire en construction pendant la première année de DEUG, intègre encore mal cette forme de flexibilité :

Nous-mêmes : *« Vous pouvez tenter de tester les autres exemples de fonctions à croissance forte qui ont été trouvées. Pourquoi n'utilisez vous pas votre calculatrice graphique ? »*

Stéphane : *« On n'a plus l'habitude d'utiliser la calculatrice, et de toutes façons, ça ne prouvera pas que c'est général ! »*

Grégory : *« Comment peut on s'apercevoir que toute fonction à croissance forte vérifie les conjectures, si on ne connaît pas toutes les fonctions à croissance forte, et qu'en plus on en connaît très peu ? »*

Un peu plus tard, lors de la phase de démonstration :

Nous-mêmes : *« ... comment justifiez vous le fait que f'(c)<f'(x) ? »*

Eric : *« Ben, ça se voit sur le dessin ! »*

Nous-mêmes : *« Attention ! On est en train de démontrer, donc il faut fournir à présent des justifications rigoureuses. La représentation graphique, on s'en sert pour trouver l'idée intuitivement, mais ensuite, le résultat, il faut le prouver, de même que le théorème des accroissements finis peut se voir graphiquement, mais en cours il a aussi été démontré... »*

(...) Période de flottement. Comme ils ne trouvent pas, nous leur donnons la justification :

Nous-mêmes : *« Il faut tout simplement invoquer le fait que f' est strictement croissante, ce qui est l'une des deux propriétés caractérisant les fonctions à forte croissance. Comme c<x, on a bien f'(c)<f'(x). »*

Concernant la recherche d'exemples, nous avons été quelque peu déroutés au départ, lors des préexpérimentations, par le comportement des étudiants, qui ne calculent *aucune* dérivée pour tester la croissance forte présumée des exemples qu'ils proposent, ce qui aboutit souvent à des erreurs. Nous n'avons pas compris immédiatement leur mode de fonctionnement : influencés par l'expression très *connotée* de « croissance forte », ils s'affranchissent de la définition donnée, cherchant dans leur mémoire des fonctions dont le graphe « monte rapidement ». Par réaction, nous leur avons souvent demandé[31] de dériver deux fois les fonctions considérées pour éviter ces erreurs, ce qui n'était pas a priori la méthode la plus naturelle (évaluer à l'œil les variations de la dérivée première va davantage de soi, s'agissant de fonctions prototypes). Il en va de même lors du travail sur les familles de fonctions paramétrées ; ainsi au groupe G3 d'Orléans[32], dans l'ensemble plutôt performant, qui bute sur l'exemple des fonctions du type x→ A.ln(|x-a|), estimant que leur dérivée x→ A/(x-a) est nécessairement décroissante sur]-∞,a[et]a,+∞[, nous conseillons de refaire une dérivation. Leur suggérer de regarder le cas de la fonction x→ -1/x aurait pu leur permettre de poursuivre dans la voie, plus qualitative et conforme à leur culture du lycée, qu'ils avaient choisie. La méthode consistant à dériver deux fois, efficace et assez incontournable s'agissant de fonctions d'expression plus complexe, aurait sans doute dû arriver *en son temps*, lors de l'étude des fonctions x→ A.tan(x-a), la familiarité des étudiants à la fonction tangente étant moins grande que pour les autres fonctions prototypes. A travers notre façon de gérer *sur le moment* le problème, c'est toute la question de la transition institutionnelle qui est ici posée, la

[31] Surtout aux étudiants du groupe « faible », lors de la seconde préexpérimentation, à Marne la Vallée.
[32] Voir la transcription de la séance en annexe de cette thèse.

naturalisation de certains procédés émergeant d'une certaine culture au niveau du supérieur nous faisant un peu oublier que dans la culture du lycée, il y a d'autres procédés qui font référence. En fait, c'est une flexibilité entre la méthode par dérivations successives et une méthode plus qualitative qu'il faut construire en première année de DEUG A.

Lors de l'expérimentation finale, la recherche préalable de critères suffisants sur les dérivées pour qu'une fonction soit à croissance forte contraint sans doute ensuite les étudiants à davantage utiliser ces critères[33]. Elle étouffe peut-être aussi en partie la « conception » des étudiants décrite plus haut de la croissance forte en même temps que le mode de fonctionnement spontané des étudiants pour la recherche sollicitée. Certains phénomènes de résurgence apparaissent alors, que nous ne gérons sans doute pas toujours au mieux, là encore, du point de vue des adaptations possibles de la culture des étudiants aux problèmes posés :

Sylvain : *« La fonction $x \rightarrow A.\ln(\lvert x-a \rvert)$ ne peut pas être à croissance forte, puisque le log croît lentement ! »* Ses camarades semblent convaincus par cet argument qui paraît être de bon sens. Nous-mêmes : *« Oui, votre argument est intéressant car il est qualitatif, mais vous avez vu : il y a un coefficient A devant le log ! Ce coefficient peut-être positif ou négatif. Il vaudrait mieux que vous fassiez vraiment les calculs… »*

A posteriori, nous leur montrons au moyen d'un tracé de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow -\ln(\lvert x \rvert)$, déduit par différentes symétries de celui de la courbe de $x \rightarrow \ln(x)$, que le résultat obtenu par dérivations successives peut s'appréhender de façon plus intuitive, graphiquement. On aurait pu le suggérer dès le début.

Il est important de noter qu'un tel atelier n'a pas un déroulement linéaire. Certaines parties, comme la recherche d'exemples de fonctions à croissance forte au sein de familles de fonctions paramétrées, sont d'une dévolution facile ; les étudiants peuvent les travailler de manière assez autonome, et l'atelier « avance », même si les réponses apportées sont parfois incorrectes. Mais il y a des questions qui achoppent sur un point précis ou une multiplicité de petits problèmes techniques, pouvant ainsi engendrer un long débat, dont s'accommodent mal les contraintes de temps. Nos interventions peuvent alors se multiplier, et il arrive même que nous prenions complètement en charge certaines tâches jugées secondaires[34] par rapport au travail proposé, afin que les étudiants puissent avancer.

C'est notamment le cas, lors de l'expérimentation finale, de la démonstration de la stricte croissante sur R de la fonction $x \rightarrow x^3$ ou des objections à donner aux multiples propositions de traduction de la croissance forte qui sont présentées par Stephen et Smail. Le débat se limite ici aux personnes ayant formulé ces propositions et nous-mêmes, et nous tentons donc d'accélérer un peu les choses, afin que l'attention des autres participants de l'atelier ne se relâche pas. De même, la démonstration des conjectures sur les fonctions à croissance forte pose de nombreuses difficultés techniques (application de la formule des accroissements finis, spécificité du cas des valeurs d'abscisse négatives, identification de $(f\,'-\alpha_0)$ dans $(\alpha_0)'$…), que

[33] Il faut cependant effectuer cette affirmation avec prudence, l'expérimentation finale ayant été menée avec un groupe d'étudiants tous reçus à l'examen du 1er semestre, donc d'un profil différent de celui des autres groupes.
[34] Découlant d'interrogations ou d'interventions d'étudiants en cours d'atelier, de précisions qu'il devient nécessaire de fournir au fur et à mesure du *déroulement* de cet atelier.

nous aidons largement à réduire. Mais nous gérons parfois très rapidement certaines propositions d'étudiants, dès lors qu'elles nous éloignent des objectifs de l'atelier, même lorsqu'elles portent sur un point essentiel de la transition avec le lycée et nécessiteraient bien davantage de débats :

<u>Stephen</u> (au sujet de l'étude des *<u>variations</u>* de la fonction $x \to (e^x-1)/x$) :
« On peut faire un développement limité, par exemple... »
<u>Nous-mêmes</u> : *« Attention ! Un développement limité, c'est local... est-ce que le problème posé est de nature locale ? »*
(...)
<u>Nous-mêmes</u> : *« Est-ce qu'on est en train de calculer la limite en un point précis par exemple ? »*
<u>Sylvain</u> : *« Non, donc c'est pas un développement limité qu'il faut faire. »*

C/ <u>BILAN DE L'ATELIER ET PRISE DE RECUL.</u>

1°) Faire le point sur les compétences requises par cet atelier.

Il nous semble important d'effectuer, à la lumière des expérimentations menées, un bilan des modes de pensée et de fonctionnement qui sont (idéalement) requis par l'activité proposée dans cet atelier. Cela doit nous permettre de mieux prendre la mesure, *a posteriori*, des difficultés liées à une activité qui peut sembler de prime abord relativement transparente, alors qu'on s'aperçoit à l'analyse, avec l'éclairage du travail des étudiants, qu'elle relève déjà par endroits d'un comportement « expert ».

Ainsi, une certaine « flexibilité cognitive[35] » joue un rôle décisif à deux niveaux au moins :

- Pour la recherche de fonctions à croissance forte sur un intervalle, prises au sein de familles de fonctions paramétrées. Cette recherche est rendue possible par une bonne connaissance des fonctions prototypes et des conséquences, au niveau du graphe, d'une translation d'abscisse ou d'un changement de signe de certains coefficients (possibilité de jouer sur les paramètres, capacité à prendre des exemples, à utiliser le cadre graphique). Lorsqu'on n'arrive plus à se débrouiller par une démarche qualitative, il faut alors être capable de *changer* radicalement de *stratégie*, et penser à dériver <u>deux fois</u> la fonction pour déterminer si elle est à croissance forte sur un intervalle donné I par évaluation du signe de ses dérivées.

- Pour la mise à jour et la démonstration des deux conjectures concernant la fonction α_0, qui sont l'objet <u>d'aller-retour</u> à bien maîtriser, entre cadre *graphique* et cadre *algébrique*, et qui s'inscrivent dans un type de « jeu » scientifique (« je postule - je démontre »), qui n'est que rarement mis en évidence dans l'enseignement et les pratiques de classes ordinaires.

La réalisation d'<u>inférences</u> graphiques à partir de l'interprétation du terme $\alpha_0(x)$ pour x fixé est tout à fait *inhabituelle* dans les <u>deux</u> institutions. P.H.Terracher a d'ailleurs rappelé lors du

[35] Voir la partie théorique (I) de cette thèse.

récent colloque de Toulouse sur la liaison lycée / post bac[36], que la démonstration du théorème des accroissements finis, et de quelques autres théorèmes relatifs au même thème, s'effectue assez classiquement en DEUG par l'introduction « providentielle » d'une fonction auxiliaire, à laquelle on applique le théorème de Rolle, pour en déduire de façon « magique » le résultat attendu, là où un argument fondé sur l'aspect géométrique[37] du problème permettrait de raisonner de façon plus naturelle. Le manque de familiarisation des étudiants, tant avec les objets manipulés (les coefficients directeurs de la sécante et de la tangente) qu'avec le type de tâches ici sollicitées, rend donc très délicat le travail demandé.

Certaines questions se démarquent aussi par leur *originalité* et leur *« degré d'ouverture »* de ce dont les étudiants ont l'habitude : il faut tirer une morale de situations rencontrées (par exemple, décrire une méthode d'obtention de fonctions à croissance forte sur R), voir si certaines propriétés graphiques semblent ou non se généraliser à d'autres fonctions que l'exponentielle,... etc.

La démonstration des deux conjectures exige une certaine autonomie dans le travail *technique* (étude des variations de la fonction α_0 par double dérivation si $f(x) = e^x$, repérage de la relation liant $(\alpha_0)'(x)$ et $(\alpha_0-f')(x)$,... etc.), et dans le cas général, une bonne compréhension du théorème des accroissements finis (rôle du « c » dans cette formule), la connaissance précise des conditions d'application des inégalités du même nom.

L'étude des conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une fonction définie par deux expressions distinctes de part et d'autre de zéro, soit à croissance forte sur R, montre qu'il y a parfois des mathématiques non triviales qui sont sous-jacentes à l'atelier. La dérivabilité en zéro d'une telle fonction, et la continuité de sa dérivée en ce point, permettent d'assurer que la fonction est à croissance forte sur R dès qu'elle l'est sur R_+^* et R_-, mais le théorème de Darboux (*« toute fonction qui est la dérivée d'une autre vérifie la propriété des valeurs intermédiaires »*) permet en fait de faire l'économie de la vérification de la continuité en zéro de la dérivée.

2°) Quelques aménagements envisageables pour cet atelier.

Les différentes considérations qui vont suivre motivent les choix effectués pour une nouvelle modification du questionnement débouchant sur une version remaniée de l'atelier, présentée en annexe de cette thèse.

Il nous semble que le choix de l'expression *« fonction à croissance forte »* n'est finalement pas très heureux, d'une part parce qu'il favorise certaines conceptions d'étudiants *a priori*, et d'autre part parce qu'il n'est pas bien adapté à la définition donnée pour de telles fonctions. Ainsi, on voudrait pouvoir dire que la fonction $x \to x^3$ est à croissance forte sur $]-\infty,-2[$, par exemple[38], ce qui n'est pas, puisque sa dérivée $x \to 3x^2$ décroît strictement sur cet intervalle. L'expression *« fonction à croissance accélérée »* nous paraîtrait meilleure, mais sans doute

[36] A l'occasion d'un atelier intitulé : « L'enseignement de la géométrie au lycée et ses conséquences dans l'enseignement post bac » (Toulouse, 18-20 juin 1999)
[37] Considération du maximum de la distance séparant deux points de même abscisse, l'un étant pris sur la courbe représentative de f et l'autre sur la sécante à cette courbe aux points d'abscisses a et b.
[38] Si l'on considère l'évolution donnée par le graphe.

vaut-il mieux ne pas donner de terminologie du tout et parler de la « classe des fonctions strictement croissantes sur un intervalle I, ainsi que leur dérivée ». On peut ensuite demander aux étudiants de donner eux-mêmes un nom à de telles fonctions, une fois qu'un certain travail a été effectué. En outre, l'introduction initiale de l'expression *« fonction à croissance forte »* empêche l'étudiant de trouver par lui-même de façon naturelle une « bonne » interprétation graphique du phénomène *« f et f ' sont strictement croissantes sur I »*. Lors de l'expérimentation finale, les étudiants font des propositions plus « compliquées » et originales[39] (finalement incorrectes), qu'ils n'auraient peut-être pas été chercher dans d'autres circonstances.

Dans la nouvelle version du questionnement, l'interprétation graphique de la « croissance forte », rebaptisée « propriété (P) », se mène <u>conjointement</u> à la recherche initiale d'exemples, de façon à aider l'étudiant. De même, la recherche des <u>critères opérationnels suffisants</u> pour qu'une fonction f vérifie (P) sur I, à savoir f '>0 et f '' >0 sur I, doit, selon nous, être immédiatement justifiée par l'étude d'un exemple ne pouvant pas se traiter autrement qu'en utilisant ces critères (nous avons choisi la fonction $x \rightarrow x/\ln(x)$ admettant un point d'inflexion en e^2...). Ce scénario peut forcer les étudiants à *adapter* leurs connaissances au nouveau problème posé, donc à chercher une <u>stratégie</u> différente de celle permettant de traiter le cas de fonctions prototypiques.

Nous conservons l'étude des trois familles de fonctions paramétrées telle qu'elle a déjà été présentée dans la version précédente du questionnement, mais nous sollicitons en outre, le tracé du graphe d'une fonction particulière du type $x \rightarrow A.\ln(|x-a|)$ et son interprétation. En effet, ayant constaté chez les étudiants, lors des expérimentations précédentes, un certain scepticisme face au constat (froidement tiré du calcul des dérivées), selon lequel une telle fonction puisse être « à croissance forte » sur un intervalle de R, il nous a semblé utile de les aider à saisir la réalité de ce phénomène par un tracé du graphe de la fonction $x \rightarrow -\ln(|x|)$ obtenu par deux symétries successives.

Ce n'est qu'au terme de cette étude effectuée sur des familles de fonctions paramétrées que nous demandons aux étudiants s'ils repèrent d'autres fonctions vérifiant la propriété (P) sur R que celles déjà repérées. Nous nous attendons à une réponse négative, les familles proposées ne vérifiant cette propriété (P) que sur un intervalle <u>strictement inclus</u> dans R, et ce, quelles que soient les valeurs des paramètres. Les étudiants ayant été ainsi sensibilisés à cette difficulté, nous *centrons* <u>explicitement</u> la dernière partie de cette séance de l'atelier sur l'obtention de fonctions vérifiant (P) sur R par une méthode dite de « recollement » de fonctions vérifiant (P) sur des intervalles formant une partition de R. Il y a ainsi, selon nous, une meilleure mise en perspective de ce problème que dans la version précédente de l'atelier, où l'on demandait d'ailleurs aux étudiants, de façon bien trop *anticipée*, de réaliser différents graphes de fonctions « à croissance forte sur R ».

Dans la seconde séance de l'atelier, nous modifions l'énoncé de la question relative à l'interprétation graphique à donner aux termes $\alpha_0(x)$ et f '(x) pour x fixé, de manière à la rendre plus <u>précise</u> et <u>explicite</u>. Nous demandons aux étudiants de déterminer de quelle droite passant par $M_0(x_0,f(x_0))$, le terme $\alpha_0(x_0)$ est le *coefficient directeur*, pour x_0 réel fixé non nul.

[39] Telles que : « la fonction f est croissante et $f'(0) \geq 1$ », ou : « $x \rightarrow f(x)-x$ est positive à partir d'un certain rang et strictement croissante ».

On leur conseille de s'appuyer sur un schéma et on leur demande de justifier leur réponse en déterminant l'équation de cette droite. Le fait de remplacer x, notation utilisée en général pour désigner une variable, par x_0, doit aussi les aider, selon nous, à mieux saisir le problème posé, et à distinguer les différents *moments* de l'activité graphique proposée : 1/ Interpréter $\alpha_0(x_0)$ à x_0 fixé, 2/ Considérer ensuite α_0 en tant que fonction de x pour établir des conjectures.

Nous avons légèrement rehaussé nos exigences concernant le contenu des conjectures relatives à la fonction α_0: $x \rightarrow (e^x-1)/x$, demandant aux étudiants de déterminer graphiquement les *limites* aux bornes de l'ensemble de définition de α_0 en même temps que les variations de cette fonction. Il s'agit ici de les sensibiliser davantage au fait qu'une étude qualitative assez précise est ici possible, ne mettant pas en jeu les procédés de calcul habituels.

Pour la démonstration des conjectures relatives à la fonction exponentielle, nous demandons préalablement aux étudiants de trouver une relation entre $\alpha_0'(x)$ et $(\alpha_0 - f')(x)$ et d'étudier sur R la fonction u : $x \rightarrow xe^x-e^x+1$. Ces aides, qui ne figuraient pas dans la version précédente de l'atelier, doivent apporter une certaine *fluidité* à son déroulement, tout en laissant à l'étudiant un travail assez consistant d'élaboration et de structuration de sa démonstration. Il doit en particulier percevoir que l'étude de la fonction u permet d'obtenir les variations de α_0, la formule liant $\alpha_0'(x)$ et $(\alpha_0 - f')(x)$ servant, *elle*, à déduire *ensuite* de ces variations le signe selon $x \neq 0$ de la quantité $(\alpha_0 - f')(x)$. Nous demandons alors la généralisation de cette formule (en même temps que celle des conjectures) à toutes les fonctions vérifiant la propriété (P) sur un intervalle I contenant 0. L'utilisation d'une *propriété* des accroissements finis est suggérée pour l'étude de la conjecture sur le signe de $(\alpha_0 - f')(x)$ selon $x \neq 0$, mais, nous inspirant du travail mené par les étudiants lors de la dernière expérimentation, nous laissons entendre que celle du théorème des accroissements finis *ou bien* celle des inégalités des accroissements finis peut permettre indifféremment de conclure.

Par rapport à la dernière version de l'atelier, nous avons enlevé la question relative à la généralisation intuitive, par considérations de différents graphes de fonctions « à croissance forte » sur un intervalle, des résultats obtenus pour la fonction exponentielle. Cette question, dans l'ensemble assez mal comprise des étudiants, s'avère en outre plutôt inutile, l'objectif principal, dès lors que l'on a établi que les conjectures sont satisfaites par la fonction exponentielle, devenant simplement de tenter de les démontrer dans le cas général.

Il nous apparaît aussi que la démonstration des conjectures doit être le *« point d'orgue »* de cet atelier, et que la partie C (application de ces résultats à l'étude d'un exemple) prévue initialement dans les deux premières versions de cet atelier, reste d'un intérêt assez limité, tant au niveau technique que conceptuel, et ne doit donc pas figurer dans la proposition finale.

3°) Institutionnalisations et perspectives.

A terme, il nous semble qu'un bilan des *leçons* que l'étudiant de DEUG doit retirer de cet atelier s'impose et peut donner lieu à un travail complémentaire (sous la forme, par exemple, de devoir à la maison) s'inscrivant bien dans les objectifs d'apprentissage de ce niveau d'étude.

Ayant constaté que les étudiants ont notamment des difficultés à interpréter graphiquement le terme $\alpha_0(x)$ pour x réel fixé non nul, et à le situer par rapport au terme f '(x), il nous paraît nécessaire d'institutionnaliser les notions suivantes, au terme de l'atelier :

« $\alpha_0(x) = (f(x)-f(0)) / x$ est égal au coefficient directeur de la droite, appelée corde, joignant les points d'abscisses 0 et x de la courbe représentative de f, tandis que f '(x) est celui de la tangente à cette courbe au point d'abscisse x. »

« $\alpha_0(x)$ est aussi le taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et x, tandis que f'(x) est le nombre dérivé en x de cette fonction, c'est à dire la limite lorsque X tend vers x du taux d'accroissement de f entre X et x. »

Il nous faut aussi situer les fonctions qui font l'objet de l'atelier, par rapport aux fonctions *convexes* étudiées en cours, au sujet desquelles les étudiants ont *déjà* des connaissances. Du reste, si ils sont sensibles à la position relative (immédiatement lisible sur le graphe) de la corde[40] et de la courbe, alors que l'on attend d'eux, ici, une interprétation en terme de pentes, c'est aussi parce que certains d'entre eux ont le (vague ?) souvenir d'un résultat du cours : *« Si une fonction est convexe sur un intervalle I, sa courbe représentative se situe (sur I) au-dessus de toute tangente menée par un point de I. ».* Il nous semble important de donner aux étudiants l'occasion de se remémorer ce résultat, et de leur montrer en quoi il se distingue de ceux obtenus lors de l'atelier, bien que sa démonstration utilise un principe déjà mis en valeur à l'occasion de cet atelier (étude de variations dans un cas *général*). On pourrait ainsi demander aux étudiants, à l'occasion d'un petit devoir à la maison, d'étudier les variations de la fonction φ, définie par : $\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x-x_0)$ sur un intervalle I =]a,b[contenant x_0, sachant que f est dérivable, de dérivée croissante sur I (donc convexe sur I). Il leur faudrait ensuite en déduire le signe de φ sur I, puis interpréter graphiquement ce résultat. Un tel travail peut aussi être proposé à des étudiants n'ayant reçu aucun enseignement sur les fonctions convexes (mais qui auront peut-être perçu graphiquement, lors de l'atelier, la position relative courbe / tangente pour les fonctions strictement croissantes ainsi que leur dérivée).

De la même façon, les étudiants ayant remarqué que la corde entre les points d'abscisses 0 et $x_0 \neq 0$ du graphe d'une fonction quelconque, prise au sein de la classe de fonctions étudiées dans l'atelier, se situe toujours au-dessus de ce graphe[41] entre 0 et x_0, doivent être amenés à trouver la justification *correcte* de cette propriété qu'ils ont été capables d'observer. Ce faisant, ils pourront constater que cette justification n'est pas sans rapport avec l'une des deux conjectures établies lors de l'atelier. En effet, démontrer cette propriété revient à prouver les inégalités :

$$(\forall x_0 \in I \cap \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in]0,x_0])\quad f(x) \leq \alpha_0(x_0).x + f(0)\ \text{ et}$$
$$(\forall x_0 \in I \cap \mathbb{R}_-^*)\ (\forall x \in [x_0,0[)\quad f(x) \leq \alpha_0(x_0).x + f(0),$$

[40] Qu'ils confondent souvent au début avec la tangente, comme ils confondent « taux d'accroissement » et « nombre dérivé ».

[41] Sans faire cette fois de confusion entre « corde » et « tangente », mais en voulant interpréter à tort ce résultat graphiquement appréhendable par une inégalité du type *« $\alpha_0(x) \geq f'(x)$ pour tout $x \neq 0$ ».*

l'équation de la droite portant la corde joignant les points d'abscisses 0 et x_0 de la courbe représentative de f étant : $Y = \alpha_0(x_0).X + f(0)$. Or on voit facilement que ces inégalités équivalent à :

$$(\forall x_0 \in I \cap R_+^*) \ (\forall x \in]0,x_0]) \ \ \alpha_0(x) \leq \alpha_0(x_0) \text{ et}$$
$$(\forall x_0 \in I \cap R_-^*) \ (\forall x \in [x_0,0[) \ \ \alpha_0(x) \geq \alpha_0(x_0),$$

donc à la croissance de la fonction α_0 sur $I \cap R_+^*$ et $I \cap R_-^*$.

Ainsi pourrions nous demander aux étudiants, dans le devoir à la maison faisant suite à l'atelier, de conjecturer graphiquement, pour une fonction f strictement croissante ainsi que sa dérivée, sur un intervalle I contenant 0, la position relative de la corde et de la courbe, puis d'établir l'équation de la droite portant la corde, avant de prouver enfin cette nouvelle conjecture.

D'autres leçons peuvent être retirées de cet atelier, en particulier à un niveau méta et à un niveau méthodologique, et donner lieu à une institutionnalisation en classe ou à l'élaboration d'une *fiche de synthèse* par les étudiants. Il y a notamment l'idée qu'une même question peut se traiter de différentes manières, idée sous-jacente à *plusieurs* tâches de l'atelier :

- la recherche de fonctions vérifiant (P) sur un intervalle, à partir de familles de fonctions paramétrées prototypiques, peut s'effectuer par considération des propriétés générales de ces fonctions *ou* par étude du signe de leurs deux premières dérivées,

- les deux propriétés générales des fonctions satisfaisant (P) peuvent s'appréhender graphiquement *ou* algébriquement,

- la démonstration de l'une d'entre elle peut se réaliser par le théorème *ou* par les inégalités des accroissements finis,... etc.

Au niveau des méthodes, on retiendra surtout celle, fondamentale en Analyse, qui consiste à effectuer plusieurs dérivations à la suite en vue d'étudier une fonction[42]. L'introduction de fonctions paramétrées lorsque l'on est à la recherche d'exemples ou de contre-exemples est aussi un principe important. En amont, cela demande d'être capable de réaliser des tracés de façon très qualitative, des « allures de courbes », notamment par considération de certaines symétries, et en différenciant l'essentiel (par exemple, le fait que le signe de tel ou tel paramètre modifie complètement les caractéristiques générales du graphe) de l'accessoire.

[42] Méthode déjà sous-jacente à de nombreux exercices de terminale S, mais non institutionnalisée, et totalement pilotée par l'énoncé à ce niveau de l'apprentissage.

III/ BILAN DES ATELIERS : CONFIRMATION DE TENDANCES, SIGNES D'EVOLUTION ET GESTION DES SITUATIONS.

A/ DIFFERENTES DIMENSIONS DU VIDE INSTITUTIONNEL.

1°) Avancées dans la problématique : l'apport des deux ateliers.

Nous avons pu observer que les deux ateliers sélectionnés, qui ne mettent guère en jeu de notions de cours spécifiques de niveau DEUG A, présentent cependant bien des difficultés *de toutes natures* pour un étudiant en première année d'université, certaines étant assez prévisibles et d'autres beaucoup moins[1]. Ils nous permettent donc de pointer plus précisément le vide didactique existant entre les deux institutions, du lycée et de l'université, par la caractérisation de ruptures *qualitatives* variées, largement *indépendantes* des contenus enseignés en DEUG A. Ces ateliers sont porteurs de problématiques nouvelles (étude de conjectures, travail sur une définition ou une classe de fonctions,... etc.), et riches de difficultés d'ordres technique (maniement d'un certain formalisme, adaptation de paramètres à la réalisation de conditions sur des fonctions, application d'une propriété des accroissements finis,... etc.) et conceptuel (travail en interaction de cadres, obstacles d'ordre logique, sens du local,... etc.) généralement très peu travaillées au lycée.

Il faut certes admettre, au vu des résultats de l'analyse de feuilles de travaux dirigés de DEUG (chapitre V de cette thèse), que les exercices proposés à ce niveau, pris un à un, présentent le plus souvent beaucoup moins de caractéristiques du type de celles précitées que ces deux ateliers. Mais ces ateliers ont précisément été conçus pour mettre en relief un large panel de ruptures institutionnelles et permettre d'aborder des questions insuffisamment travaillées en DEUG A, qui n'en sont alors que plus délicates lorsqu'elles entrent en jeu au détour d'un exercice[2]. Ils apportent aussi des éclairages sur l'activité mathématique au niveau post bac, qui sont susceptibles de favoriser l'apprentissage et sont ordinairement peu mis en valeur dans l'institution universitaire[3].

Les interactions entre les étudiants et l'enseignant font ici éclater de nombreux problèmes qui resteraient *larvés* dans d'autres circonstances, et ces ateliers en petits groupes agissent donc comme révélateurs de la *« partie cachée de l'iceberg »*, de la masse énorme de microruptures liées à la transition qui pourront ensuite se présenter aux étudiants d'autant plus crucialement dans le contexte d'un contenu *neuf*. En outre, il nous semble que ces ateliers, par leur nature même, permettent de travailler certaines démarches, certains modes de fonctionnement qui pourraient difficilement l'être dans le contexte d'un questionnement écrit : changements de stratégie (langue naturelle, recours au graphique, ou démarche formelle) dans le premier atelier, inférences graphiques, ajustements successifs lors de la recherche d'exemples de fonctions à croissance forte dans le second.

---

[1] Ainsi, des connaissances qualitatives sur les fonctions usuelles, par exemple la stricte croissance de $x \to x^3$ sur R, le fait qu'une fonction du type $x \to A/(x-a)$, où A est un réel donné, n'est pas forcément décroissante sur $]-\infty,a[$ et $]a,+\infty[$, que l'on imagine acquises au terme du lycée, ne le sont pas toujours, ce qui amène des erreurs.

[2] Nous renvoyons ici le lecteur à la théorie de Chevallard exposée au chapitre I de cette thèse, théorie qui insiste sur l'importance du travail visant à rendre routiniers différents types de tâches.

[3] Jeux entre le cadre algébrique et le cadre graphique dans le second atelier, sollicitation d'une réflexion sur des définitions anciennes dans le premier,... etc.

2°) Problèmes de prise en charge des ateliers.

L'influence des <u>choix d'intervention</u> de l'enseignant sur le déroulement de l'atelier s'avère prépondérante, avec une gestion du temps qui peut être très variable selon qu'il laisse une polémique se développer ou non. Les deux ateliers n'ont pas un déroulement *linéaire* : certaines questions avancent plus vite que d'autres[4], d'autres questions achoppent sur un point précis d'ordre technique,… etc. L'enseignant peut être amené à poser des questions que les étudiants ne se posent pas, ou à prendre en charge en partie certaines propositions individuelles que le groupe aurait, seul, des difficultés à réfuter[5]. Certaines questions, qui ne sont pas au centre de l'atelier, sont juste survolées, faute de temps (par exemple : *« Pourquoi un développement limité est il inefficace à fournir le signe de* xe^x-e^x+1 *sur R ? »* dans le second atelier).

Des problèmes assez variés de <u>dévolution</u> des tâches aux étudiants se posent. Dans le premier atelier, ils ont éprouvé une certaine difficulté initiale à comprendre la tâche présentée, puis à travailler les propositions à un niveau *formel*, les registres les plus utilisés (langue naturelle et graphique) favorisant imprécisions, affirmations fondées sur une vague intuition et conceptions personnelles. Dans le second atelier, des questions trop *ouvertes* et *générales* ou s'appuyant sur des considérations graphiques très qualitatives laissent les étudiants circonspects sur les moyens à mettre en œuvre pour y répondre[6]. Certaines questions nécessitent un *pilotage* de très près (dresser les différents tableaux de variations possibles pour une fonction à croissance forte, par exemple), une prise de recul sur le travail réalisé assez inhabituelle (tirer une « morale » de ce travail afin d'élaborer une méthode de construction de nouvelles fonctions à croissance forte). Il y a parfois une certaine difficulté à gérer au mieux, sur l'instant, les difficultés des étudiants, à favoriser l'apprentissage d'une certaine flexibilité en ne se montrant pas trop directif, à ne pas les orienter, par exemple, sur une méthode particulièrement efficace mais qu'ils n'ont pas spontanément choisie ou imaginée[7].

B/ <u>CONFIRMATION DE TENDANCES, DIFFICULTES NOUVELLES.</u>

1°) Niveau formel et niveau langagier.

Dans le premier atelier, les problèmes d'ordre <u>formel</u> jouent un rôle particulier, notamment au niveau de la traduction de la propriété *« $f(x) = g(x)$ au voisinage du point x_0 »* et pour l'étude de l'item portant sur la dérivée symétrique. Bien que la notion de voisinage d'un point soit définie en cours, l'expression *« au voisinage du point x_0 »* n'évoque pour les étudiants une vague idée de proximité, et lorsqu'ils tentent de la préciser, c'est en général pour commettre

[4] Items plus ou moins problématiques et consistants dans le premier atelier. La recherche d'exemples de fonctions paramétrées à croissance forte, dans le second atelier, laisse les étudiants « moins secs » que, par exemple, les questions ayant trait à une prospection de nature graphique.

[5] Propriétés proposées par un étudiant concernant les fonctions à croissance forte.

[6] <u>Exemples</u> : « Le panel de fonctions à croissance forte se réduit-il aux fonctions exponentielles ? » ou « Les propriétés établies pour l'exponentielle peuvent-elles se généraliser à toute fonction à croissance forte ? ».

[7] Par exemple, étudier le signe des deux premières dérivées d'une fonction sur un intervalle donné pour savoir si cette fonction est à croissance forte sur cet intervalle.

l'erreur d'interpréter la propriété en question par : *« lim $_{x \to x0}$ (f(x)-g(x))=0 »*. Spontanément, les étudiants utilisent souvent le seul registre de la <u>langue naturelle</u> comme palliatif au travail formel, surtout en début d'atelier, ce qui ne va pas sans quelques risques[8]. Notons cependant que l'utilisation de la langue naturelle, combinée à la production d'un schéma, permet à certains étudiants de régler assez aisément le problème posé notamment par le premier item. L'item sur la dérivée symétrique peut s'accompagner d'une phase de *repérage formel* du taux symétrique à l'aide d'un schéma[9]. La question essentielle ici est de savoir si l'expression choisie pour un taux d'accroissement a une influence sur le résultat obtenu lors du passage à la limite. L'expérience montre que cette question n'est pas si facile à trancher a priori, puisqu'un changement de variable permet aux yeux de certains étudiants de passer de l'expression du taux symétrique à celle d'un taux d'accroissement « classique ». La question de la distinction des *statuts* (variable ou constante) correspondant à une notation donnée au sein d'une expression se pose alors aux étudiants.

Dans le second atelier, on retrouve des formes d'adaptation à la complexité des problèmes posés, et des <u>modèles simplificateurs</u> similaires à ceux repérés lors des tests de septembre (chapitre VI de cette thèse) et la même recherche d'une opérationnalité liée au champ d'expérience du lycée lorsqu'il faut voir si la fonction définie par : $f(x) = f_1(x) = -\ln(|x-1|)$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = f_2(x) = x+x^3/3$ pour $x>0$ est à croissance forte sur R. La dérivabilité en 0 est confondue[10] avec celle de f_1, et les nombres dérivés successifs de f en 0 assimilés à $f_1'(0)$ et $f_1''(0)$. Une condition du type $f_1'(0) \leq f_2'(0)$ (ou $f_1'(0) < f_2'(0)$) est introduite pour traduire la croissance stricte de la dérivée de f sur R,... etc.

2°) Problèmes liés à l'utilisation du cadre graphique.

L'utilisation du <u>cadre graphique</u> dans les deux ateliers, notamment celui sur les définitions de la dérivabilité en un point, est plus *fréquente* et *spontanée* que lors des tests de septembre. Sans doute le travail en petits groupes favorise-t-il cette utilisation davantage qu'un questionnement écrit individuel. Concernant le premier atelier, on peut aussi penser que la nature même de l'activité sollicitée force, d'une certaine façon, le recours au graphique, car c'est un moyen commode qui s'offre aux étudiants pour tenter de donner sens aux propositions de l'énoncé.

Cependant, les <u>insuffisances</u> de l'observation *graphique* immédiate éclatent ici au grand jour chez les étudiants, et à plusieurs reprises. Dans le premier atelier, notamment, le travail de repérage du taux d'accroissement symétrique sur le graphique les amène à penser qu'un passage à la limite dans ce taux d'accroissement symétrique et dans le taux d'accroissement classique relèvent d'un processus similaire. Cela vient en partie du fait qu'ils tracent, pour effectuer ce repérage, une courbe sans point anguleux, correspondant implicitement à une fonction dérivable en tout point. A partir de là, les notions de « nombre dérivé » et de « nombre dérivé symétrique » deviennent graphiquement (et dans la réalité) indiscernables.

[8] L'expression « <u>sur un</u> voisinage de... » semble jugée plus précise que l'expression « <u>au</u> voisinage de... », et peut être alors interprétée très différemment, ce qui montre bien la fragilité du travail dans le registre de la langue naturelle.

[9] Cette phase de repérage formel du taux symétrique ne s'avère pas toujours aussi simple que l'on aurait pu le penser, ce qui montre le décalage qu'il peut y avoir entre « ruptures réelles » et « ruptures supposées ».

[10] Par sensibilité au repère sémiotique: $f(x) = f_1(x)$ pour <u>**x≤0**</u>.

Certaines conceptions forgées sur la perception graphique conduisent également les étudiants à des erreurs. Pour bon nombre d'entre eux, le point de vue *« intersection locale »*[11] sur la notion de tangente vient contredire l'idée selon laquelle lorsqu'une droite est confondue avec la courbe représentative d'une certaine fonction sur un intervalle de largeur strictement positive centré en un point x_0, cette droite est tangente à cette courbe en ce point.

Le second atelier confirme les problèmes de flexibilité entre cadre *algébrique* et cadre *graphique* qui sont apparus lors des tests de septembre. En dépit d'un travail de préparation à l'atelier, les étudiants éprouvent de grandes difficultés à interpréter graphiquement le terme $\alpha_0(x)$ pour x fixé non nul, ou bien ils font l'amalgame entre $\alpha_0(x)$ et f '(x). Ils comparent la position relative de la courbe et de la corde là où c'est une comparaison de pentes qui est nécessaire. Le passage de la lecture de $\alpha_0(x)$ pour diverses valeurs de x (aspect géométrique) à l'extrapolation des variations de la fonction α_0 (aspect fonctionnel) s'avère particulièrement délicat. La nature des inférences à réaliser à partir du graphique est d'une difficulté nouvelle, et ces étudiants sont plutôt habitués à *lire* ou à *interpréter* graphiquement un résultat déjà acquis.

Une relative naïveté vis à vis du graphique est aussi parfois à l'origine de certaines erreurs. Pour un étudiant, la fonction $x \to x^n$ est confondue avec l'axe horizontal sur tout un intervalle centré en 0 dès que n est assez grand, d'autres estiment que la fonction $x \to x^3$ n'est pas *strictement* croissante sur R à cause du « faux plat » de la courbe au voisinage de 0,... etc. Les limitations liées au champ fonctionnel du lycée, auquel ils sont accoutumés, font par exemple qu'ils n'imaginent pas spontanément un exemple de courbe qui soit croissante sur R- et R_+^* mais pas sur R.

3°) Rapport à l'intuition, à la généralité et à la démarche de preuve.

On constate que l'intuition est souvent utilisée par les étudiants pour réduire, voire éluder certains problèmes[12], plutôt que pour se forger une opinion qu'ils mettront ensuite à l'épreuve du raisonnement. On assiste ainsi à une évaluation hâtive de la stricte croissance de certaines fonctions paramétrées, à la mise en jeu, ici et là, de modèles simplificateurs, à l'instar de ce que l'on avait observé lors des tests de septembre : *« si f'' est strictement positive, cela signifie que f croit très vite »*. Dans le premier atelier, le rapprochement entre courbe et droite, caractérisé par l'égalité : « $\lim_{x \to x_0} (f-g)(x) = 0$ », est parfois interprété comme une situation de tangence en x_0. Mais le recours à l'intuition se fonde aussi sur des éléments précis du cours. Ainsi, l'idée (inexacte) selon laquelle la fonction $x \to A\ln(|x-a|)$ est nécessairement à croissance lente sur un intervalle où elle est définie (indépendamment des valeurs de a et A), s'appuie sur les croissances comparées, qui constituent un enjeu majeur de l'enseignement sur les limites (notamment en première année de DEUG A).

On constate lors du second atelier que les meilleurs étudiants n'ont, le plus souvent, pas les moyens de tester la *validité* des conjectures qu'ils sont eux-mêmes capables de concevoir, faute de références suffisantes, théoriques ou en termes d'exemples, et aussi de moyens pour

[11] Dégagé par C.Castela [ibid.]

[12] Ce qui semble a priori assez naturel : y a-t-il nécessité de prouver ce qui semble évident ?

construire des contre-exemples[13]. Lorsqu'ils doivent changer radicalement d'avis sur la validité ou non d'une conjecture (ce qui est fréquent), cela amène une modification majeure de la stratégie adoptée (preuve d'un côté, recherche de contre-exemple de l'autre), ce qui suppose une flexibilité à laquelle ils ne paraissent pas encore très rodés. Le travail sur les conjectures s'avère ainsi assez délicat à éduquer, même si le rapport à la généralité et à la démarche de preuve apparaît en évolution. Ils semblent saisir la problématique (rechercher des informations générales sur les fonctions dites « à croissance forte » et les démontrer), mais les moyens d'y parvenir ne leur sont souvent pas très accessibles. Le « mélange des genres », l'articulation ou le jeu entre inférences graphiques et preuve « rigoureuse » ne sont pas toujours bien compris.

Au niveau logique, le rapport des étudiants à la notion de condition *nécessaire* et de condition *suffisante* reste encore largement à construire chez les étudiants au milieu de la première année de DEUG A, si l'on s'en réfère à la difficulté qu'ils ont à dissocier les deux phases distinctes de l'atelier sur les définitions de la dérivabilité et à ne pas se contenter de juger « globalement » chaque proposition comme synonyme ou non d'une de ces définitions. La dévolution de l'atelier se réalise peu à peu au fil de la séance.

4°) Problèmes techniques et conceptuels liés aux démonstrations générales.

Des lacunes à un niveau de démonstration très *élémentaire* apparaissent parfois. Par exemple, les étudiants n'arrivent pas établir que la fonction $x \to x^3$, est strictement croissante sur R, même une fois qu'on leur a conseillé d'appliquer la définition de la stricte croissance sur un intervalle. Cela atteste bien du fait qu'un certain travail technique lié aux démonstrations, même théoriquement exécutable avec les seules connaissances du lycée, reste encore très problématique pour les étudiants.

Cependant, il faut reconnaître que les difficultés techniques sont dans l'ensemble nombreuses et variées, et une réelle autonomie s'avère ici nécessaire. On notera pour mémoire que l'idée de re-dériver le numérateur de la dérivée pour en déduire son signe et par suite, les variations de la fonction, n'est pas spontanément mise en œuvre. De même, l'application du théorème ou des inégalités des accroissements finis pose quelques problèmes que les étudiants ont du mal à résoudre (gestion du « c » pour le théorème, du cas où $x<0$ pour les inégalités). La dérivation de la fonction $\varphi : x \to f(x)-f(0)$ peut aboutir à l'expression $\varphi'(x) = f'(x)-f'(0)$, qui est incorrecte.

Au niveau conceptuel, la propriété de croissance forte fait l'objet d'interprétations simplificatrices[14] inattendues telles que : *« courbe qui se sépare de plus en plus de la droite d'équation y = x »*, *« ... dont la pente finit par dépasser 1 en tout point »*,... etc. Lors de l'étude de conjectures, certaines erreurs assez classiques (*« une fonction strictement croissante dépasse 1 à partir d'un certain rang »*) resurgissent.

[13] Les fonctions définies par morceaux, notamment, ne semblent pas encore faire partie des connaissances disponibles en milieu de première année de DEUG A.
[14] Correspondant à des propriétés plus familières aux étudiants que la stricte croissance de la dérivée.

La continuité des fonctions semble rester ici la *règle générale* pour les étudiants, même s'il faut nuancer notre propos en invoquant le contexte des deux ateliers qui n'est pas propice à l'identification d'un problème de continuité. Dans le premier atelier, l'égalité entre $f(x_0)$ et $\lim_{x \to x_0} f(x)$ est jugée comme « naturelle », allant de soi, et non interprétée comme propriété de continuité en x_0, mais le cadre assez *général* dans lequel se situe l'atelier favorise ce type de comportement. Dans le second atelier, la condition de continuité en 0 est oubliée par les étudiants au moment où on leur demande si la fonction définie par $f(x)=-\ln(x-1)$ pour $x\leq 0$ et $f(x)=x+x^3/3$ pour $x>0$ est à croissance forte sur R. La condition de dérivabilité en 0 est cependant aussi oubliée dans un premier temps, lors de la préexpérimentation d'Orléans. C'est le niveau *mobilisable* voire *disponible* des connaissances sur la continuité qui est ici requis, attendu que l'étude des variations de f et f ' ne prête pas spontanément à penser à un problème de continuité.

C/ ADAPTATIONS POUR UNE GESTION EFFICACE DES ATELIERS.

1°) Des signes positifs d'évolution chez les étudiants.

Comme nous l'avons dit plus haut, le cadre graphique est plus spontanément utilisé, surtout dans le premier atelier, que dans les tests, et souvent avec un certain succès, notamment dans les items 1 et 5 où l'interprétation en termes de courbe et de droite sécantes en un point permet à certains étudiants de voir aisément que cette situation se distingue d'un cas de tangence qui en est une occurrence particulière.

Il n'y a pas eu *rejet* pur et simple, au sein des groupes observés, de la *problématique* introduite dans ce premier atelier, ni du *travail formel* qu'il nécessite. Au contraire, on constate que la réflexion sollicitée, un peu transversale par rapport au travail mathématique habituel, séduit certains étudiants, même s'il convient parfois de circonscrire le débat face au flot de conceptions et de propositions exprimées. Le travail argumenté de validation ou de rejet de ces propositions est ensuite perçu comme un peu plus ingrat, mais les étudiants n'hésitent pas à donner des exemples[15]. Notons aussi que certaines procédures algébriques ici requises, telles que : « la décomposition du taux d'accroissement symétrique en somme de deux taux d'accroissement classiques » ou « l'évaluation du nombre dérivé par limite du taux d'accroissement à partir d'une expression de la fonction sous forme d'approximation avec un reste en $\varepsilon(x)$ » sont utilisées avec succès. Enfin, il faut nuancer les difficultés ressenties lors de l'étude de certains items (n°2, n°4) par la difficulté et l'originalité présentées par ces derniers.

Concernant le second atelier, certains étudiants arrivent à produire des conjectures sur les fonctions à croissance forte, tout à fait vraisemblables compte tenu de l'état de leurs connaissances, même si elles s'avèrent fausses en fin de compte (*« $f(x)\geq x$ à partir d'une certaine valeur »* ou *« $x \to f(x)-x$ est strictement croissante »*). Ces conjectures proposées par les étudiants ne sont pas toujours faciles à mettre en défaut, car les exemples les plus immédiats de fonctions à croissance forte (ceux qui sont réellement à leur disposition : $x \to e^x$ sur R, $x \to x^n$ sur R_+) les vérifient parfois. Les étudiants ne disposent pas encore, à leur stade

[15] Notamment pour l'item 1, qui ne nécessite pas l'introduction de fonctions non standards au niveau du lycée.

d'apprentissage, d'un recul suffisant sur les fonctions convexes[16] qui les aiderait aussi à contredire certaines de leurs conjectures, ce qui doit nous amener à nuancer notre jugement sur leurs difficultés.

Par le biais du travail en petits groupes, les étudiants ont mis à plat bon nombre d'idées assez intéressantes. Par exemple, pour l'étude du signe de xe^x-e^x+1 sur R, celle de transformer cette expression sous la forme $(x-1)e^x+1$, afin de constater que ce terme est strictement positif au moins pour $x\geq 1$, ou bien de l'écrire sous la forme : $x(f'(x)-\alpha_0(x))$ avec $f(x) = e^x$. La recherche de fonctions paramétrées à croissance forte sur un intervalle donné a permis de les faire travailler à partir d'une culture du type de celle du lycée, tout en offrant des possibilités réelles de négociation et de dépassement à partir de cette culture[17]. On constate ici qu'une opérationnalité nouvelle se met peu à peu en place, même si l'évolution du comportement des étudiants reste à construire sur le long terme, vu la teneur des transitions à assumer. Au delà des insuffisances constatées ci-dessus, c'est leur implication personnelle dans le travail de recherche, permettant l'expression d'une certaine créativité, qui s'est engagée.

2°) Quelques pistes pour une meilleure exploitation des ateliers.

Avec le *recul* sur les difficultés rencontrées par les étudiants et aussi une estimation plus juste des compétences réelles requises par ces ateliers, nous sommes en mesure de jeter les bases d'un travail de reconstruction des ateliers, mais aussi d'envisager a posteriori quelques prolongements, utiles selon nous, à ces ateliers. C'est donc un cahier des charges visant à rendre les ateliers plus fluides dans leur déroulement, tout en les approfondissant, que nous suggérons de constituer.

Le premier atelier, sur les différentes définitions de la dérivabilité en un point, nécessite quelques simplifications au niveau de la présentation générale en vue de mieux faire ressortir le *fil directeur* de l'activité, des problèmes de dévolution étant apparus. Du point de vue du questionnement proprement dit, des aménagements sont également à envisager afin de resserrer le travail sur un nombre moins important d'objectifs[18] et d'éviter les perturbations de toutes natures[19]. On peut, tout en allégeant la forme et le fond, rendre plus vivant le questionnement en présentant aux étudiants un panel de représentations graphiques susceptibles de les aider à étayer leurs affirmations. Il devient possible, à présent, de planifier aussi des aides aux étudiants plus pertinentes. Ainsi, par exemple, concernant l'item 2, on peut prévoir de demander aux étudiants de préciser la notion de voisinage d'un point, de leur dire que les deux expressions *« au voisinage de... »* et *« sur un voisinage de... »* sont synonymes, de leur poser les questions suivantes : *« Une fonction affine est-elle dérivable en tout point ? Comment cela s'interprète-t-il ? »*. Toutes ces mesures doivent permettre de gagner le temps nécessaire à une synthèse collective d'environ vingt minutes.

---

[16] Evoquées par ailleurs dans un contexte très formel, celui du cours magistral.

[17] La complexité des fonctions sur lesquelles on fait travailler les étudiants constitue une *variable didactique* du problème, devant leur permettre d'évoluer le cas échéant d'une stratégie qualitative (utilisation de connaissances générales sur les fonctions prototypes) vers une stratégie type « étude du signe des deux premières dérivées ».

[18] L'item sur la dérivée symétrique apparaissant notamment un peu « décalé » par rapport aux autres.

[19] Les questions relatives à l'unicité nous semblent superflues, étant donné les difficultés déjà importantes présentées par l'atelier.

Dans le second atelier, quelques petites modifications du scénario nous semblent utiles. L'une d'elles vise à mettre davantage en rapport, au sein du questionnement, la recherche d'exemples de fonctions à croissance forte d'une part, et l'interprétation graphique de la croissance forte, la recherche de critères opérationnels pour que cette propriété soit satisfaite, d'autre part[20]. Il s'agit là, notamment, de favoriser chez les étudiants un travail d'adaptation de la *stratégie* d'investigation choisie, aux exemples de familles de fonctions paramétrées étudiées. Il faut aussi faciliter les changements de cadres (algébrique / graphique) en suggérant par exemple que le terme $\alpha_0(x_0)$, pour x_0 réel fixé non nul, est le coefficient directeur d'une certaine droite. D'un point de vue technique, certaines médiations ont déjà été trouvées entre les premiers questionnements et la version remaniée. Par exemple, on demande aux étudiants d'étudier d'abord le domaine de « croissance forte » de la fonction $x \to x^n$ avant de le faire pour la fonction $x \to (x-a)^n$, ce qui facilite les démarches de nature qualitative (possibilité de raisonner par translation...). On peut aussi leur demander dans la seconde partie de l'atelier d'étudier la fonction auxiliaire $u(x) = xe^x - e^x + 1$, leur suggérer de déterminer une relation entre α_0' et α_0-f ',... etc.

En revanche, il nous semble par exemple nécessaire de laisser aux étudiants le choix de la propriété des accroissements finis à appliquer (théorème ou inégalités) pour établir le signe de (α_0-f ') dans le cas général. Au terme de l'atelier, une critique comparée des méthodes utilisées devient ainsi possible. Enfin, l'expression de « croissance forte » qui s'est avérée finalement quelque peu inadaptée pour désigner la classe de fonctions en jeu, et « piège » les étudiants dans des conceptions favorisant l'erreur, nous apparaît a posteriori à bannir.

Suite aux ateliers, un bilan des débats ayant eu lieu, des erreurs produites, des notions et des méthodes mises en jeu, des résultats obtenus nous semble s'imposer. Ainsi, l'institutionnalisation de notions telles que celle de propriété satisfaite *au voisinage d'un point* (par exemple) et de méthodes telles que conjecturer sur des allures de courbes, utiliser des fonctions paramétrées dans la recherche d'exemples, étudier une fonction auxiliaire,... etc. peut prendre sens. L'enseignant peut faire le lien entre le thème du second atelier et la propriété de convexité qui aura pu être étudiée en cours, comparer les résultats de cet atelier et d'autres propriétés voisines des fonctions convexes (position relative courbe / tangente, courbe / corde,...). Divers travaux de reprise ou d'approfondissement peuvent être sollicités auprès des étudiants, par exemple une *synthèse écrite* pour le premier atelier[21], la *conjecture* et la *preuve* des propriétés sus citées dans le prolongement du second atelier.

[20] Le fait de considérer conjointement ces aspects doit faciliter les deux types de recherche.
[21] A partir de questions posées, suffisamment ouvertes, comme dans le dispositif utilisé à l'université de Lille sur les équations différentielles (voir le chapitre V de cette thèse).

CHAPITRE IX : CONCLUSION DE LA THESE.

Point de départ et orientation générale choisis pour cette thèse :

Nous appuyant sur un mémoire de DEA qui avait révélé, via l'étude d'un cours magistral en première année de DEUG A à Lille, une pratique de l'Analyse présentant dès les débuts du supérieur, des spécificités fortes (préceptes et méthodes introduits, formalisme utilisé), nous souhaitions au départ décrire les ruptures et continuités accompagnant la *transition* entre un enseignement secondaire plutôt orienté vers une Analyse algébrisée, l'application et la fonctionnalité immédiates, et l'univers a priori très différent rencontré en DEUG A à l'université.

Cependant, il nous semblait aussi que la seule référence à ce cours d'Analyse, extrêmement dense au niveau du contenu, et marqué par des intentions très particulières, risquait de nous orienter vers une vision assez manichéenne de la transition secondaire / supérieur, ne correspondant sûrement pas à la réalité telle qu'elle est vécue ordinairement et actuellement dans nos universités. Notre sentiment au départ était que de nombreuses microruptures d'ordres technique et conceptuel pesaient en effet lourdement dans les difficultés ressenties par les étudiants, et ce, souvent à l'insu des acteurs de l'institution universitaire, notamment du fait d'une méconnaissance de ces derniers des restrictions, parfois assez subtiles, inhérentes aux programmes de lycée, en termes de contenus et surtout de pratiques. Aussi avons nous délibérément choisi de centrer notre travail de thèse sur un concept, celui de dérivée, déjà suffisamment travaillé au lycée pour ne pas prêter le flanc à une vision trop caricaturale de la transition lycée / université. Ce concept présente même le double avantage de constituer une notion fondamentale de l'Analyse et de se situer véritablement au cœur de l'apprentissage de ce domaine, tant au lycée qu'en première année de DEUG A à l'université, permettant ainsi, à nos yeux, l'analyse fine des ruptures et continuités que nous souhaitions.

Références théoriques utilisées, en vue de délimiter une problématique précise :

Afin d'y voir plus clair, notamment au niveau de la construction de cette thèse, nous avons procédé à l'étude initiale des travaux didactiques les plus récents, susceptibles de nous aider à clarifier notre problématique, et à la situer par rapport aux recherches existant déjà, relatives à ces questions.

Une analyse de la transition institutionnelle en termes de ruptures conceptuelles « fortes » en début de DEUG A, ruptures liées aux problèmes de généralisation et de formalisation, nous est apparue incontournable (même si ce n'est pas la seule dimension à considérer), notamment s'agissant d'une étude centrée sur un concept qui entretient des relations étroites avec celui de limite. Nous avons donc commencé par évoquer (notamment) l'apport de la théorisation introduite par A.Robert dans ce domaine, en termes de niveaux de conceptualisation, de concepts formalisateurs, unificateurs, généralisateurs, simplificateurs. La (ré)organisation des connaissances qui accompagne l'entrée, en DEUG A, dans une analyse démontrée, est à relier à ces aspects.

Les modèles voisins de A.Sfard, Ed.Dubinsky et D.Tall, en termes de processus / objet, au sein de *l'Advanced Mathematical Thinking*, sont eux, adaptés à la description d'une flexibilité nouvelle à construire entre les dimensions procédurales et structurelles des différentes notions mathématiques abordées en DEUG A.

La présentation de recherches portant plus spécifiquement sur les problèmes posés par l'enseignement de l'Analyse a achevé notre panorama des ruptures conceptuelles « fortes » intervenant dans la transition. Les travaux de B.Cornu, A.Sierpinska et M.Schneider relatifs à des obstacles épistémologiques bien identifiés en Analyse, ceux sur l'évolution nécessaire des modes de pensée et de raisonnement à l'entrée dans le champ de l'analyse (M.Artigue), les difficultés liées à la reconstruction des rapports à l'algébrique (M.Legrand) ou à la nécessaire coexistence entre une analyse intuitive et une analyse rigoureuse (M.Schneider), devaient logiquement servir de référence à notre recherche.

La théorie anthropologique d'Y.Chevallard conduit, quant à elle, à une analyse de l'activité mathématique dans un environnement donné, en termes de praxéologies (systèmes de tâches, techniques, technologies, théories) résultant des valeurs institutionnelles relatives à cet environnement. Par là même, elle nous est apparue susceptible de donner de la consistance à notre idée initiale de nous intéresser, pour juger des problèmes liés à la transition, non pas seulement aux notions enseignées, mais aussi aux pratiques, a priori très différentes au lycée et à l'université. Cette théorie rend précisément à la dimension technique, souvent péjorée, son importance, notamment à travers la distinction entre tâches routinières et tâches problématiques au sein d'une culture donnée, et permet de caractériser chacun des deux environnements pour mieux les comparer. C'est alors en référence à cette théorie que nous avons pointé et interprété une évolution de la dialectique entre cours et exercices intervenant, selon nous, dans la transition secondaire/supérieur. Les énoncés, désormais démontrés, semblent prendre un relief nouveau en DEUG A, avoir des fonctions variables, pouvoir faire l'objet d'un travail de réflexion (sur le rôle des hypothèses par exemple), et les liens plus complexes entre le cours « théorique » et la pratique des exercices, donc aussi d'une lecture plus délicate, paraissent être parfois assez mal compris par les étudiants qui ont surtout une impression de distorsion.

L'étude des pratiques institutionnelles induisant, selon nous, des microruptures d'ordres technique et conceptuel, devait chercher à s'appuyer aussi sur d'autres dimensions d'analyse. Celle s'exprimant en termes de flexibilité cognitive et de disponibilité des connaissances est à ce niveau essentielle, comme l'a montré A.Robert, concernant des pratiques qui, selon elle, tendent à évoluer dès le début du DEUG A vers des pratiques expertes. Les notions de cadres (R.Douady), de registres (R.Duval) et de point de vue (A.Robert, I.Tenaud, M.Rogalski, C.Castela) nous ont permis de caractériser certains types de flexibilité cognitive, dont le rôle apparaît crucial en vue de cette évolution. Mais bien d'autres niveaux de flexibilité sont à prendre en considération, comme la capacité à utiliser en situation des repères de toutes natures (références théoriques, exemples…), à s'autoquestionner, à combiner des arguments ou à les répéter, à effectuer des mises en relation. Le rôle de la mémorisation, en vue de réaliser de telles associations ou de reconnaître des formes standards, apparaît alors primordial ainsi que l'a montré M.Rogalski. Mais ce rôle est déjà essentiel dans la réalisation de tâches plus élémentaires en première année de DEUG A, qui ne nécessitent pas autant de flexibilité cognitive que celles évoquées par M.Rogalski.

Enfin, l'importance nouvelle prise par l'acquisition de méthodes au niveau du DEUG A, dans l'optique d'une démarche réflexive et d'une distanciation par rapport à l'action, décrite par M.Rogalki en termes de stratégies guidées par des métarègles, de classement d'un problème, de choix tactiques et techniques, contraste nettement avec la possibilité de se limiter, au niveau de l'enseignement secondaire, à l'utilisation de « points méthodes », qui sont autant de plans d'action à usage purement local. Un travail de capitalisation sur des connaissances anciennes semble ainsi s'imposer dès les débuts de l'enseignement supérieur en vue d'atteindre le degré d'autonomie nécessaire à la réalisation des tâches sollicitées.

Problématique, hypothèses et choix d'une méthodologie adaptée :

Après avoir précisé les références didactiques pouvant éclairer notre travail, nous avons pu dégager une problématique précise pour la suite de cette thèse.

Un certain nombre de ruptures conceptuelles fortes, emblématiques de la transition, et objets de travaux de recherche spécifiques déjà conséquents, ayant été rappelées, nous avons décidé de prendre comme cadre théorique principal à notre recherche, celui de la perspective anthropologique de Chevallard, afin de nous centrer désormais sur l'étude des pratiques institutionnelles émergeant de deux cultures bien spécifiques, celle du lycée et celle de l'université. Cela nous a amené à faire l'hypothèse, fondée aussi en grande partie sur les cadres théoriques secondaires que nous avons évoqués (en termes de flexibilité cognitive, d'organisation des connaissances...), d'une évolution multidimensionnelle des rapports à l'Analyse et non pas réductible au passage d'une Analyse intuitive et algébrisée à une Analyse formalisée, aspect le plus apparent de la transition. Il nous appartenait alors de trouver un dispositif de recherche nous permettant de mener cette étude et de tester cette hypothèse sur la notion de dérivée, autrement dit il s'agissait de mettre au point une méthodologie adaptée à ces objectifs.

Une double approche, assez classique, des *rapports* institutionnels et des *rapports* personnels à la dérivée s'est ainsi imposée à nous. Etant donné que c'est l'étude des pratiques qui devait focaliser notre attention, nous avons concentré notre analyse, au niveau institutionnel, sur les exercices concernant cette notion de dérivée et son environnement, rencontrés aux deux niveaux d'enseignement, dans les manuels de première et de terminale scientifiques et les feuilles de travaux dirigés de DEUG A. La mise au point et l'utilisation d'une grille d'analyse multidimensionnelle, dont les différentes « rubriques » sont fondées sur la prise en compte des cadres théoriques secondaires, nous ont permis de structurer cette étude, à la fois de nature qualitative et quantitative. Rappelons sur quoi portaient quelques unes de ces rubriques : la décomposition des tâches sollicitées, les aides à la résolution présentes dans les énoncés, le statut « outil » ou « objet » des notions investies dans le contexte des exercices, le degré de généralité des tâches, les cadres et les registres de travail utilisés,... etc. Phénomène symptomatique de l'évolution constatée entre les pratiques des deux institutions, il nous a été nécessaire de modifier la grille d'analyse, utilisée initialement pour décrire l'environnement d'exercices issus des manuels de lycée, lorsque nous en sommes venus à l'étude des fiches de DEUG A.

Cette grille d'analyse multidimensionnelle nous a permis de décrire en détail les nombreuses microruptures et leur variété, dont nous avions fait l'hypothèse au départ, à la transition des deux institutions. On a pu jauger ainsi l'évolution entre lycée et université de la complexité des tâches, constituées de sous-tâches ici analysées, de nature graphique ou calculatoire, liées à l'application d'une définition ou d'une technologie, ou liées à un raisonnement. Des critères tels que la répétitivité des questions posées, des types d'exercices sollicités, la nature et le nombre des indications techniques données par le texte, le taux de découpage des tâches en sous-tâches au sein des énoncés d'exercices, et les choix à effectuer de la part de l'étudiant en phase de résolution, nous ont permis de mettre en relief des différences essentielles entre les deux environnements. L'analyse en termes de champs d'investigation des notions utilisées (monde fonctionnel avec lequel on travaille, degré de généralité mis en jeu, présence ou non de difficultés conceptuelles ou logiques particulières, de paramètres ou non, nécessité éventuelle d'un certain travail formel, sollicitation d'une réflexion particulière ou simple application,... etc.) a contribué aussi à donner du poids à cette étude.

Au niveau des rapports *personnels* à la dérivée, nous avons fait le choix de situer notre étude à l'interface entre le lycée et l'université (<u>tests</u> écrits proposés au mois de septembre aux étudiants entrant en DEUG A) et au milieu de la première année de DEUG A (<u>ateliers</u> en petits groupes). Dans les tests, la confrontation des étudiants avec des tâches non routinières au lycée, déjà qualitativement à la transition des deux cultures, devait nous permettre de jauger leur comportement et leur faculté d'adaptation face à des problématiques et des pratiques d'un type nouveau. Dans les ateliers travaillés en cours d'année, ce sont à la fois les signes d'évolution des étudiants devant des situations de problèmes sollicitant des rapports nouveaux à la dérivée, et de façon plus générale à l'Analyse, mais aussi les possibilités, grâce à une approche interactive, de gestion par l'enseignant des difficultés éprouvées par les étudiants pour construire ces rapports nouveaux, que nous souhaitions sonder.

<u>Résultats issus de l'analyse institutionnelle :</u>

L'étude des manuels de lycée a permis de constater que le travail mathématique sollicité autour de la notion de dérivée, dans cette institution, est piloté par quelques pratiques algorithmiques ciblées, avec des enjeux bien définis. Ces pratiques, très majoritaires dans les environnements d'exercices étudiés, font l'objet d'une mise en relief particulière, non seulement au sein des exercices (présence de sous-titres à l'intérieur des listes d'exercices, existence de canevas d'exercices répétitifs centrés sur une technique standard, un théorème particulier), mais aussi dans et surtout autour du cours (à travers des travaux pratiques, des fiches méthodes, des exercices corrigés,... etc.). C'est l'application et l'opérationnalité qui sont effectivement visées, et les notions sont surtout investies dans leur dimension « outil ». Le raisonnement et le travail de formalisation occupent dans ce contexte une faible place. Le rôle des définitions reste réduit car le resserrement des tâches sur des cas particuliers bien identifiés permet des prises de relais efficaces par des algorithmes standards (exemple : les formules générales de dérivation suffisent à traiter les problèmes les plus fréquents sans avoir à revenir à la définition de la dérivabilité et du nombre dérivé en un point). Certains types de problèmes, plus qualitatifs, en décalage par rapport à la culture ambiante, semblent être marginalisés à dessein. C'est le cas d'études locales en des points de non-dérivabilité, même pour des fonctions très simples (comportant une valeur absolue ou un radical).

Les éclairages graphiques et numériques sont bien présents, mais les changements de cadres sont presque toujours pilotés par l'énoncé. Les tâches de nature purement graphique sont isolées et très ciblées. Ce sont en général des tâches de lecture ou de reconnaissance et non des tâches de production (exemple : lire le nombre dérivé en un point d'une fonction dont le graphe est fourni). Elles sont souvent facilitées par le contexte (exemple : graphe présenté sur papier quadrillé) et des indicateurs visant à attirer l'attention de l'élève (exemple : pentes spécifiées en trait gras).

En première S, dans le contexte d'un rapport initial à l'objet « dérivée », les canevas d'exercices répétitifs sont peu évolutifs, présentent des modifications par « petites touches », de l'autonomie sollicitée, d'un exercice à l'autre. Les aides à la résolution sont multiformes, implicites ou explicites, locales ou globales, avec présence fréquente de suites de questions très directives, se répétant d'un exercice à l'autre. Le champ de fonctions au sein duquel les étudiants sont amenés à travailler reste assez restreint à ce stade d'apprentissage (fonctions polynomiales, fractions rationnelles, à radicaux, voire, plus rarement, trigonométriques) et « crée des règles ». En particulier, il permet d'entretenir l'illusion selon laquelle des démarches purement algébriques (notamment pour les majorations) suffisent à la réalisation du travail mathématique. C'est ainsi que les exercices mettant en jeu la définition par approximation affine de la dérivabilité en un point sont l'occasion de calculs numériques approchés, avec un travail éventuel de majoration de l'erreur, rendu possible par le type de fonctions considérées. En revanche, le point de vue *« Analyse »* (caractère local de la propriété), n'est pas explicité, ce qui tient sans doute beaucoup au fait que la notion (intuitive) de limite vient à peine d'être introduite.

En terminale S, les études globales de fonctions se généralisent et le travail se focalise surtout sur la *consolidation des acquis* (en vue du baccalauréat), le *réinvestissement* de connaissances anciennes sur la dérivée dans le cadre de l'étude des fonctions nouvelles (logarithmes et exponentielles, puissances). L'objet « dérivée » est lui-même réinvesti dans de nouveaux contextes (équations différentielles, intégrations par parties, étude de suites récurrentes,...). Les apprentissages nouveaux réellement centrés sur la notion de dérivée (inégalités des accroissements finis, dérivation d'une fonction composée, dérivées successives) sont, de fait, assez limités, ce qui suffit à expliquer la répétitivité moins grande qu'en classe de première S des exercices. Ces nouvelles notions, qui sont travaillées au sein d'exercices spécifiques, apparaissent peu, ou dans des contextes bien précis, au sein des problèmes de synthèse. Il y a peu d'évolutions sur un plan *qualitatif*, dans la nature des tâches proposées, et l'on constate même que les concepts sont plutôt moins problématisés, les éclairages graphiques et numériques, moins présents, et les tâches purement calculatoires, plus nombreuses, que dans les manuels de première. Une tâche, nouvelle en terminale, telle que : *« étudier les variations d'une fonction via l'étude préalable d'une fonction auxiliaire »* est systématiquement guidée et décortiquée dans les énoncés. Le travail des « gammes », en vue de rendre routinières certaines tâches, reste assez semblable à ce qu'il était dans les manuels de première S, même si une légère flexibilité est parfois requise, mais à l'intérieur d'un champ qui reste restreint. Les aides à la résolution, au sein des canevas d'exercices, suivent des progressions moins linéaires que dans les manuels de première S, mais il y a davantage de réponses fournies au sein des énoncés. Les sujets de Baccalauréat se cristallisent plus nettement sur des tâches bien découpées, avec des aides à la résolution pas à pas plus précises.

Comme nous l'avions en partie soupçonné au début de cette thèse, l'étude des fiches de DEUG A a montré que la transition entre lycée et université n'apparaît pas seulement marquée par des ruptures bien affirmées, mais aussi par des continuités apparentes dissimulant de nombreuses *microruptures* qui n'en sont que plus difficiles à détecter. Ainsi, la place prise par les tâches algorithmiques au sein des pratiques institutionnelles reste assez importante en DEUG A, mais ces tâches, plus techniques, supposent aussi l'assimilation de méthodes *générales* (recherche de primitives, calcul et utilisation de développements limités,... etc) plus complexes et variées que l'application simple et directe des quelques formules au programme de terminale S. Des attentes *nouvelles*, sur des objets *anciens*, sont souvent implicites, participant alors lourdement au hiatus lié à la transition. Par exemple, la nécessité de déterminer les variations d'une certaine fonction pour étudier une suite récurrente n'est plus systématiquement rappelée, encore moins celle de dresser un tableau de variations de la fonction en y indiquant précisément les valeurs qui jouent un rôle vis à vis de l'étude de la suite (c'est la combinaison des informations concernant ces valeurs et les variations de la fonction qui peut permettre de montrer par récurrence que la suite est bornée). L'application de théorèmes dans des exercices portant sur des objets *particuliers* pose des problèmes nouveaux du fait des contextes et des objectifs plus variés, des initiatives à prendre et des choix à faire qui en résultent pour l'étudiant. Ainsi, une tâche unique peut cumuler à la fois la mise en jeu de notions théoriques spécifiques du niveau DEUG (par exemple, formule de Taylor, développement limité,... etc.) et celle d'une fonction nouvelle (trigonométrique réciproque, hyperbolique ou hyperbolique réciproque). En terminale S, en revanche, le travail sur les fonctions *nouvelles*, logarithmes et exponentielles, concerne généralement, au niveau de l'objet « dérivée », des connaissances *anciennes* (variations, asymptotes,... etc.).

Nous avons effectivement rencontré, sur l'ensemble des feuilles de travaux dirigés étudiées, issues de *diverses* universités, les différents niveaux de ruptures prévus à partir de l'étude théorique initiale (travail sur des objets généraux, avec un monde fonctionnel nouveau, rôle des définitions, des références disponibles dans la résolution de tâches,... etc.). Mais il faut aussi reconnaître qu'en dehors des fiches de Lille, fruit d'un travail pédagogique particulier, les environnements d'exercices observés, pris chacun individuellement, ne mettent vraiment en évidence que quelques uns de ces niveaux de ruptures. Le travail formel, les changements de cadres algébrique / graphique, en particulier, ne sont pas mis en relief et exploités comme ils pourraient l'être dans l'ensemble des feuilles d'exercices analysées. Ainsi, le foisonnement potentiel de tâches (notamment complexes), susceptibles d'être soumises aux étudiants dès la première année de DEUG A, ne se réalise que partiellement dans les environnements effectifs étudiés, qui sont par ailleurs assez variables. Le fait qu'il existe parfois une pluralité de moyens pour résoudre un problème donné, phénomène s'amplifiant nettement à partir du supérieur, est encore peu mis en valeur au sein des questionnements observés, qui s'inscrivent souvent dans un contexte spécifique (par exemple, exercices « visant à appliquer le théorème des accroissements finis »). Ce niveau de flexibilité cognitive est un enjeu d'apprentissage qui reste ainsi difficile à cerner pour l'étudiant, donc facteur de rupture. Il y a finalement peu de questionnements critiques et de problématisations au sein des exercices proposés, alors que certains de ces exercices seraient pourtant, de ce point de vue, riches de potentialités. Cela contribue aussi, selon nous, à diminuer la lisibilité des enjeux au niveau du DEUG A.

Le nécessaire travail visant à rendre *« routinières »* certaines tâches est rendu possible dans la plupart des environnements observés par la présence de suites d'exercices répétitifs, mais il concerne essentiellement les tâches de nature algorithmique. De plus, ces suites d'exercices ne font pas l'objet de scénarios particuliers, comme c'est le cas dans les manuels de lycée, avec sollicitation progressive d'autonomie. On remarque que les tâches plus conceptuelles, mettant par exemple en jeu un certain degré de généralité, ne donnent pas lieu, à des canevas d'aides à la résolution très directifs (comme au lycée), qui sont sans doute à considérer comme antinomiques avec les attentes institutionnelles nouvelles, en termes de réflexion et d'autonomie personnelles. Mais des aides à la résolution pertinentes, conservant à de tels types de tâches tout leur intérêt, semblent aussi plus difficiles à imaginer. De « bons » scénarios restent donc à concevoir, pour une meilleure gestion de la transition institutionnelle.

Au delà de quelques pratiques faisant office de « jalons » à l'enseignement de l'Analyse, emblématiques des contenus spécifiques à la première année de DEUG A (appliquer le théorème de Rolle à telle fonction, effectuer un développement limité,... etc.), ces feuilles de travaux dirigés mettent surtout en relief la nécessité d'un apprentissage *à divers niveaux* (algorithmique, formel, qualitatif...) requérant un dispositif technique à multiples facettes, pour lequel les fiches de l'université de Lille nous donnent quelques pistes.

Résultats tirés de l'analyse des productions des étudiants aux tests :

L'analyse des résultats des tests de septembre proposés aux étudiants entrant à l'université de Marne la Vallée a confirmé et permis de caractériser, au niveau des rapports personnels à la dérivée, une interprétation en termes de changement de culture institutionnelle des problèmes liés à la transition terminale S / DEUG A. Les exercices proposés dans ces tests nécessitent des changements de cadres, des inférences graphiques, induisent un rapport nouveau au traitement formel, aux objets, sollicitent une attitude critique, une distanciation par rapport aux connaissances, aux moyens d'investigation habituels, ils mettent en jeu des conjectures, un monde fonctionnel nouveau,... etc.

Au niveau formel, on observe chez ces étudiants des tentatives diversifiées *d'adaptation* à des tâches *complexes*, de mécanismes rendus routiniers au lycée, applicables à des cas simples. Ainsi, la continuité et la dérivabilité en un point ne sont pas toujours traduites en termes de limites, mais souvent par des conditions « de raccordement », variables selon l'exercice, par exemple du type : $f_1(0) = f_2(0)$, $f_1'(0) = f_2'(0)$ (ou $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$ dans l'exercice 2 du test de 1996), leur permettant une approche opérationnelle efficace dans leur champ d'expérience (dérivation formelle). Mais ces tentatives d'adaptation de fonctionnements standardisés découlent aussi de *stratégies d'évitement* de difficultés techniques ou conceptuelles liées à la complexité des problèmes posés. En effet, le calcul d'une limite de taux d'accroissement, par exemple, est pour eux souvent source de difficultés techniques importantes (factorisations, simplifications,...), et les étudiants préfèrent avoir recours au calcul formel de dérivées, sans toutefois contrôler la validité de cette substitution. Les productions des étudiants nous confirment d'ailleurs que certaines notions au programme de première et de terminale S, telles que les différentes définitions de la dérivabilité d'une fonction en un point (notamment celle par limite du taux d'accroissement) ont davantage un statut *culturel* qu'*opérationnel* à ce niveau d'apprentissage, ce qui induit des problèmes de nature écologique.

Des critères se constituent chez les étudiants, en lien avec les notions, les énoncés, et le champ d'expérience ordinaires du lycée, conduisant à des erreurs lors d'exercices plus originaux tels que ceux proposés dans ces tests. Par exemple, considérer qu'il y a dérivabilité en tout point où l'on peut dériver formellement l'expression de la fonction fournit un critère très opératoire qui peut favoriser l'amalgame entre domaine de définition et domaine de dérivabilité d'une fonction. De même, l'évocation de la notion d'extremum local dans le seul cas de fonctions usuelles régulières, partout dérivables, en lien avec la construction de leur tableau de variations, favorise l'amalgame entre présence d'un extremum local en un point et existence d'un nombre dérivé nul pour la fonction en ce point.

Concernant les questions ayant trait à la notion de continuité, connexe à celle de dérivabilité, mais assez marginale dans l'environnement du lycée, on constate que le comportement des étudiants est très dépendant du *contexte* proposé, avec des *amalgames* entre fonction définie et fonction continue, dont la cause est plus difficile à cerner que celle des amalgames entre fonction définie et fonction dérivable. On assiste souvent dans leurs productions à une gestion *séparée*, sans articulations, des problèmes relatifs aux concepts de continuité et dérivabilité, avec des conflits non relevés. La vérification de la cohérence est absente, en général, et le théorème selon lequel : *« toute fonction dérivable en un point est continue en ce point »* fait partie des connaissances mobilisables, mais non disponibles, tout comme l'icône de la fonction $x \rightarrow |x|$ (point anguleux). Le cadre graphique n'est pas spontanément exploité par les étudiants, dans ces tests, pour réaliser des inférences. Cadre graphique et cadre algébrique semblent avoir pour eux des fonctions séparées, et hors de toute sollicitation extérieure, ils n'effectuent pas d'eux-mêmes des aller-retour entre ces cadres. On assiste aussi à des interprétations graphiques simplistes, ne « décollant » pas de l'observation naïve qui suffisait encore au lycée pour effectuer les tâches sollicitées.

L'analyse des réponses fournies à différentes questions de ces tests (conjectures, notamment) montre clairement qu'un rapport idoine à la généralité et à la démarche de preuve reste à construire en DEUG Sciences, chez la plupart des étudiants. On peut en effet constater des difficultés à généraliser une situation de contre-exemple, difficultés induisant une conception du type : *« exemple qui confirme la règle »* en conflit avec un tel rapport à la généralité. Il y a aussi des confusions entre cas général et cas particulier, des généralisations abusives (par exemple : *« toute fonction comportant des valeurs absolues est non dérivable en certains points de l'ensemble de définition »*). Au niveau de la démonstration, ce n'est pas toujours l'argument décisif qui est recherché, les étudiants tentant parfois d'accumuler des arguments allant, selon eux, dans le même sens. Il semble qu'une représentation des Mathématiques comme discipline *non problématique* s'impose ici, en lien avec le rapport au savoir construit au lycée : on trouve des réponses très « consensuelles », des conflits sont minimisés (voire non relevés), notamment par évocation « d'incertitudes de lecture » (exercice 3 du test de 1996), il y a peu de critiques et de remises en cause, même lorsque l'énoncé les sollicite. La fonction de vérification ne semble pas comprise et intégrée au sein des solutions proposées. L'habitude de n'être confronté pratiquement qu'à des situations très régulières semble être la cause chez les étudiants de certains théorèmes en acte du type *« conservation de propriétés par passage à la dérivée »* ou *« intégration illicites de résultats de limites »*, rencontrés dans leurs productions. Cependant, ces tests nous ont aussi permis de constater que les connaissances des étudiants au sortir du lycée, et leur familiarité à certaines pratiques, demeurent propres à la négociation d'enjeux nouveaux. Leurs tentatives d'adaptation de leur culture aux situations qui leur ont été soumises, bien que souvent maladroites, nous montrent en effet la possibilité de problématiser le besoin d'une évolution du rapport aux concepts et de mettre en place une opérationnalité nouvelle. Cela, d'autant que certains étudiants ont vraiment pu s'engager, lors de ces tests, dans des démarches de recherche, et trouver, à partir de leurs seules références du lycée, des modèles, qui démontrent, au delà de leur pertinence (assez variable) dans les contextes proposés, des prises d'initiative et des tentatives d'appropriation personnelles intéressantes.

Bilan des ateliers, gestion des ruptures.

L'expérimentation des deux ateliers a aidé à pointer plus précisément un certain nombre de microruptures d'ordres technique et conceptuel, supposées ou ignorées, et les problèmes liés à leur gestion par l'enseignant. Ces ateliers, par leur interactivité, ont permis de faire travailler aux étudiants des démarches, des modes de fonctionnement (par ajustements successifs, mise en œuvre flexible de moyens variés : langue naturelle, démarche formelle, recours au graphique,... etc.) rarement facilités dans d'autres formules de questionnements. Des difficultés qualitatives sous-jacentes à l'activité mathématique au niveau du supérieur ont été ainsi dévoilées, mettant en lumière un vide institutionnel largement indépendant des contenus (accès à des problématiques générales, maniement d'un certain formalisme, travail sur des fonctions paramétrées,... etc.).

La gestion de ces ateliers, susceptibles d'engendrer des débats de toutes natures, souvent imprévisibles, nous a posé la question des choix à effectuer par l'enseignant, dans l'instant, afin de faire bon usage du temps imparti. Nos interventions ont ainsi largement contribué à orienter le travail du groupe, que nous avons décidé, selon les enjeux en présence, de piloter de plus ou moins près. Nous avons, par exemple, dû juger de la proximité, plus ou moins grande, d'une polémique ouverte, par rapport au thème de l'atelier, de sa pertinence vis à vis des objectifs visés dans cet atelier, qui faisaient que cette polémique méritait, ou non, qu'on la laisse se développer. Nous avons pu mesurer la difficulté qu'il y a, en même temps, à ne pas se montrer trop directif avec les étudiants, afin de favoriser chez eux le développement d'une plus grande flexibilité cognitive. Le déroulement des deux ateliers, bien souvent, n'a pas du tout été linéaire (et ne devait pas l'être, selon nous), certaines questions ayant juste été survolées, quand d'autres étaient approfondies. Multiplier les expérimentations a permis de réduire sensiblement la part d'imprévu dans le déroulement des ateliers et les interventions des étudiants, car certaines régularités ont pu être observées d'un groupe à l'autre. Cependant, on a aussi constaté que de légères modifications du questionnement pouvaient aboutir à des différences sensibles dans le comportement des étudiants.

Les principaux problèmes de dévolution ont été posés par le premier atelier sur les différentes définitions de la dérivabilité en un point : compréhension de la tâche, intégration du travail formel aux raisonnements, prise de conscience de ce qui sépare un argument fondé sur une vague intuition, de la preuve rigoureuse attendue. Le second atelier, démarrant sur l'étude d'exemples, s'est avéré d'une dévolution plus aisée, mais il faut toutefois signaler quelques difficultés locales (liées à la nature ouverte et générale de certaines questions), au niveau des inférences graphiques et de leur rôle, de la prise de recul par rapport à l'activité produite, de la capacité à en « tirer une morale » (recherche de fonctions *« à croissance forte »*).

Concernant le détail du comportement des étudiants, observé lors de l'expérimentation de ces deux ateliers, on a retrouvé, au niveau formel, des formes d'adaptation à la complexité des situations proposées, du type de celles rencontrées dans les tests de septembre. Ainsi, la mise en forme des conditions pour qu'une fonction, définie par deux expressions différentes de part et d'autre de zéro, soit *« à croissance forte »* sur R, s'inspire de *modèles simplificateurs* liés au *champ d'opérationnalité* du lycée (conditions du type $f_1'(0) \leq f_2'(0)$, par exemple). Le premier atelier se caractérise par des difficultés spécifiques, notamment dans le passage de la langue naturelle à l'interprétation formelle (cas de l'assertion : *« $f(x)=g(x)$ au voisinage de x_0 »*), ou dans le passage à la limite pour un taux d'accroissement (le travail sur la dérivée symétrique n'est pas aussi aidé que dans le test de septembre 1996).

Le travail en petits groupes semble favoriser un recours plus spontané des étudiants au cadre graphique. Mais il s'accompagne toujours, six mois après l'entrée en DEUG, d'une relative naïveté dans l'interprétation de ce qui est observé (exemple : le « faux plat » de la courbe représentative de $x \rightarrow x^3$ est vu comme antinomique avec la stricte croissance de cette fonction sur R), de limitations dans ce que l'étudiant arrive à imaginer, liées au champ fonctionnel du lycée, et d'interférences avec certaines conceptions (de la tangente, notamment). Le travail dans le cadre graphique est ici d'une nature très différente de celui qui peut être sollicité au lycée, ce qui occasionne des difficultés particulières pour les étudiants (voir par exemple l'interprétation du taux : $\alpha_0(x) = (f(x)-f(0))/x$, en termes de pente, et son utilisation).

Le rapport à la démonstration, mais surtout à la généralité, nous a semblé *en évolution* par rapport à ce que l'on a pu observer dans les tests de septembre. Les étudiants « rentrent dans le jeu », font beaucoup de propositions, souvent vraisemblables, lors des deux ateliers, et c'est surtout le travail de validation ou de rejet de ces dernières qui s'avère problématique. Certaines techniques, parfois élémentaires, leur manquent (étude du signe de x^3-y^3 pour $x< y$, dérivations multiples pour étudier le signe d'une quantité,... etc.), mais les démonstrations générales s'accompagnent aussi de difficultés nouvelles, très spécifiques (exemples : calcul de la dérivée de $x \rightarrow \varphi(x) = f(x)-f(0)$, respect des conditions précises d'application d'un résultat). Ils sont souvent capables d'utiliser leur *culture du lycée* pour citer des exemples, et leurs difficultés dans ce domaine sont liées à la construction d'un contre-exemple lorsque les cas les plus courants ne mettent pas en défaut une propriété. Le travail sollicité sur des fonctions paramétrées (second atelier) est apparu comme susceptible de permettre des médiations à partir de cette culture du lycée, car il met en jeu des fonctions usuelles et fait apparaître des *variables didactiques* utilisables pour faciliter une évolution du comportement des étudiants. Le recours, là encore, à des modèles simplificateurs non idoines (par exemple : *« la fonction $x \rightarrow A.\ln |x-a|$ est toujours à croissance lente »*) reste à surveiller de près, comme dans le premier atelier (exemple : interprétation graphique de l'égalité $\lim_{x \to x_0} f(x)-g(x) = 0$), mais il participe d'un travail d'intégration, d'assimilation des connaissances qui, en soi, est positif.

Au niveau du raisonnement proprement dit, une certaine flexibilité entre démarche formelle et recherche d'un contre-exemple, selon l'objectif visé, reste en partie à construire. Par ailleurs, le premier des deux ateliers a montré encore des difficultés chez les étudiants pour distinguer, dans l'action, « condition nécessaire » et « condition suffisante ». L'implication personnelle des étudiants dans le travail de recherche, en dépit de certaines insuffisances au niveau des moyens (techniques mais aussi théoriques) et des nombreuses difficultés présentées par les deux ateliers, constitue cependant un signe d'évolution très favorable, sur lequel nous ne saurions trop insister.

Différentes pistes ont été précisées au terme de ces ateliers, en vue de leur reconstruction et des prolongements utiles que l'on peut leur donner, suite aux premières expérimentations, qui nous ont permis une plus juste évaluation des compétences requises par ces ateliers et l'établissement d'un « cahier des charges » en conséquence. Le premier atelier, sur les différentes définitions de la dérivabilité en un point, nécessite selon nous des allégements au niveau de la forme (présentation générale) comme du fond (items proposés), de façon à mieux faire ressortir le fil directeur de la tâche en resserrant le travail sur un nombre plus faible d'objectifs. Des aides à la résolutions plus pertinentes, fruit de l'expérience des premières expérimentations, doivent aussi permettre d'obtenir une meilleure fluidité du déroulement de l'atelier, et de ménager à son terme le temps d'une synthèse collective de vingt minutes. Le second atelier mérite, quant à lui, quelques légères *adaptations* visant une mise en rapport implicite des différentes sources d'information (interprétations graphiques, critères opératoires, exemples), la facilitation des changements de cadres requis, et une amélioration des médiations apportées par l'énoncé (par exemple, au niveau de la recherche qualitative d'exemples ou de l'utilisation d'une fonction auxiliaire). L'expression de *« fonction à croissance forte »*, qui s'est avérée inadaptée à une description exacte de la classe de fonction envisagée, doit être proscrite dans une version future de ce second atelier.

Suite aux expérimentations, l'institutionnalisation de certaines notions rencontrées (par exemple celle de *« propriété vérifiée au voisinage d'un point* x_0 *»*), un bilan des débats ayant eu lieu, des erreurs commises, des résultats obtenus, des méthodes qui se sont dégagées, pourraient être menés par l'enseignant. Mais on peut aussi prévoir d'impliquer davantage l'étudiant dans ce projet, en lui soumettant un travail écrit de synthèse. Situer les propriétés obtenues par rapport à celles vues en cours sur la convexité (position relative entre courbe et tangente), en démontrer d'autres (position relative entre courbe et corde) constituent des prolongements envisageables et intéressants au second atelier.

Prolongements et perspectives :

Au terme de cette thèse, il convient de souligner que cette question de la transition entre lycée et université en Analyse est évidemment bien loin d'être épuisée, d'autant que les réformes des programmes de lycée, qui se succèdent à un rythme de plus en plus échevelé, peuvent induire de nouvelles donnes pour l'apprentissage, nécessitant des adaptations rapides, que le système universitaire, dans son désir de conserver son identité culturelle, est parfois rétif à assumer. Déjà, la notion (connexe à celle de dérivabilité) de continuité en un point n'est plus présente au sein du nouveau programme de terminale S, datant de 1998. Ce fait, à lui seul, induit de nouvelles restrictions du point de vue des tâches désormais accessibles au niveau du lycée, ce dont l'enseignement post bac doit tenir compte.

D'autres questionnements écrits, d'autres ateliers ont aussi été envisagés pour cette thèse, et n'ont pas pu être exploités par manque de temps, ou parce qu'ils induisaient des difficultés trop élevées pour des néo-bacheliers (cas des tests écrits), ou se sont avérés, à l'occasion de préexpérimentations, encore un peu trop délicats à gérer, faute d'une réflexion suffisante de notre part au niveau du scénario proposé (cas des ateliers). L'un des ateliers non expérimentés avait pour but d'aider l'étudiant à désamalgamer deux notions, celle de *« limite du taux d'accroissement en un point x_0 »* et celle de *« limite de la fonction dérivée en ce même point »*. Disons en quelques mots.

Une telle distinction ne peut prendre sens, selon nous, au lycée, où l'environnement de fonctions sur lesquelles on travaille ordinairement, permet de confondre, en général, ces deux limites. Cet atelier tentait donc d'abord de problématiser la distinction entre ces termes à partir d'une étude d'exemples. Dans la seconde partie, on faisait étudier une conjecture assurant sous certaines conditions l'égalité des limites évoquées. Cet atelier posait ainsi la question des conditions de validité d'une pratique très opérationnelle, consistant à évaluer un nombre dérivé plutôt par la limite de la dérivée que par celle du taux d'accroissement. Ce n'est pas une problématique usuelle au lycée où l'on se place précisément dans cette optique de simple application des notions. Un tel atelier est susceptible, selon nous, de montrer aussi aux étudiants, que la rationalité mathématique se construit par des réajustements successifs, et non pas par le rejet pur et simple des modèles simplificateurs, lorsqu'ils sont mis en défaut.

Une enquête auprès d'enseignants de première et terminale S, visant à savoir quels exercices, au sein de divers manuels de lycée, sont réellement travaillés en classe, nous aurait permis d'affiner notre diagnostic des pratiques effectives de lycée. De même, nous aurions pu envisager de présenter à des enseignants de DEUG A première année, des tâches complexes susceptibles d'être proposées à ce niveau d'enseignement, afin de savoir dans quelles conditions ils les soumettraient aux étudiants, de quelles indications ils les assortiraient. Aucune de ces deux idées n'a été, à ce jour, mise en application, faute de temps, mais elles pourraient constituer un prolongement intéressant de cette thèse.

Précisons enfin que cette thèse a trouvé aussi un prolongement d'ordre pédagogique au niveau du tutorat de septembre, que nous dirigeons depuis trois ans à l'université de Marne la Vallée. Ce tutorat en Mathématiques et en Sciences Physiques, facultatif, proposé aux étudiants entrant en première année de DEUG A, officiellement pour un travail de révisions avant la rentrée, est assumé par quelques uns de leurs aînés, déjà titulaires d'une Licence ou d'une Maîtrise dans l'une de ces disciplines. Mais en Mathématiques, l'objectif est plutôt de montrer aux nouveaux étudiants, à travers des tâches se situant, selon nous, à la transition entre lycée et université, l'évolution à prévoir en DEUG A dans la complexité des tâches sollicitées, le degré d'autonomie nécessaire, les problématiques soulevées,... etc. En fait, la banque d'exercices est subdivisée en deux listes (exercices standards de terminale / exercices d'approfondissement), et d'une liste à l'autre, des associations entre deux exercices a priori similaires sont envisageables, ce qui facilite la comparaison entre les pratiques des deux institutions, comparaison que les tuteurs doivent orchestrer en faisant travailler ces nouveaux étudiants. Les intentions pédagogiques qui sont les nôtres, exercice par exercice, inspirées par ce principe, sont préalablement signalées aux tuteurs, oralement et par écrit.

BIBLIOGRAPHIE :

1) ARTAUD, M. (1997) : Introduction à l'approche écologique du didactique, l'écologie des organisations mathématiques et didactiques, *Actes de la neuvième école d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate, 101-139.

2) ARTIGUE, M. et GAUTHERON, V. (1983) : *Systèmes différentiels, étude graphique*, Cédic, Fernand Nathan.

3) ARTIGUE, M. & al. (1989) : *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire*, Rapport de recherche, IREM Paris 7.

4) ARTIGUE, M. (1990) : Epistémologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 10/2.3, 242-283.

5) ARTIGUE, M. (1991) : Analysis, in D.Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Press, 167-198.

6) ARTIGUE, M. (1993) : Enseignement de l'analyse et fonctions de référence, *Repères-Irem vol 11*, 115-139.

7) ARTIGUE, M. (1996a) : *Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994)*, in B.Belhoste et alii (eds), Les sciences au lycée, Un siècle de réforme des mathématiques et de la physique à l'étranger, 195-216, Vuibert.

8) ARTIGUE, M(1996b) : *L'enseignement des débuts de l'analyse, problèmes épistémologiques cognitifs et didactiques*, J.A Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de la Laguna, Tenerife, 27-53.

9) ARTIGUE, M.(1996c) : Teaching and Learning Elementary Analysis, in C.Alsina & al.(eds), *8th International Congress on Mathematical Education*, SAEM Thalès, 15-29.

10) ARTIGUE, M., DEFOUAD, B., DUPERIER, M., JUGE, G., LAGRANGE, J.B. (1997) : *L'intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée*, rapport de recherche, Equipe DIDIREM, IREM Paris 7.

11) ARTIGUE, M. (1998) : L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18.2, 231-261.

12) ASIALA, M., COTTRILL, J., DUBINSKY, Ed., SCHWINGENDORF, K.E. (1996) : The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative, préprint.

13) ASIALA, M., BROWN, A., DEVRIES, D.J., DUBINSKY, Ed., MATHEWS, D., THOMAS, K. (1996) : A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, *CBMS Issues in Mathematics Education, Volume 6*, 1-31.

14) AYMES, J., LACHAUD, M., VINTER, B. (1995) : *Parcours mathématiques pour le lycée*, CDDP Montauban, CRDP Midi-Pyrénées, Collection Savoir et Faire.

15) AYMES, J. (1996) : Bac : Passage ou rupture ? *La gazette des mathématiciens, n°70*, 3-28.

16) BERNARD, R., FAURE, C., NOGUES, M., NOUAZE, Y., TROUCHE, L. (1994) : *Des activités mathématiques en classes scientifiques (1S et TS)*, IREM de Montpellier, Université de Montpellier II.

17) BERNARD, R., FAURE, C., NOGUES, M., NOUAZE, Y., TROUCHE, L. (1995) : *Des fonctions et des graphes*, IREM de Montpellier, Université de Montpellier II.

18) BKOUCHE, R. (1996) : Point de vue sur l'enseignement de l'analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement, *Repères-Irem vol 24*, 67-76.

19) BOSCHET, F., BOUR, M.C., DORRA, F., ROBERT, A., ROBINET, J. (1984) : Exposé de synthèse sur les problèmes de l'enseignement de l'analyse, *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*, IREM Paris 7.

20) BOSCHET, F., ROBERT, A. (1984) : L'acquisition des premiers concepts de l'analyse sur R dans une section ordinaire de DEUG 1ère année, *Cahier de didactique des mathématiques n°7*, Irem Paris 7.

21) BROUSSEAU, G (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4.2, 164-198.

22) BROUSSEAU, G. (1986) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 33-116.

23) CASTELA, C. (1995) : Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures – un exemple concret : celui de la tangente, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 15.1, 7-47.

24) CHEVALLARD,Y. (1985) : *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

25) CHEVALLARD,Y.(1989) : Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, institutionnel, officiel, *Actes du séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, CNRS-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, 211-236.

26) CHEVALLARD,Y.(1992) : Concepts fondamentaux de la Didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 12.1, 73-112.

27) CHEVALLARD,Y. (1995) : La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique, in R.Noirfalise et M.J. Perrin (eds), *Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand, 83-122.

28) COMMISSION INTER-IREM Analyse (ed) (1981) : L'enseignement de l'analyse, IREM de Lyon.

29) COMMISSION INTER-IREM UNIVERSITE (ed) (1990) : *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année*, IREM de Lyon.

30) CONFREY, J., COSTA, S. (1996) : A critique of the selection of « mathematical objects » as a central metaphor for advanced mathematical thinking, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1, 139-168.

31) CORNU, B. (1983) : *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

32) CORNU, B. (1991) : Limits, in D.Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Press, 153-166.

33) DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J. (1986) : *Une histoire des mathématiques*, Routes et dédales, Points Sciences, S49, Le Seuil, Paris.

34) DELEDICQ, A. (1996) : Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui ? *Repères-Irem vol 24*, 79-99.

35) DIAS, M. (1998) : *Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Thèse de Doctorat, Université de Paris 7.

36) DORIER, J.L. (ed) (1997) : *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

37) DOUADY, R. (1986) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7.2, 5-31.

38) DOUADY, R. (1992) : Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères-Irem vol 6*, 132-158.

39) DOUADY, R. (1994) : Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères-Irem vol 15*, 37-61.

40) DUBINSKY, Ed. (1991) : Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D.Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, 95-123.

41) DUBINSKY, Ed. (1997) : A reaction to « A critique of the selection of mathematical objects as central metaphor for advanced mathematical thinking » by Confrey and Costa, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 2, n°1, 67-91.

42) DUBINSKY, Ed., YIPARAKI, O. (1998) : On Student Understanding of AE and EA Quantification, préprint, Université d'Atlanta, Géorgie.

43) DUPONT, P., VAST, N. (1999) : Les polynômes de Taylor : découvrons comment les construire et les utiliser efficacement, *Repères-Irem vol 33*, 115-126.

44) DUVAL, R. (1988) : Graphiques et équations : l'articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, vol 1, 235-253.

45) DUVAL, R. (1992) : Argumenter, Démontrer, Expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit X n°31*, 37-61.

46) DUVAL, R. (1993) : Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 5*, IREM de Strasbourg, 37-65.

47) DUVAL, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Paris.

48) GANDIT, M., MASSE-DEMONGEOT, M.C. (1996) : *Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée*, IREM de Grenoble.

49) GRENIER, D., LEGRAND, M., RICHARD, F. (1985) : Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année, *Cahier de didactique des mathématiques n°22*, IREM Paris 7.

50) HAUCHART, C., ROUCHE, N. (1987) : *Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse*, GEM, CIACO Ed, Louvain la Neuve.

51) HAUCHART, C., SCHNEIDER, M. (1996) : Une approche heuristique de l'analyse, groupe A.H.A, *Repères-Irem vol 25*, 35-62.

52) I.C.M.I (1997) : On the Teaching and Learning of Mathematics at University Level, Discussion Document, in M.Niss (ed), *ICMI Bulletin*, n°43, 3-13.

53) LAKATOS, I. (1984) : *Preuves et Réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique*, Hermann.

54) LANGEVIN, R. et alii. (ed) : *Quelques idées sur les mathématiques enseignées lors du premier cycle universitaire ou en classes préparatoires*, Rapport de la Commission Langevin (à paraître).

55) LAZET, D., OVAERT, J.L. (1981) : *Pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'analyse*, Bulletin Inter-IREM Analyse, IREM de Lyon.

56) LEGRAND, M. (1991) : Les compétences scientifiques des étudiants sont-elles indépendantes de la façon dont nous leur présentons la science ? *Gazette des Mathématiciens, supplément n°48*, Renouveler l'enseignement (premier cycle universitaire et classes préparatoires), 44-58.

57) LEGRAND, M. (1993) : Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse, *Repères-Irem n°10*, 123-159.

58) LEGRAND, M. (1995) : Mathématiques, mythe ou réalité : un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique, *Repères-Irem n°20 & 21*, 91-108 & 111-138.

59) LEGRAND, M. (1996) : A la recherche de la pierre philosophale pour enseigner l'analyse, *Repères-Irem vol 24*, 9-10.

60) LEGRAND, M. (1997) : La problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique, *Repères-Irem vol 27*, 81-125.

61) LOMBARDI, H. (1999) : A propos du théorème des accroissements finis, *Repères-Irem vol 34*, 55-69.

62) LUTZ, R., MAKHLOUF, A., MEYER, E. (1996) : L'enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : nécessité et fondement, *Repères-Irem vol 24*, 103-116.

63) MICHEL, P. (1996) : Tangente à une courbe et dérivation, *Repères-Irem vol 24*, 35-42.

64) PERRIN-GLORIAN, M.J. (1999) : La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ? *Repères-Irem vol 34*, 5-12.

65) POLYA, G. (1994) : *Comment poser et résoudre un problème*, Ed. Jacques Gabay.

66) PRASLON, F. (1994) : *Analyse de l'aspect méta dans un enseignement de DEUG A concernant le concept de dérivée et étude des effets sur l'apprentissage*, Mémoire de DEA, Université de Paris 7.

67) PRASLON, F. (1997) : Compte-rendu de l'atelier sur les différentes définitions de la dérivabilité en un point, *Actes de la neuvième école d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate, 267-271.

68) PRASLON, F. (1999) : Discontinuities regarding the secondary/university transition : the notion of derivative as a specific case, *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group P.M.E*, vol 4, 73-80.

69) ROBERT, A. (1982) : *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*, Thèse d'Etat, Université de Paris VII.

70) ROBERT, A., HOUARD, C., QUATREVILLE, M. (1984) : Rapports entre enseignement et apprentissage (débuts de l'analyse sur R), *Cahiers de didactique des mathématiques n° 18.0, 18.1, 18.2 & 18.3,* IREM Paris 7.

71) ROBERT, A., ROGALSKI, J., SAMURCAY, R. (1987) : Enseigner des méthodes, *Cahier de Didactique des Mathématiques, n°38*, IREM Paris 7.

72) ROBERT, A., TENAUD, I. (1989) : Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9.1, 31-70.

73) ROBERT, A., ROBINET, J. (1996) : Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 16.2, 145-176.

74) ROBERT, A. (1998) : Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18.2, 139-189.

75) ROGALSKI, M. (1994) : Les concepts de l'E.I.A.O sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en Analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 14.1.2, 43-66.

76) ROGALSKI, M. (1996) : Le nouveau public en sciences : quels choix stratégiques ? *Gazette de la SMF n°69*, 13-43.

77) ROGALSKI, M. (1998) : Analyse épistémologique et didactique des connaissances à enseigner à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18.2, Editions La pensée sauvage, Grenoble, 135-137.

78) SCHNEIDER, M. (1988) : *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul de primitives*, Thèse de doctorat, Louvain la neuve.

79) SCHNEIDER, M. (1991a) : Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides, *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 11.2/3, 241-294.

80) SCHNEIDER, M. (1991b) : Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repères-Irem vol 5*, 65-81.

81) SCHNEIDER, M. (1992) : A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané, *Educational Studies in Mathematics*, vol.23, 317-350.

82) SCHOENFELD, A.H. (1985) : *Mathematical problem solving*, Academic Press, Orlando, FL.

83) SCHOENFELD, A.H. (1992) : Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, in D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning*, MacMillan, New York, 334-370.

84) SFARD, A.(1991) : On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objets as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22(1),1-36

85) SIERPINSKA, A. (1985) : Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 6.1, 5-67.

86) TALL, D., VINNER, S. (1981) : Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, vol 12, 151-169.

87) TALL, D. (ed) (1991) : *Advanced Mathematical Thinking*, Cambridge (U.K.) : Kluwer Academic Publishers.

88) TALL, D. (1994) : A versatile theory of visualisation and symbolisation in mathematics, *Invited plenary lecture at the CIAEM Conference*, Tome I, IREM de Toulouse, 15-26.

89) TALL, D. (1996) : Functions and Calculus, in A.J.Bishop et al (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Kluwer Academic Publisher.

90) TENAUD, I. (1991) : *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthodes de travail en petits groupes*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

91) TROUCHE, L. (1994) : Calculatrices graphiques, la grande illusion, *Repères Irem vol 14*, 39-55.

92) TROUCHE, L. (1996a) : Masques, *Repères Irem vol 23*, 43-64.

93) TROUCHE, L. (1996b) : *Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II.

94) TROUCHE, L. (1999) : Variations sur la dérivation. *Repères Irem vol 34*, 111-126.

95) VERGNAUD, G. (1990) : La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 10.2.3, 133-170.

96) VINNER, S. (1983) : Concept definition, concept image and the notion of function, *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14.3, 293-305.

<u>Programmes et manuels scolaires de lycée</u> :

97) Bulletin Officiel n°7 de l'Education Nationale, du 7 juillet 1994.

98) Bulletin Officiel n°4 de l'Education Nationale, du 12 juin 1997.

99) ANNA BAC 95 (1994) : sujets corrigés, mathématiques S, Hatier, Paris.

100) ANNALES BAC 96 (1995) : Maths, obligatoire et spécialité S, corrigés, Les sujets Nathan, Nathan, Paris.

101) ANNALES BAC 97 (1996) : Maths, série S, corrigés, Vuibert, Paris.

102) ANTIBI, A. et alii.(1994) : Math, Terminale S, enseignement obligatoire, Collection Nouveau Transmath, Nathan, Paris.

103) ANTIBI, A. et alii.(1995) : Math, 1ère S, Collection Nouveau Transmath, Nathan, Paris.

104) BONTEMPS, G. et alii (1994) : Mathématiques, Terminale S, enseignement obligatoire, Collection Fractale, Bordas, Paris.

105) BONTEMPS, G. et alii (1994) : Mathématiques, Terminale S, enseignement de spécialité, Collection Fractale, Bordas, Paris.

106) BONTEMPS, G. et alii (1995) : Mathématiques, Analyse, 1ère S, Collection Nouveau Fractale avec modules, Bordas, Paris.

107) FERACHOGLOU, R., TERRACHER, P.H. (1994) : Math, Terminale S, enseignement obligatoire, Collection Terracher, Hachette Education, Paris.

108) FERACHOGLOU, R., TERRACHER, P.H. (1995) : Math, analyse, 1ère S, Collection Terracher, Hachette Education, Paris.

109) RODRIGUE, D. et alii (1995) : Mathématiques, Première S, Collection Déclic, Hachette Education, Paris.

110) RODRIGUE, D. et alii (1996) : Mathématiques, Terminale S, Enseignement obligatoire, Collection Déclic, Hachette Education, Paris.

Manuels de DEUG A (première année) :

111) AULIAC, G., AVIGNANT, J., AZOULAY, E. (1996) : Mathématiques, DEUG Sciences, 1ère année, Cours et Exercices résolus, 2ème édition, Tomes 1 & 2, Ediscience international.

112) JEREMY, L., MINEAU, P., THIENARD, J.C. (1997) : Analyse 1 & 2, Précis de cours et 250 exercices gradués et corrigés, Premiers cycles de l'enseignement supérieur scientifique, Première année, Collection « Les sciences en fac », Vuibert.

113) LIRET, F., MARTINAIS, D. (1997) : Cours de mathématiques, Analyse 1ère année, Cours et exercices avec solutions, DEUG MIAS, MASS et SM, Dunod, Paris.

114) PILIBOSSIAN, P. et alii. (1998) : MATHS DEUG, Analyse 1, Suites numériques, Fonctions d'une variable réelle, Développements limités, Collection Ellipses.

Manuel d'enseignement scientifique supérieur (college) aux Etats-Unis :

115) FINNEY, T., DEMANA, W. (1994) : Calculus, Graphical, Numerical, Algebraic, Addison Wesley Publishing Company.

Polycopié de Cours de DEUG A (première année) :

116) HINDRY, M. (1995) : MT141, Techniques mathématiques de base, algèbre et analyse élémentaires, sections A et D, Année Universitaire 1995/1996, Département de formation de 1er cycle de Sciences Exactes, Université Paris 7, Denis Diderot.

Polycopiés et feuilles de travaux dirigés de DEUG A (première année) :

117) CLINARD, M. : Feuilles d'exercices de Mathématiques des années 1995/1996, 1996/1997, 1997/1998, U.F.R Sciences, DEUG A1 (1ère année), Université d'Orléans.

118) COUSQUER, E., SACRE, C. et alii. (Octobre 1997) : Jeu de fiches pédagogiques et logiciels de TP de mathématiques, Deug A1, U.F.R de Mathématiques Pures et Appliquées, USTL Flandres Artois, Villeneuve d'Ascq.

119) DEUG A, 1ère année : Feuilles d'exercices de Mathématiques 1995/1996, Devoirs à la maison et sujets d'examen 1994/1995, 1995/1996, 1996/1997, MT 141, Université Denis Diderot Paris 7.

120) DEUG A1 - Module M1 (1997) : Exercices de Mathématiques, Année 1997/98, Université de Nantes, Faculté des Sciences et Techniques, Département de Mathématiques, IREM des Pays de la Loire, Imprimeur et distributeur : ASSO.

121) DEUG A1- Module M2, Mathématiques, MIAS (1997) : Recueil d'exercices, Année 1997/98, Université de Nantes, Faculté des Sciences et Techniques, Département de Mathématiques, IREM des Pays de la Loire, Centre de Nantes, Imprimeur et distributeur : ASSO.

122) DURAND-GUERRIER, V. (1997) : Fiches de travaux dirigés, Deug 1ère année, Module A, Mathématiques, Année 1997/1998, Centre Scientifique Joseph Fourier, Valence.

123) PRASLON, F. (1998) : Travaux dirigés de Mathématiques, Deug Sciences-Module S1, Année 1998-1999, Université de Marne-la-Vallée.

124) UPS, Centre d'Orsay, Mathématiques : Feuilles d'exercices de Mathématiques de l'année 1996/1997, DEUG A, Module M0, MIAS S2, Université d'Orsay.

TABLE DES MATIERES :

ANNEXES :

ANNEXE 1

Extraits du B.O du 7/7/1994

Dans les objectifs généraux... (P47)

7. Formation scientifique

Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en oeuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé, ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique. Dans ce contexte, la clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs importants. Cependant la maîtrise du raisonnement et du langage mathématique doit être placée dans une perspective de **progression. On se gardera donc de toute formalisation excessive**, aussi bien pour les énoncés que pour les démonstrations. En particulier, le **vocabulaire** et les **notations** ne sont pas imposés a priori ; ils s'introduisent en cours d'étude selon un critère d'utilité.

8. Raisonnement, vocabulaire et notations

On entraînera les élèves à la **pratique** des modes usuels de **raisonnement** ; équivalence logique, implication, contraposition... Les élèves doivent connaître et peuvent utiliser les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$, mais il convient d'éviter tout recours systématique à ces symboles. **Tout exposé de logique mathématique est exclu.**

L'étude de certaines situations peut comporter un **raisonnement par récurrence**. En classe de Première, on se bornera à des cas très simples et aucune capacité n'est exigible des élèves dans ce domaine ; en Terminale S, on amènera les élèves à conduire et à rédiger des raisonnements par récurrence (passage de n à n +1, passage de 1, 2..., n à n+1,...). On évitera la mise en forme de récurrences dans les cas évidents et on s'abstiendra de toute considération théorique sur le principe de récurrence.

Enfin, on aura le souci de se limiter à un vocabulaire modeste et à quelques notations simples. A ce qui figure au programme de Seconde s'ajoutent en Première, outre les notations indiquées dans les différents chapitres, le complémentaire d'une partie (noté CA ou $\overline{A}$), la notion d'application d'un ensemble dans un autre, de composée de deux applications (notée $g \circ f$), de bijection d'un ensemble sur un autre et de bijection réciproque (notée f^{-1}). La notion de bijection est introduite à propos de l'étude des transformations (translations, symétries...) et des équations de la forme $f(x) = \lambda$. En revanche, même en Terminale, les notions d'injection et de surjection sont hors programme, et tout développement sur le vocabulaire des ensembles et des applications est exclu.

Début du programme d'Analyse (P 49)

1. Fonctions numériques : étude locale et globale

Pour l'étude des fonctions, on s'appuiera conjointement sur les interprétations **graphiques** $y = f(x)$, **cinématiques** $x = f(t)$, **électriques** (signaux relatifs à l'évolution d'une intensité, d'une différence de potentiel...) et **biologiques** (évolution d'une population, d'un taux de concentration,...).

Le programme se place dans le cadre des **fonctions définies sur un intervalle.** Pour l'essentiel, il porte sur le cas des **fonctions bien régulières** sur cet intervalle (c'est-à-dire possédant des dérivées jusqu'à un ordre suffisant), ce qui permet d'exploiter les outils du calcul différentiel. Quelques énoncés sur les **limites** figurent au programme : ils ne constituent pas un objectif en soi, mais visent uniquement à faciliter, le cas échéant, l'étude du **comportement aux bornes de l'intervalle** et notamment du comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$. Il n'y a pas lieu de multiplier les exemples posés a priori et on se gardera de tout excès de technicité. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles ; on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ces intervalles. Le plus souvent, l'ensemble de définition sera indiqué ; **on évitera les exercices de recherche a priori de cet ensemble.** L'étude de singularités (points de discontinuité, points anguleux...) n'est pas un objectif du programme.

La **continuité sur un intervalle** est introduite dans le seul but de fournir un langage efficace pour l'énoncé et l'emploi de quelques théorèmes usuels ; on se bornera à l'étude de situations où les énoncés du programme suffisent pour établir simplement la continuité des fonctions mises en jeu.

Pour la **notion de limite**, le point de vue adopté reste le même qu'en Première. Les définitions par (ε,α), (ε,A),...sont hors programme.

A travers les exemples étudiés, on soulignera le **caractère local** de la notion de limite, mais tout exposé sur la notion de propriété locale est exclu.

a) Langage de la continuité

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.	Il convient d'interpréter graphiquement et numériquement les notions et les énoncés de ce paragraphe, afin d'éclairer leur signification.
Si f admet une limite en tout point de I on dit que f est continue sur I.	On rappelle que si une fonction f admet une limite en un point a de I, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

La continuité en un point, considérée isolément, ne doit pas faire l'objet d'une étude systématique. On donnera quelques exemples très simples de discontinuités de la fonction ou de sa dérivée, mais aucune connaissance n'est exigible des élèves à ce propos. La notion de continuité sur d'autres parties de $\mathbb{R}$ que les intervalles est hors programme.

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.	On observera que la conclusion de cet énoncé s'étend au cas d'une fonction définie sur un intervalle [a,b], dérivable sur]a,b], et admettant f(a) pour limite en a (ou dérivable sur [a,b[, et admettant f(b) pour limite en b).

Prolongement par continuité d'une fonction définie et continue sur]a,b] et admettant une limite en a (ou continue sur [a,b[et admettant une limite en b).

Les différents énoncés sur la continuité ne constituent pas un objectif en soi ; ils fournissent des jalons pour l'étude d'une fonction sur un intervalle : dérivabilité, limites aux bornes, continuité.

Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone (énoncé admis)

Lorsque l'intervalle considéré n'est pas un segment, les élèves doivent savoir déterminer les extrémités de l'intervalle image connaissant les limites de la fonction aux extrémités de son intervalle de définition.

b) Enoncés usuels sur les limites (admis)

Comparaison

-Si, pour x assez grand, $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; énoncé analogue lorsque $f(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$.

- Si, pour x assez grand, $|f(x) - L| \leq u(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

- Si, pour x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} v(x) = L$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

L'objectif est d'apprendre aux élèves à mettre en oeuvre, sur des exemples simples, ces énoncés et ceux donnés en Première concernant les opérations algébriques. Il n'y a pas lieu de s'attarder à leur présentation.

Compatibilité avec l'ordre :

Si, pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L'$, alors $L \leq L'$.

De manière générale, dans la plupart des situations de majorations et d'encadrements intervenant dans le programme d'analyse, les inégalités larges suffisent ; les inégalités strictes doivent être réservées aux cas où elles sont indispensables.

Limite d'une fonction composée :

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim_{y \to b} g(y) = \lambda$ (où a, b, λ sont finis ou non), alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lambda$.

Bien entendu, cet énoncé, condensé pour faciliter la mémoration, recouvre plusieurs cas qu'il convient de distinguer clairement et d'illustrer à l'aide d'exemples.

c) Calcul différentiel

Dérivation d'une fonction composée. Aplication à la dérivation de fonctions de la forme u^n, $n \in \mathbb{Z}$, exp u, ln u et u^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.	La démonstration de cette règle n'est pas au programme, mais on mettra en valeur l'idée fondamentale qui conduit au résultat: les termes d'ordre supérieur à 1 sont négligeables dans les calculs.
Dérivées successives ; notations f ', f '',...	En liaison avec les sciences physiques, on donnera aussi les notations $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \ldots$; la notion de différentielle est hors programme. On mettra en évidence la relation entre la monotonie de la dérivée et la position de la courbe par rapport aux tangentes ; mais aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur ces questions et notamment sur la convexité et les points d'inflexion.

Etude du sens de variation d'une fonction, recherche de son signe, recherche des extremums.	La résolution de certaines questions nécessite l'étude d'une fonction auxiliaire ; cette fonction doit alors être indiquée.
Recherche de la limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$.	

Exemples de recherche d'asymptotes ; exemples d'étude du comportement local ou asymptotique d'une fonction.	Pour l'étude des comportements asymptotiques en $+\infty$ (ou en $-\infty$), on exploitera la comparaison de la fonction donnée f à une fonction plus simple g telle que $\lim\limits_{+\infty} (f-g) = 0$;
Tracé de la courbe représentative d'une fonction.	en dehors du cas des asymptotes horizontales ou verticales, des indications doivent être fournies sur la forme de la fonction g à utiliser.
Lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique. Etude d'équations $f(x) = \lambda$ ou d'inéquations $f(x) \leq \lambda$.	Etant donné une fonction f strictement monotone sur I, et un élément α de I tel que $f(\alpha) = 0$, les élèves doivent savoir comparer α à un élément donné β de I en utilisant le signe $f(\beta)$.
Exemples d'étude de situations décrites au moyen de fonctions (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale...)	On s'attachera à interpréter les résultats (variations, signe, extremums, comportement asymptotique,...). On étudiera quelques problèmes d'optimisation.
Programmation des termes d'une suite.	

Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique, et notamment d'approximations d'un point fixe d'une fonction f à l'aide d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.	On pourra, sur des exemples, explorer et itérer quelques méthodes (dichotomie, tangente, interpolation linéaire...) mais aucune connaissance sur ces méthodes n'est exigible des élèves . Dans le cas de l'approximation d'un point fixe α de f, on soulignera l'intérêt (théorique et numérique) d'une inégalité $\vert f(x) - \alpha \vert \leq k \vert x - \alpha\vert$, où $k < 1$; en outre , l'étude de la suite (u_n) devra comporter des indications sur la méthode à suivre.

P 52

Inégalité des accroissements finis : étant donné une fonction f dérivable sur un segment [a,b], - Si $m \leq f' \leq M$ et si $a \leq b$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$; - Si $\vert f'\vert \leq M$, alors $\vert f(b) - f(a)\vert \leq M\vert b-a\vert$.	Ces résultats sont déduits de l'énoncé admis en classe de Première sur le sens de variation des fonctions. Le théorème de Rolle et la formule $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$ sont en dehors du programme.
Primitives d'une fonction continue sur un intervalle :	
Définition. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.	L'existence des primitives est admise.

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les travaux pratiques suivants ne sont au programme que de l'enseignement de spécialité.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi de majorations et d'encadrements d'une fonction par des fonctions plus simples (recherche de valeurs approchées en un point, recherche de limites...). Exemples d'emploi d'inégalités sur les dérivées pour l'obtention de telles majorations.	*Pour tous les problèmes de majoration, d'encadrement et d'approximation des fonctions, des indications doivent être données sur la méthode à suivre. L'exploitation, sur des exemples simples tels que e^x, $\ln(1+x)$, sin x, du théorème sur le sens de variation, appliqué aux dérivées d'ordre convenable d'une fonction auxiliaire, constitue un outil intéressant. Cependant aucun énoncé sur les majorations tayloriennes n'est au programme, et il n'y a pas de catalogue de situations classiques à mémoriser.*

ANNEXE 2

STRUCTURE GÉNÉRALE DES CHAPITRES DES OUVRAGES DE 1ère S ET TS : COLLECTION "DÉCLIC" (HACHETTE EDUCATION)

- En 1ère S, chapitres concernés : 6. Dérivation ; 7. Applications de la dérivation
- En TS : 6. Calcul différentiel ; 7. Fonction Log ; 8. Fonctions expo - Puissance ; 9. Eq diff

Tests préliminaires

- exos élémentaires et courts pour vérifier l'outillage préalable au chapitre.
- liste des notions à maîtriser en rapport à ces exercices / références aux techniques et aux chapitres antérieurs à consulter sur ces notions.

(# 3 ; 1 page)

[Rubrique "pour vous aider"]

Activités préparatoires

- exercices dont l'énoncé est souvent assez long, permettant de problématiser des concepts, de donner du sens ou d'annoncer des théorèmes ou des propriétés.

(# 2-3 ; 2-3 pages)

COURS

- très peu de démonstrations, certaines rejetées en exercices (2-3)
- beaucoup d'exemples, de schémas, de tableaux ...
- référence effectuée dans la marge aux TP, activités, tests, exercices... correspondants aux éléments de ce cours

(environ 5-6 pages)

utilisATIONS

- Exercices corrigés avec des encarts "méthode" (niveau "technologie") en plusieurs points, précisant localement la démarche à suivre dans ce type d'exercices (# 3 ; 3 pages)

Travaux Pratiques

- énoncés à thèmes, souvent assez longs, pas de corrigé.

(# 3-5 ; 3-4 pages)

Savoir-faire | Tests

- tableau présentant des types de tâches, les moyens éventuels correspondants pour les effectuer, les références à consulter dans le chapitre (cours, TP...), correspondantes.
- tests sous formes d'exercices élémentaires permettant de mettre à l'épreuve la compréhension du tableau

(1 page ; 1 dizaine de tests)

Problèmes ← **EXERCICES**

(# 15-30 ; 5-9 pages)

(7-9 pages ; 40-65 exercices dont 1 à 5 consacrés à des démonstrations de cours)

EXERCICES ET PROBLÈMES POST-COURS

LA DÉRIVÉE : CLASSIFICATION PAR TY

FD : Fonction dérivée ND : nombre dérivé IG : interp

ÉLÉMENTS D'ANALYSE → / THÈMES ↓	Sortes et nombres d'exercices	Sous-tâches graphiques : Explicites / Implicites – tracés (tangentes, courbes, autres droites) – lecture nbre dérivé, dérivabilité, justifications... – associations Cf / Cf' – interp. graphiques.. (IG) [papier quadrillé (P.Qd) ou non (SPQ)]	(C) Calculs : explicitement sollicit / implicitement sollic / réponse fournie (Rubriques : ND, FD, Eq.Tg, App.Aff., Tau cond y coeff, Df, maj, Tr. Al
Nombre dérivé	Test : [4,1] Exo : [4,3]	Exo : lire des nombres dérivés sur des tracés sur P.Qd avec tangentes : RQ (16) Ex : IG (tgte // corde au pt médian ; parabole $x \to x^2$) : 1	Test : F.D ou App.Aff. ou lim(Taux) Exo : F.D ou lim(Taux) au choix
Etude de la dérivabilité	TP : [2,2] Test : [3,1] Exo : [7,3]	TP / Tracés : courbes (2), tgtes (2) [RQ], ½ tgtes (2) [RQ] Ex / Lire la dérivabilité sur P.Qd avec tgtes (6) [RQ] Ex / Tracé : courbe (1) Ex IG 2 (½ tgtes à g, à d)	TP : Taux (6) – C.dir (1) – lim (4) – FD (1) – FD (3) – Inéq (1) – Tr. alg (1) – Eq.Tg Test : App.Aff. ou lim (Taux) [3 IS, 3 R Ex : lim Taux (gauche / droite) : 5 ; App
Equations de tangentes (ou coeff directeur)	Test : [4,1] Exo : [11,5]	Ex / Lire éq. tgte sur P.Qd : 9 [RQ] Ex / Tracé détaillé (courbe + tgte) : 1 implicitt nécessaire Rep Graph (Explicit) : 1 ; IG 3 (pos courbe/tgte)...	Test : App Aff ou FD ou lim(Taux) (IS / RF) Ex : Géo An : 1 [IS] Aut : 2 [IS] ND : Inéq : 1 [ES], FD : 7 [IS], cond s/ tgte
Approximations affines	TP : [1,1] Test : [3,1] Ex : [3,2] Pb : [2,2]	Ex / Lire val. app de f(1+h) pour h≈0 : 3 [RQ] Pb / Tracé 3 courbes + 1 tangente	TP : AAff : 2 (RF), T.Alg : 2 (RF 1), Maj Ex : Aut : 1, T.Alg : 2, AN : 8, Maj : 1 [Pb : Géo : 1, lim : 2, Taux : 1, AA : 1, C.dir
Vitesses instantanées	Pb : [3,1]	∅	Pb : FD : 5 [RQ, IS] Questions de c... det f(t) sach... det rel (f(t), v(t)) :
Fonctions dérivées	DC : [4,1] Ex : [16,8]	Ex : Lire des nombres dérivés sur papier non quadrillé.	DC : Taux : 2 [ES] lim : 3 (ES) ND : 5 (IS) Ex : ND : 1 [IS, RF] lim : 1 [ES] Tr. FD (particul) : 44 + 1 [ES, RQ] Df : 38 +
Variations, Extrema	Test : [7,2] Ex : [19,9]	Ex / Lire variations sur P.Qd (avec tgtes) : 2 [RQ] Lire variat. sur P.N.Qd : 4 [RQ] ; tracer Cf à partir de Cf' : 4 [RQ] ; associer Cf / Cf' : 4 [RQ] 3 possib Lire abs. extremum : 4 [RQ] f dérivable en a ? f' = 0 et chg signe en a ? (P. Qd)	Test : FD 11 [IS] IN : 11 [IS] Ex : FD : 62 [IS], IN : 62 [IS] Df : 3 Ineq d° 2 par : 1 [IS] Synt : 1
Bijections, équations, dichotomie	TP : [1,1] Test : [6,4] DC : [1,1] Ex : [11,7] Ex (trigo) : [5,3]	TP : tracé de courbe : 1 Ex : Lire des images d'intervalles sur P.Qd : 8 Lire le caractère bijectif sur P.Qd : 6 Lire sur le cercle trigonométrique : 10 [RQ]	TP : FD 1 ; IN 1 ; VAR 1 ; ENC : 1 ; Trigo Tests : FD 4 [IS] ; Trigo : 2 ; Var 4 [IS] DC Ex : FD 27 [RQ / IS] Var : 27 [RQ / IS] Résol Eq trigo : 19 RQ (application de la dériv... mais plus de réf. explicit... (TRANSFERT))
Calculs de limites	Ex : [2,1]	∅	Ex : FD (4) ; lim (4) [RQ]
Etudes de fonctions	TP : [1,1] Ex : [8,3] Pb : [16,5]	TP : tracé courbe : 1 Ex : Trigo : reconnaître Rep de f(x) sur Rep graph (dériv : ∅) Ex : tracé Cf : 21 Pb : tracé courbe : 21, tracé tgtes : 17, asympt : 8 Rés. grapht f(x) = m, f(x) ≥ 0 : 4 ; Autres droites : 4 IG encadt fctionnel : 1 Identif. grapht tangente : 1 Justifier tracé de courbe : 2 (Cf1 : 1) Int. Grapht parité / périodicité RF : 1/6 Rep part : 3/6	TP : lim : 1 FD : 1 Var : 1 trigo : 4 [RQ] Ex : lim/bornes : 21 FD : 21 [IS] Var + tabl : Pb : Csym : 6 [RF] chgt repère : 2 [RF] pari FD : expl 9 (RF1) impl 8 Var : expl 12 impl 5 étude signe : 4 lim bor : 4 lim : 2 lim impl : 3 eq t.. pt... Re.. form can : 6 AS : 4/8 (RF) 1/8 (Rep Part) pos. rel Maj / min : 2 (Alg ; RF) calc Alg : 1 Eq 2nd d° : 1 par IS TAlg
Géométrie Analytique	TP : [1,1] Ex : [1,1] Pb : [6,5]	TP : construct. géom. implicite : 1 Pb : tracé : figures (4 courbes, 9 tangentes, 2 autres droites) : 3 [Expl] I.G : 1	TP : formule éq. tangte : 2 (RQ) Aut : 5(Ex : formule éq. tangte : 1 Autres : 2 (1 ES Pb : Eq 2nd d° 4 IS + 1 Synt : 3 (IS) formule éq pt ∩ : 14 (IS 10) Eq droites 3 IS + 2 ES d
Modélisation, problèmes concrets (éco, physique...)	TP : [1,1] Ex : [2,1] Pb : [3,3]	∅	TP : FD : 1 ND : 1 AA : 1 [IS] Aut [Géo – RF] Ex : (Dir : ∅ T.Alg : 3/10 [RF] AN : 4/10 [RQ]) condt sur fct. trigo Aut [Pb : AN : 5 T.Alg : 3 FD : 1 Géo : 2
Optimisation, problèmes concrets (éco, physique...)	TP : [2,2] Pb : [12,10]	TP : IG : 4 (pentes, courbe, corde) ; Tracé de courbe : 1 Pb : Tracé de courbes : 7 ; tangente 1 ; autres droite : 1, tracé asympt. : 2 Lecture val app f(x) = 0 sur courbe : 1 IG variations de f → pos rel courbe / tgte	TP : FD : 6 (IS) Var : 1 [IS] + 5 Géo 3 [R Pb : FD : 7 ES + 13 IS (RF : 1) Signe (FD) : 4 E Eq 2 ES + 2 IS Extr : 11 (ES) lim : 4 (ES) A Géo : 11 ES (RF 3 + R Part 1) Trigo 1 eq droite 1 Calc alg 15 (RF 4 + R Part Mod Éco 4 (RF 2) Calc num : 19

~~nombre~~
PES DE SOUS-TÂCHES

DÉCLIC 1ère S

(HACHETTE EDUCATION)

[m, n] : m ⟶ nombre d'exercices
n ⟶ nbre de types d'exos différents
DC : démonstration de cours
pm : présence de paramètres
RQ : répétition de questions
RF : réponse fournie

...ter graphiquement ; G : situat. génér^ale / P : situat. particul.

...s (ES) ou ∅ ...tés (IS) RF) ...x, Co.dir, lim, Eq. Inéq, Géo An ..., A.N, Autres...	Appliquer une définition T = technique M = Mobilisable D = Disponible (dérivée / autre) R = RAPPEL	Appliquer une propriété, un théorème (Θ) T = technique M = Mobilisable D = disponible (dérivée / autre) (Rubrique "Technologie")	Argumenter, Comparer des résultats, Démontrer, Identifier, Justifier, Formalisation : Introduire, Utiliser, Traduire Analytiquement Interpréter (Graphiquement) Contre Exemple à donner Discuter (pm) Utiliser...
au choix (IS, RF, 4) (IS, 4) ND : 1 (ES) Aut. 1 [E.S]	Déf Θsf : $5^T + R4^T$ (exo) (test)	Test : FD théo géné ^{T}(14) [RQ] ou AA^T(0-3) Exo : FD Théo géné ^{T}(0-4) [RQ] ou AA^T(0-2)	IG : 1 [G / RF] (tgte // corde au p^t médian pour la parabole $x \to x^2$...)
ND (2IS + 4ES) (2) [RQ] [ES] F] au choix Aff : 5 [IS, RQ]	TP : $1^T + 2^T$ [RQ] Test : 3^T Ex : 6^T[RQ] + 6^T[RQ]	TP / (Théo. dérivab : 3^T [RQ] Théo. FD : 4^T [RQ] Eq. tgte (formule) : 2^T	TP C1 Ex I nbre dérivé sur App. Affine en 0, sans calcul Ex IG 2 (½ tangentes à g et à d)
ou Eq. tgte (ES, RF) : 4 8 [ES] Eq tgte : 7 [ES] / Rech points : 10 [IS]	∅	Ex { Théo. FD : 11^T ; géom géné : 2^M Ex Eq. tgte (formule) : 11^T [RQ] Test Eq. tgte Θsf R(5^T) [RQ]	Ex : I1 (éq ½ cercle) – A1 (géom géné) IG1 (ss aide) – IG 2 (pos courbe / tgte) ⟶ (polynômes) J1 (pos Cf / tgte) T.A : (fiscond of tgtes) = 10
: 4 (RF), AN : 19 [RQ] IS, RF] Tests : AA [3, IS, RF, RQ] 1, ND : 2, T.Alg : 3, Maj. 3 [RF] Eq-tgte : 1 AN : 2	TP / App Aff : 2^T Ex / App Aff : 1^T Pb / dérive en a : 2^M Test : AAff : R3^T	Pb : Th. généraux. dérivabilité = 2(T) Trigo : 1(T) Eq tgte : 1(T)	Ex : J3 (App Aff ⟶ dériv. ND) $(1+h)^2 \approx 1+2h$ à h^2 près ; $(1+h)^3 \approx 1+3h$ J1 (ND → AA) D1 A1 pos rel. 3 courbes
...nématique : det. t sachant v(t) ...nt t : 2, det v(t) sach^t f(t) : 4 1 1, autres : 2	Pb : $v(t) = x'(t)$ # = 3^T	Pb : Th géné / FD : 5^T [RQ]	∅
FD : 4 [ES] [RF : 6/12] Alg : 2 [ES] [RF] FD : 4 Cgéné [ES] 1 [ES, RF] Tr Alg : 5 [ES] Aut : 3 [ES]	DC : AA : 1^D FD : 4^M Ex : FD : 1^D ND : 1^M ; FD : 1^M	DC : théo géné : $(uv)'$ (# 1)^T dériv($t \to f(at+b)$) (# 1)^T Ex part : FD th géné (# 45)^T [RQ]	DC / 4 [RQ] Ex / Formal : I, U (f paire, périod) 2 J : 4 [RQ] lim ⟶ dériv I : 1 (quotient ⟶ dérivée) J : 2 (résult. dérivée) C : 2 (dérivées) T.A : 2 Formalis I, U 3 autres (polyn)
Fact pol d°3 : 3 [IS] [IS]	∅	Test et Ex : { Th. monot. 71^M [RQ] Th. extremum $10^M + 3^D$ [RQ] FD : 73^T (th. gén)	A. Graph^t (Cf / Cf' dérivée) : 4 [RQ] I. Graph^t / prod. de courbes : 4 [RQ] J1 [RF] pas d'extremum sur R... T.A : 1 Max + Formal, I, U : polyn d°3
: 2 [RF : 1/2] ; Aut : 1 ; Polyn : 3 (RF1) : FD 2 [IS] + Var 2 [IS] DICHOT : 8 EQ degré 2 ou 3 : 7 [RQ]	Ex : Déf Bijection : 6^T (lire graphiqu^t) [RQ] Déf cos, sin : 12^T [RQ]	TP : Th monot : 1^M ; Th éq : 3^M [RF] Test : Th monot : 4^M ; Th éq 1^M Théo FD 32^T Th Bijections 2^M ; Trigo : 2^T DC : trigo 2^T ; monot. + éq 2^T Ex : Th monot : 25^M Th bij : 8^M TRIGO : $19^T + 6^M$ Th éq : 14^D	I : 2 (trigo) RF 1/2. I : 4 (trigo) RF sin x = a, cos x = a Tâches complexes : D : 2 (poly d°3, d° impair a 1 rac réelle) D : 1 (éq $x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda = 0$ a 3 rac. réelle...) CE : pol d° pair / pas de rac réelle Trigo : 6 (I)
	Ex / ND : 4^T	Ex : FD Théorèmes géné : 4^T [RQ]	∅
parité : 1 period : 1 Réd ét : 1 21 parité : 21 ...té / périod : 5 [RF] calcul trigo : 2 [RF] ...té : 13 pos rel : 2 : 14 géo 2 [RF1] ...h p^{ts} (courb / tg) : 3 (Réf Part) : 4 Extrem : Cond^t pm : 1 5 [RF3] dichot : 1 calc app : 2	TP + Ex : Déf parité et imparité 23^T + périodicité (Aut) Pb : f paire, impaire : 5^T (Autres) Déf asymptotes : 8^T	TP : Th monot : 1^M Théo FD : 39^T Ex : Th monot : 21^M ; Th Eq : 4^M Th généraux of Dérivée : 1^T Pb : Th / centres et axes sym : 6^T Th géométrie : 1^T Eq tgtes 13^T Th monot : 17^M Th extrem : 3^T – Th éq : 2^M	TP : J : 3 (parité, périodicité, réd. domaine) Ex : J : 1 (dérivabilité) I : 1 (l'exp de f(x) sur les graph f. trigo) Pb : Démo géo : 1 { J : trac courbe 2 (g, f) ; I : une tangente Utiliser, lire Tableau variations = 3 Discussion paramétrée : 4 I.G parité / périodicité : 6, encad^t fction : 1
3ES + 2IS) FD (IS) : 11 + 1IS ; RF) cond of tgte ...tgte : 3 (IS) + 5 Rche points : 1 ...t : 2 (IS) lieux, ens : 2 Eq. 1 (IS) Autres : 9 (IS)	TP : géo 2^M (aut) Pb : Géométrie Analyt : 1^M (aut)	TP : Prop géo. analyt : 3^T Th FD 11^T Equations tgentes : 2^T Pb : Prop géo. analyt : 5^T (droites 1, milieux, distance) Equations de tangentes : $^T 6 + 3^T$	TP : J 3 – TA : 7 (Géo, pm, $x \to x^2$; RF) Ex : J1 – TA : 2 (Géo, pm, $x \to 1/x$; RF 1/2) Pb : TA : 1 (tgte) I 1 (prop géo) IG : 1 IUF : 1 (géo anal.) D : 2 (géo analyt) J : 1 (géo an)
: 1 AN : 11 [RQ] ...od - RF) : 2/10 Maj : 1/10 [RF] ...par tgte : 2 Aut : 5 max : 2 FD : 2 AA 1 [RF]	TP : AA : 2^T [RQ] AA : 1^T (dérivée)	TP Géo : 1^T Pb Dér en a ⟺ $f'(a^+) = f'(a^-)$ 1^T Ex Th max : 2^T FD : Théo 4^T	TP : J1 Pb : C1 (Num $C(x+1) - C(x) \approx C'(x)$) J1 ($v(h) = V(x+h) - V(x) \approx \pi\sqrt{3}\, h x^2$) TA : 4 (cond sur f, f') TA pente maxi : 2 par AA C1 : 2 ½ tgtes ∈ même droite
] s + 14 IS (RF : 2) Var : 12ES + 6IS ...ympt 3 ES (RF1 + RPart 2) Ét. dériv : 1ES Eq tgte : 2 : 1) Model géo : 3 (RF2) Fact : 2 (IS 1)	Pb | Déf asympt 2^T (aut) Déf f dériv en un point : 1^M (à g, à d) (dérivée)	TP Th monot : 6^M FD théo G 26^T (Tableau var) Th extremum : 2^T Pb Th monot : 18^M Th éq : 6^T Th extrem : 11^T Eq tg : 2^T Géo (aire, volume) : 5^T, trigo, réel : 3^T	TP : IG : 4 (pentes ; courbe et corde) I1 (coeff. dir) ; I : extr 1 ; I : Aut 1 J : 1 (taux ≈ nb dérivé) Pb Utiliser, Lire tabl. var. (E1, IS 2) Int. Variat de f' → pos rel Courb / tgte Int. calcul / modélisation

EXERCICES ET PROBLÈMES POST-COURS

LA DÉRIVÉE : CLASSIFICATION SELON

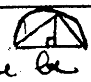
ÉLÉMENTS D'ANALYSE → THÈMES ↓	Sortes et nombres d'exercices	Découpages en « sous-questions » ...	(p/q) : { p → nombre de réponses fournies, q → nombre total de questions E : explicitement, I : implicitement, P : Partiellement dér : dérivée, aut : autres	Indications et Rappels D : dérivée A : autres
Nombre dérivé	Test : [4,1] Exo : [4,3]	∅	Test : E (4/4) dér Exo : E (0/18) dér graph ND lire E (1/5) dér alg | E (1/1) dér g/d int. graph E (1/1) aut géo analyt	
Etude de la dérivabilité	TP : [2,2] Test : [3,1] Exo : [7,3]	TP : Calcul du Taux, de sa lim valeur du Nb dérivé : 2 calcul du taux → Nb dérivé : 4 Ex : lim à gauche, à droite → conclusion 5	TP : E (7/11) dér + E (0/28) aut Test : E (3/3) dér Exo : (E (0/14) et I (3/14)) dér	TP : Rappel Taux de Questions :
Equations de tangentes (ou coeff. directeurs)	Test : [4,1] Exo : [11,5]	étude signe (f-g) → position Cf / tgte équation tgte → justific. position relative Cf / tgte (fournie par l'énoncé)	Test : E (4/4) dér Exo : E (1/27) dér + E (2/3) aut	Ex : A/P
Approximations Affines	TP : [1,1] Test : [3,1] Ex : [3,2] Pb : [2,2]	TP déf App Aff → ε(h) → encadr → AN 2 Ex déf App Aff → encadr → A.N 2 Pb Taux accr → lim → dér en a → App Aff → coeff direct 1	TP : E (2/2) AA + E (4/6) Aut ; P (1/6) Aut + AN 1/19 Ex : [E (2/5) et P (2/5)] AA ; AN : 0/8 Pb : [E (6/12 ; AA=1) et P (1/12)] dér AA ; E : 3/6 Aut AN : 0/5 Test : E (3/3) dér (AA)	TP : D/P Ex : A/P Pb : A/P :
Vitesses instantanées	Pb : [3,1]	∅	Pb : E (2/15) dér	
Fonctions dérivées	DC : [4,1] Ex : [16,8]	DC : calc taux → lim → dérivabilité fonction dérivée 5 Ex : cal limite en 0 → dérivabilité en 0 → calc taux (a,h) → f. dérivée de sin, cos Ex : Domaine dériv → calcul dérivée	DC : E (6/12) dér Ex : E (8/8) dér + 5/7 (aut) Calcul Fctions dérivées (1/46)	Ex Rappel : compl. ... D/P : 1
Variations, Extrema	Test : [7,2] Ex : [19,9]	valeur d'annul de f' → extrema ? variations → extrema ? présence de paramètres ↔ l'énoncé oriente la discussion par des "cas"	Test : E (7/7) dér [cas où il y a des paramètres] (non précisés) Ex : E (3/76) dér et P (12/76) dér (Quest. sl extrema) et I (4/76) dér (Quest. sl extrema)	Ex : pour x... calculer Mm En déduire vac réelles si...
Bijections, Equations, Dichotomie	TP : [1,1] Test : [6,4] DC : [1,1] Ex : [11,7] Ex (trigo) : [5,3]	TP, calcul f' → signe f' → variat (f) Dichotomie ← eq f(x)=0 ← DC : éq cos x = a / sin x = a : discussion orientée / énoncé → nb de solutions et intervalles fournis par l'énoncé Ex : pol x^3+px+q → fct pol → max, min → calc mM → concl	Test : E (6/6) dér D.C : E (3/4) dér 2/2 TP : E (6/14) dér : 3/6 I : 1/14 (aut) Ex : E (0/14) bij / int. graph E (0/10) images d'int E (8/8) biject de ... sur ... E (0/21) éq trigo E (7/12) Equations Dicho (0/8)	TP : A/G Ex : éq. trigo ou se ramène un chgt X = cost
Calculs de limites	Ex : [2,1]	Ex : fct dérivée → limite (fct donnée la 1re fois) 4 (2 exo)	Ex : E (0/5) dér : fct dérivée + limite	Ex : D/G
Etudes de fonctions	TP : [1,1] Ex : [8,3] Pb : [16,5]	Ex : Df → parité → limite → variat courbe ← (5 sous / 21 Q) Pb : forme canoniq → asymptotes (5) (2) lim, (3) posit. relativ calcul f', f'' → signe f'' → variat f' (1) limite → courbe asympt → posit. relative disc. paramètre sur extrema → cas fournis	TP, Ex } Variations = (2/17) + I : 1(17) ; Eq = (4/4) Pb E : tracés (0/50) Autres { (23/73)(E) (7/73)(P) Dér { 1/35 (E) 0/35 (P) AN : E : 0/3	Ex : Transf. Pb : Dér : Aut :
Géométrie Analytique	TP : [1,1] Ex : [1,1] Pb : [6,5]	TP : Géo (1) Ex : ($x \to \sqrt{1-x^2}$) aspect ½ cercle → appelé pour l'étude de la dérivabilité fonction	TP : P (6/10) géo + 0/3 éq tangtes Pb, Ex } E : 13/38 (dériv : 0/7) + I : 1/7 (géo) P : 1/38 (dériv : 0/7) → éq tgts	TP : A.P : Pb : D.P :
Modélisation et problèmes concrets (éco, phys, ...)	TP : [1,1] Ex : [2,1] Pb : [3,3]	TP : Modélis → A.N → Déf / App affine Ex : AN → Modél → Transf. alg → encadr → A.N Pb : AN → Tr. Alg → encadr → A.N Modélis → Déf approx. affine → A.N	TP : E (1/1) Géo (I 1/2 + P 1/2) AA AN : 0/11 Ex : E (6/6) Aut + AN : 0/4 Pb : Aut (1/6) AN (0/5) AA (1/1) Dér { P 4/8 E 2/8 Ex : E : 0/4 (dér 0/2) (raccord : Pb dériv)	Rappels : Vol TP : Approx af... Transf. A... Justifier l'utilité ou f(x0+h) ...
Optimisation et problèmes concrets (éco, physique ...)	TP : [2,2] Pb : [12,10]	TP / modélisation fournie → étude variations recherche d'extrema ← Pb / forme canonique de f ↔ asymptote et limite calcul dérivée → signe f' → variations extrema ←	TP / E : (8/20) dér : 4/15 I : (2/20) dér Max affirmé Pb / E : (18/100) [dér : 6 / aut : 12/12] P : (12/100) [dér : 8 / aut : 4/4] A.N : 0/7	Rappels : volu... air... TP / A/P : 1 Pb / Variables indication domaine de... Poser V = f(R)

1. LES AIDES À LA RÉSOLUTION

DÉCLIC 1reS
(HACHETTE ÉDUCATION)

Q.A : question d'aide

[m,n] : m ↦ nombre d'exercices
n ↦ nbre de types d'exo. différents
D.C : « démonst. de cours »
A.N : application numérique

…ns techniques (τ) …le cours (θ) G : général P : particulier	Rattachement à un point-méthode (τ/θ) (sf : "savoir-faire") G : géné P : part. E : explicite	Référence à un exo. corrigé (util : utilisation) G : géné P : particul. E : explicite	Aides à la résolution les plus significatives…
ϕ	Test : θ sf - G - E (4) Exo : θsf - G (3)	Test : util - P (4) Exo : util - P (1 fois)	Test : proximité de la rubrique sf (général!) Exo : prop de la parabole $x \to x^2$ en lien avec le TAF → schéma et formule fournis…
…éf dérivab en a : ① …accroiss^t donné : ④ … d'aide (A/P) : ④	TP : θsf - G (4) Test : θsf - G - E (3) Exo : θsf - G (10)	ϕ	Les formes utiles, pour cert. exos de taux d'accroiss^t (en a, h ou x, x₀ p. ex) sont fournies (surtout pour l'étude des cas de dériv. à g, à d). La présence de ½ T est parfois précisée (2 f. en TP), l'interp. graph. suggérée…
: ④	Test : θsf - G - E (11)	Exo : util - P (6)	"étudier le signe de $f(x)-g(x)$ sur…" schéma annonçant le résultat (1 fois) pour la position relative courbe - tangente)
. ① , A/P : ② AN : ③ ② ④	TP : τsf - G (4) : $f(a+h) \approx f(a)+hf'(a)$ Pb : θsf - G (2) Test : θsf - G (3)	util - P (6)	• une forme identifiable de la déf par App. Affine est fournie par l'énoncé (avec ε(h), une exp. littérale…) • une majoration du reste avec le domaine de validité est fournie par l'énoncé • l'express. "approx. affine" est citée, une exp est donnée à calculer! (type $f(x+h)-f(x)$)
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
…lim $\frac{\sin x}{x} = 1$ (0) …ux : racine double A/P : ⑤	DC : θsf - G (6) Ex : calc dérivées θsf - G (46)	Ex : calcul dérivées util - P - (45)	. Résultats de transf algéb. de taux fournis ($x \to \sqrt{x}$, $x \to \frac{1}{u(x)}$, sin, cos…) . 3 énoncés faisant retrouver de 2 façons ≠ des FD
…x^3+px+q, selon p et q …que $f(x)=0$ a 3 $4p^3+27q^2 < 0$	Test : θsf - G - E (8) (th monotonie, th. extremum) → instrumentation Ex : θsf - G - E (20) idem	Test : util - P - (7) Ex : util - P - (18)	• indic du sens de variation à prouver (test) • associations $\mathscr{C}_f / \mathscr{C}_{f'}$ → il n'y a qu'à choisir (2 f) • présences d'extremum (ou non) affirmées, intervalles donnés, parfois le point est donné, même ! (2 exos de démarrage) • aides à la formalisation : soit M = max et m = min…
1 (forme factorisée) …o : "utiliser le cercle …amener à cos a = cos b" …t de variable …ou X = sin t" (A/P)	TP : θsf - G (1) Th (dérivab + strict mon) Test : θsf - G (6) DC : θsf - G (1) τsf : "décompose en plus inter" Ex : θsf - G (9) θsf - G (5) trigo	TP : util - G - (1) Test : util - G - (6) DC : util - G - (1) Ex : util - G - (9) → ① "utils seul"	TP : indic du nb de sol de $f(x)=0$ et des intervalles concernés pour chaque solution Test : idem + vérifier que l'image de … par f est… vérifier que f est une bijection de … sur… Exo : 2 ex de routines des 3 types précédents + dichotomie et 1 exo où le nb de sol de $f(x)=0$ et les intervalles sont à déterminer
④ sur 2 exos	ϕ	ϕ	Déterminer f' puis en déduire la limite du taux d'acc donné (1 exo), puis un 2^e exo ("en procédant de même")
…ég. interm. 2 (trigo) …9 (2 Fact, 2 sym, 1 parité, 1 géo…)	TP : θsf G (9) Pb : θsf variat : 17 (G) θsf extremum : 3 θsf équations : 2	util 8 (6) variations : 17 équations : 2 encadrement : 2	Aide à l'étude de $x \to 2x + \cos x$ (encadrement, position relative / Δ $y = 2x \pm 1$, points de contact, tangentes en ces points) Discussion paramétrée orchestrée par l'énoncé limite → courbe asymptote forme canonique → droite asymptote
1 (éq droites) 1 (éq tangentes)	Pb : θsf - G - 6 éq tangents	Pb : util - P - 5	"Justifier la propriété géométrique suivante" Figure fournie : 1 fois
…me d'un cône, d'une boule …fice D - P (4) …géb A - P (3) } "sur-découpage" … $C(x+1)-C(x) \approx C'(x)$ … $f(x_0) \approx hf'(x_0)$ …	TP τsf - G (4) $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ θsf - G (2) dérivab. en a nb dérivé Ex θsf - G (2) Maximum cond of tgte	TP util - P - (2)	"justifier : $f(x_0+h) - f(x_0) \approx hf'(x_0)$" formalisation assurée par le texte pour la modélisation Modélisations polynomiales (ax^2+bx+c) fournies Utiliser l'approx. affine pour approx de $v(h) = V(x+h) - V(x)$
…me d'une sphère …d'un trapèze …géométrie fournies (11 fois) …des unités (5 fois) …valeurs 7 fois (2 Q.A) pour déterm. Max	TP : θsf - G (1) extremum Pb = θsf - G (18) monotonie θsf - G (11) extremum θsf - G (4) Th. équation	TP util P (1) optimis Pb rech. extremum (P - E - 12 fois)	. étudier h = f - g pour comparer f et g  TP : figure jointe, rappelant un théorème de la géométrie ; formule du coût marginal annoncée sous forme de taux d'accroissement Pb : études de variations orchestrées (calculer f', f''…) regarder sur tel intervalle, puis tel autre…

EXERCICES ET PROBLÈMES POST-COURS

LA DÉRIVÉE : ANALYSE SELON TYPES D'OBJETS

ÉLÉMENTS D'ANALYSE → / THÈMES ↓	Concepts / énoncés objets / outils (Ob/Ou) explicites / implicites (Ex/Im)	Connections effectuées →	Champs réels d'investigation →	Champs peu ou pas explorés
Nombre dérivé	ND / OB / Ex : 9 AA/OU/Im 5 TG / OU / Im : 9 } (situat graph) TG / OB / Ex : 1 } FD / OU / IM : 9 ↳ 1/2 cercle	AA, lim Tx, FD équations TG	Fonctions particulières usuelles (C^∞) (un schéma est souvent sollicité ou fourni)	Cas où il n'y a pas de nombres dérivés (ni à g,
Etude de la dérivabilité	ND / OB / Ex : 4 Th gén / OU / Im 3 ND / OB / Im : 4 ND / OU / Im : 4 AA / OU / IM : 7 TG / OU / IM : 6 (sit. graph)	demi-tangentes, tangentes verticales ou non.	La limite du taux d'accroiss^t existe (au moins à gauche / à droite). Un schéma est possible (fourni ou demandé)	La lim du taux n'existe pas, ni à g. ni à d. schéma problématique (ex : x → ...) Le nbre dérivé s'obtient tantôt par f', tantôt p...
Equations de tangentes (ou coeff. directeur)	ND / OU / IM : 1 TG / OB / Ex : 1 FD / OU / IM : 1 TG / OU / Ex. 9 AA / OU / IM : 1 Eq tg / OB / Ex : 7	AA, lim Tx, FD, TG, ND Géo géné (4), position relative courbe-tangente (2), Géo analytique (6)	Fonctions particulières usuelles (C^∞) (un schéma est souvent sollicité ou fourni)	Cas où il n'y a pas dérivabilité (ni à gauche, ni à
Approximations affines	ND / OU / Ex : 1 ND / OU / Im : 2 AA / OB / Ex : 3 (rubrique annoncée) AA / OU / Ex : 1 (calc approch ; tests) AA / OU / Im : 4 TG / OU / Im : 3 (f(1+h) approché graphiquement)	encadrements, approximations numériques majorations d'erreurs, nombre dérivé...	Fonctions particulières C^∞ usuelles, applications numériques essentiellement (avec notations en x_0, h ou a, h de façon systématique) ($h \approx 0$)	Cas généraux où reste inconnue ou logique (p.ex E(h)= ...) (développe l'aspect "a... Cas où les notations sont x, x_0 ...
Vitesses instantanées	FD / OU / Im : 3 Vi / OB / Ex : 3 (vitesse)	Fonction dérivée	fonctions très simples et modélisation fournie, très élémentaire (f(t) = ...)	Cas où la vitesse est une grandeur vecto... vitesses de rotation...
Fonctions dérivées	ND / OU / Im : 4 (DC) ND / OU / Im : 1 (Ex0) ND / OB / Im (2) ND / OU / Ex : 1 (Ex) FD : / OB / Ex : 48 Th gén / OU / Ex 4 Th gén / OU / Im : 1 (DC) + 3 (Ex0)	Taux d'acc^t, lim ND, Déf fct. déd (5), Th généraux de dérivabilité (5) (seuls)... Calcul FD ⟺ dérivab^té : 39	Résultats du cours (opérations + dérivées usuelles) appliqués aux fctions partic C^∞ DC : sin, cos dériv. en tt point	Questionnements du lim f' = f'(x0) ? (x→x0) quels cas utiliser plutôt que le taux d'a... le contraire) pour aut...
Variations, extrema	FD / OU / Im : 57 Th monot / OU / Im : 66 (+ act graph) Th extrema / OU / Im : 20 Maximum / OB / Ex : 4 (graph)	FD, Equations et inéquat du second degré (+ polyn) notamment. Graphiquement : précision du lien entre dérivabilité et extr...	Fonctions polynômes, fractions rationnelles, discussions param dans ces cas, discussions graphiques sur des schémas fournis...	Discussion systéma... des hypothèses d'un... (présence d'extremum discussion s/ stricte avec production de contre-exemples
Bijections, Equations, Dichotomie	FD / OU / Im : 29 Cercle trigo / OU / Im (4) Th monot / OU / Im : 29 Th biject / OU / Im : 8 Th résol éq trigo / OU / Im (15) Th éq / OU / Im : 11 Biject / OB / Ex : 6 (activ. graph)	FD, Variations, lien algèbre / analyse (éq. pol ⟺ fct pol) avec la trigo (cercle trigo) Standardisation des équat. cos x = a, sin x = a, cos x = sin x	fct. polynomiales : 10 fct. trigonomét. : 4 fct. fract. ratio. et irrationnelles : 4	• fonctions non déri... (voire non contin... sur l'intervalle cons... cas où on ne se p... pas sur un interv... conject. géné, discuss H...
Calculs de limites	FD / OU / Ex : 4 } de pair... ND / OU / Ex : 4 }	FD, Tx (à reconnaître)	Fonctions usuelles : à radicaux uniquem^t	Autres fonctions + délicats à identi...
Etudes de Fonctions	FD / OU / Ex : 1 FD / OU / Im : 40 Th mon / OU / Im : 40 Th extrem / OU / Im : 3 Th éq / OU / Im : 2	FD, variations, recherche d'extrema, de sol à f(x) = 0 symétries, géo. analytique asymptotes, encadrements...	Fonctions trigonométriques, polynômes, fractions rationnelles à radicaux usuelles...	Assez peu de fon... paramétriques d'expression "comp...
Géométrie analytique	Eq. tgte / OB / Ex : 8 coeff dir tgte / OB / Im : 2 éq. tangte / OB / Im : 1	ND, coeff direct tangente éq. tgte...	Parabole $x \to x^2$ plus rarement un polyn. degré 2 Hyperbole $x \to \frac{1}{x}$	autres paraboles, autres hyperboles, autres courbes...
Modélisation et problèmes concrets (éco, phys ...)	AA / OU / IM : 5 (titre : 1 fois) AA / OU / Ex : 1 (ar titre) AA / OU / Im : 1 FD / OU / Im : 1 Th max / OU / IM : 1	Applic. Numériques, calculs d'erreurs, erreur relative dans les calculs approchés, aspects graphiques... (raccordement de courbes)	Modélisation très "pilotée", servant d'alibi à autre chose (AA) portant sur des fonctions très simples (souvent polynomiales) Situations "réelles" d'approximation f(a+h) ≈ f(a) + h f'(a) est l'enjeu (AA implicite) erreur non évaluée)	Fonctions plus va... contrôle de l'er... plus systématique ?
Optimisation et problèmes concrets (éco, physique ...)	FD / OU / Im : 19 Th ext / OU / Ex : 11 FD / OU / Ex : 7 Th ext / OU / Im : 2 Th mon / OU / Im : 12 Th mon / OU / Ex : 12 Th équat / OU / Im : 2 Exp : 2	FD, variations, extrema étude de fonctions complètes TP : comparaison entre coeff. direct. corde / tangente	Fonctions polynomiales essentiellement Fonctions à radicaux Fonctions fractions rationnelles	—

UN STATUT OUTIL / OBJET
; FONCTION ET ENVIRONNEMENT

DÉCLIC 1ère S
(HACHETTE ÉDUCATION)

Pm = paramètre
AA : approx. affine (déf dérivée)
FD = Fonction dérivée
Vi = vitesse instantanée . DC = démo. de cours ND = nombre dérivé TG = tangente, Tx = taux accroisst.

	Conséquences : effets, → théorèmes en actes, processus d'algébrisation (...) sous-jacents, en germes.	Paramètres et leur environnement {explicite / implicite (E/I) fonctions / points (F/P) dérivées / autres (D/A)	Degré de généralité (Nul, Intermédiaire, Maxi) + caractérisation	Application / Questionnement	Notions non institutionnalisées en cours mais présentés dans l'exercice
n'y les niàd)	« Toute fonction est dérivable sur son ens. de définition »	Ø : 7 exos Pm : 1 (E-P-D) généralisat°	N : 7 I : 1 ($x \to x^2$ en tout point)	A : 5 Q : 1	Ø
existe oire ; in 1/x) ent de la Déf	« Toute courbe admet une tangente ou des ½ tangentes en tout point »	Ø : 16 exos	N : 11 M : 4 (DC) I : 1 (polynômes : formalisation fournie)	A : 12 Q : 4 (½ tangentes...)	TP/ • demi-tangtes vertic : 1 • dérivabilité à gauche, à droite : 2 • ½ tgtes à g, à d : 1
y a droite)	« Toute courbe admet une tangente ou des ½ tangentes en tout point »	Ø : 14 exos Pm : 1 exo (E-P-Autres)	N : 14 I : 1 ($x \to x^2$ en tout point)	A : 14 Q : 1	Ø
E(h) patho- $0^{(h)}$) alyse) s	Algébrisation de la déf par approxim. affine Mise en retrait implicite de la déf par AA, parfois (2)... Ex : justifier que $(1+h)^3 \approx 1+3h$ à $4h^2$ près (ss préalable)	Ø : 10 exos pm : 1 exo	N : 11 I : 1 (approximation polynomiale de degré n de $x \to 1/(1+x)$)	A : 11	TP : 2 + Ex : 1 notion d'"erreur" PB Approximations d'ordre supérieur ou égal à 2 (implicite ; fct $x \to 1/(1+x)$)
t elles)	« La connaissance du déplacement précède celle de la vitesse instantanée... »	Ø : 3 exos	N : 3	A : 3	Ø
type : dans la FD é (ou ND	• Marginalisation du calcul de ND par la déf • Mise en avant prépondérante de l'efficacité d'une démarche algébrique "en général"	Ø = 12 exos Pm : 6 exos (E, P, Dér) 1 exo (E, F, autres) 1 exo (I, F+P, autres)	N : 11 M = 5 (fctions qcqs) I = 4 (sin, cos, √ en tout point)	A : 7	Racine double d'un polynôme
hique théo 2), monotonie ...	« Il faut résoudre $f'(x)=0$ pour avoir les extrema locaux »	Ø : 22 exos Pm : 3 exos (présence de param. en coeff mais pas en exposants ; fct. polynômes : 2/3)	N : 23 I : 2 (polynômes, polyn à paramètres de degré 3 : x^3+px+q)	A : 23 Q : 3 (2nd si $f'=0$ ss changt de signe ?) (notion d'extrem. global)	Ø
rables es) déré ace lle φ, Réci	« $f([a,b])=[f(a),f(b)]$ ou $[f(b),f(a)]$ » « bijective ⇒ dérivable » « bijective ⇒ strict monotone » L'Hyp "I intervalle" est ss incidence sur le résult. des théorèmes... Dénaturation de cert. exos (p.ex : un pol de d° imp a 1 racréelle)	Ø : 15 exos + 5 exos (trigo) Pm = 2 exos (E) $\cos x = a$, $\sin x = a$ éq $x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda = 0$ Pm = 2 exos (I) polyn. d°3 d° impair	N : 15 + 5 (trigo) M : 2 (polyn. degré 3 degré impair) I : 2 ($\cos x = a$, $\sin x = a$; $x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda = 0$)	A : 15 + 5 (trigo) Q : 4 Polyn : passage équation → fction (algèbre / analyse) Existence d'une racine réelle si d° pair / impair ?	Ø
taux riée	Automatisme très peu développé ...	Ø : 2 exos	N : 2	A : 2	Ø
ctions u iquée	Apparence d'une "routine" des comportements locaux et asymptotiques, fort peu problématique : une zoologie particulière crée des "règles"	Ø : 20 exos pm : 1 ($x \to \sin(ax+b)$, $x \to \cos(ax+b)$) pm : 3 (discuss schéma : 2 second degré ; Rés° graph : 2)	N : 25 I : 1 étude de fction paramétrée	A : 25 Q : 1 (lien entre prop géom et fonction)	Parabole asymptote à une courbe (titre du problème)
) .	——	Pm = E/P/Aut : 7 Pm = I/ p^ts et coeff éq droits/géo ; (éq second d° : somme/produit 1 + systèmes linéaires)	N : 3 I : 5 (parabole, hyperbole, pt générique)	A : 8	• Généralisation (admise) à tout polyn. degré 2 d'une propriété • Foyer (3) et directrice (1) d'une PARABOLE
iées, ieu ;	• prise de sens "physique" de la déf par A.A • perte d'intérêt pour l'express précise de cette déf avec un reste en hE(h) → approx. num. • Glissement hE(h) → E(h) négligeable !!	Ø : 5 exos pm : 1 exo (I) (a, b, c trinôme modélisation) pm : 2 exos (E) (modèles s/ fctions trigo)	N : 8	A : 8	• notion d'"erreur relative" • notion de "coût marginal" • volume de l'enveloppe d'un cône, d'une boule
	• confusion taux acc / nbre dérivé ——	Ø : 14 exos	N : 13 I : 1 interprétation graphique du nombre dérivé ; lien avec la corde ...	A : 12 Q : 2 (étudier f' pour avoir la position relative courbe/tangente : 1)	• coût marginal : 2 • coût moyen : 1 • coût total : 2 • recette marginale : 1 • bénéfice : 1 • Hyp $C_m = C_T'$ et $R_m = R'$

EXERCICES ET PROBLÈMES POST-COURS

LA DÉRIVÉE : CLASSIFICATION PAR

ÉLÉMENTS D'ANALYSE → / THÈMES ↓	Sortes et nombre d'exercices	CADRES DE TRAVAIL (Nbre de cadres ut./Nb total questions) (Algébrique, Numérique, Graphique, Géométrique, Analyse)	• Pr • A
Nombre dérivé	Test : [4,1) Exos : [4,3]	Test : Alg 4/4 Ex : Graph 19/23 Alg 4/23	Test Ex
Etude de la dérivabilité	TP : [2,2) Test : [3,1) Exos : [7,3)	TP : Alg 30/40 Graph 10/40 Test : Alg 3/3 Ex : Graph 9/27 Alg 18/27	TP : Ex :
Équations de tangentes (ou coeff. directeurs)	Test : [4,1) Exos : [11,5)	Test : Alg 4/4 Ex : Graph 3/10 Géo (An) : 2/10 Alg : 5/10	Ex :
Approximations affines	TP : [1,1) Test : [3,1) Exos : [3,2] Pb : [2,2)	TP : Alg : 8/27 Num : 19/27 Test : Alg : 3/3 Ex : graph : 2/23 Alg : 11/23 Num : 10/23	TP : Ex :
Vitesses instantanées	Pb : [3,1)	Pb : Alg 15/15	
Fonctions dérivées	DC : [4,1) Ex : [16,8)	DC : Alg 12/12 Ex : Alg 63/64 [RQ] Graph 1/64	Ex :
Variations, extrema	Test : [7,2] Ex : [19,9)	Tests : Alg 7/7 Ex : Graph 8/76 Alg 68/76 [RQ]	Ex : voir à l'
Bijections, Équations, Dichotomie	TP : [1,1) Test : [6,4) Ex : [11,7] DC : [1,1) Ex (trigo) : [5,3)	TP : Alg : 10/13 Num : 2/13 Graph : 1/13 Tests : Alg 6/6 DC : Alg 1/2 + Graph 1/2 Ex : Graph 14/64 [RQ] Alg : 29/64 [RQ] Alg + cercle trigo 21/64	TP : DC : Ex :
Calculs de limites	Ex : [2,1)	Test : Alg 4/4	
Etudes de Fonctions	TP : [1,1) Ex : [8,3) Pb : [16,5)	TP : Alg : 5 Graph : 6 Ex : Alg : 23 Graph : 1 Pb : Alg : 108/130 Graph : 19/130 Num : 2/130 Géo : 1/130	TP : Ex : Pb : Al
Géométrie Analytique	TP : [1,1) Ex : [1,1) Pb : [6,5]	TP : Géo analyt 8/9 Alg 1/9 Exo : Géo analyt 2/3 Alg 1/3 Pb : Alg + Géo 13/35 Alg 20/35 Graph : 2/35	Pb :
Modélisation et problèmes concrets (éco, physique ...)	TP : [1,1) Ex : [2,1) Pb : [3,3]	TP : Géo : 1/11 Alg : 1/11 Num : 9/11 Ex : Alg : 8/12 Num : 4/12 Pb : Alg : [illegible]/28 Num : 5/28 Géo : 2/28	TP : Ex :
Optimisation et problèmes concrets (éco, physique ...)	TP : [2,2) Pb : [12,10]	TP : Alg : 22/36 Graph : 1/36 Géo : 3/36 Pb : Alg : 67/100 Géo : 19/100 Graph : 8/100 Num : 6/100	TP : Pb :

"CADRES MIS EN JEU"

DÉCLIC 1ère S
(HACHETTE ÉDUCATION)

[m, n] : m → nbre d'exercices
n → nbre de types d'exo. différents
[RQ] : répétition de questions

Interactions et changements de cadres (types / nombre) [mis] en charge par l'énoncé (ēn) [ou à] la charge de l'élève (ēl)	changements de points de vue ?
Alg → Num 4 (ēn ; simple application) Graph → Num 2 (ēn) Alg → Graph 1 (ēn)	∅
interaction de cadres : Alg ↔ Graf : 1 (ēl) chgt de cadres : Alg → Graf = 8 (2ēl + 6 ēn) Alg → Graf = 2 (ēn)	∅
Graph → Alg : 2 (ēn) Géo A → Alg : 2 (ēl) Alg → Graph : 1 (ēn) Interact. Cadres : Graph ↔ Alg 1 (ēl)	Le cercle $\mathcal{C}(0,1)$ vu comme <u>objet géométrique</u> / rep graph $x \to \pm\sqrt{1-x^2}$
Alg → Num : 3 (ēn) Graph → Alg : 1 (ēn) Alg → Num : 4 (ēn) Alg → Graph : 1 (ēn) <u>Test</u> Alg → Num : 3 (ēn) (applic)	∅
∅	∅
Graph → Alg : 1 (ēn)	∅
Graph ↔ Alg : 8 (ēn) ēl : lectures de courbes ; IG = dérivabilité ; <u>infini pour repérer val. d'annul selon max et min</u>)	∅
Algèbre → analyse : 1 (polyn. / fct. polyn) (ēn) Alg → Graph 1 (ēn) <u>Ex</u> : Alg (équat) → analys : 3 (ēl) Alg → Graph : 5 (trigo, ēn)	∅
∅	∅
Interaction de cadres Alg ↔ Graph : 2 (ēn) Int. cadres Alg ↔ Graph : 1 (ēn) Alg → Ref graph : 21 (ēn) (av/ss calculatrices) → Graph 23 (ēn) Graph → Alg : 3 (ēn) Alg ↔ Graph : 2 (ēn) interac cadres	∅
Alg ↔ Géo : 9 (interact. de cadres) (ēn)	∅
Alg → Num : 2 (ēn) Alg ↔ Num : 5 (ēn) Géo → Alg : 2 (ēn) RF 1/2 Alg → Num : 1 (ēn)	∅
Alg ↔ Graph : 1 (ēn) Alg ↔ Géo : 1 (ēn) Géo → Alg : 18 (ēn) Alg → Géo : 6 (ēn) Alg → Num : 2 (ēn) Alg → Graph : 7 (ēn) Graph → Num : 1 (ēn) Num → Alg : 1 (ēn)	∅

Observations générales :

- Bien que les cadres de travail soient assez variés, les <u>changements de cadres</u>, quant à eux, sont presque toujours <u>explicites</u> voire <u>pilotés</u> par l'énoncé ; dans les (rares) situations où ce n'est pas le cas, c'est généralement parce que l'exo <u>duplique</u> une situ. déjà pilotée lors d'un exo précédent
- L'accent est surtout mis sur le <u>tracé des courbes</u> à partir de l'étude des fonctions, situation dans laquelle on passe d'un cadre de travail à un autre, mais où le changement de cadre n'est pas utilisé comme moyen répondant à des difficultés particulières rencontrées dans le cadre d'origine (cas les plus "problématiques" ici : tracé de C_f, présence de 1/2 tangentes à g, à droite...)
- Le passage d'un cadre de travail à un autre est <u>facilité à divers degrés</u> selon que l'on se situe au sein d'un TP, d'un exo de début de liste (nouveau pour l'élève) ou d'un exo répétitif par rapport à d'autres qui le précèdent...
  Les <u>Interp. Graph.</u> sont souvent <u>suggérées</u> : "justifier la proposition suivante : ...", "en déduire..."
  Idem, parfois, pour les chgts cadres Alg → Num (voir le cas de la dif par approx. affine)
- Prise en charge d'aller-retours entre cadres différents pour <u>aider</u> l'élève (Num → Alg → Num) uniquement (prise de contact progressive).
- Les questions concernant la <u>position relative</u> "courbe / tangente en un point donné" sont bien <u>guidées</u> au niveau du chgt de cadre...
  Idem pour l'exo sur une prop de la parabole (// ième corde / tangente au point médian), un schéma et l'interp. graph sont fournis
- Dans les exos of App. Affine le cadre "analyse" n'est sollicité qu'en apparence ; en fait, tout est géré / gérable dans le cadre <u>algébrique</u>...
- <u>Géom. analytique</u> : le changement de cadre est souvent <u>facilité</u> par la présence d'un schéma ou d'une <u>rep. graphique</u> fourni par l'énoncé avec tous les détails (<u>ex</u> : constructions, pentes, extrema...)
- <u>Exemple d'aide</u> : "en utilisant la courbe et les valeurs de la fction tgte en déduire les solutions des équations ..." → il s'agit là d'un apprentissage progressif du jeu consistant à utiliser plusieurs cadres, une interaction de cadres pour résoudre une question.
- Le passage du cadre <u>algébrique</u> (résol d'éq.) à un cadre + analytique (<u>analyse algébrisée</u> dans l'étude d'une fonction dont on cherche les "zéros") est <u>piloté</u> dans les 1ers exos → l'intro d'une fction par les élèves en est ensuite facilité...)
- <u>Optimisation</u> : L'interaction "cadre géométrique" / "cadre algébrique" est totalement pilotée par l'énoncé (choix des variables, annonce du résultat, schéma à l'appui, description de la situation)

EXERCICES ET PROBLÈMES POST-COURS

LA DÉRIVÉE : CLASSIFICATION PAR REPRÉ

ÉLÉMENTS D'ANALYSE → / THÈMES ↓	Sortes et nombres d'exercices	REGISTRES CÔTÉ ÉNONCÉS — Registres : dominants (RD) secondaires (RS) minoritaires (RM) R compléments d'énoncés facultatifs (RF)	Formes particulières introduites (types).	Registres des réponses annoncées
Nombre dérivé	Test : [4,1] Exo : [4,3]	RD : EA:5 + RG:3 + F:1 RS : EA:1	Test : Dif par Approx. Affine : 2 Ex : Rep graph sur Papier Quadrillé : 2 schéma illustrant la solution : 1	EA : 5 F : 2
Etude de la dérivabilité	TP : [2,2] Test : [3,1] Exo : [7,3]	RD : F 7 + EA 8 + RG 1 RS : EA 12 + F 1 RF. F1	TP : Taux d'accroissement : 4 Test : Ecriture type approx. affine : 2 Ex : Taux d'acc 2 Rep Graf sur P. Qd : 1 écriture type AA : 2 (en 0)	F : 5 EA : 3
Equations de tangentes (ou coeff directeur)	Test : [4,1] Exo : [11,5]	RD : EA 4 + RG 2 + F9 RS : EA 7 RM : EA 2 RF : RG 1	Test : Ecriture type AA : 2 Ex : RG sur papier Quadrillé : 2 Ex : $f(x)-(-3x+1)$ (étudier le signe...)	EA : 5 F : 2
Approximations affines	TP : [1,1] Test : [3,1] Exo : [3,2] Pb : [2,2]	RD : EA 3 + RG 1 + F3 + EN 3 RS : EN 3 + EA 2 + F 2 RM : EN 1 RF : RG 2	TP : écriture par AA avec $\varepsilon(h)$ non explicite, et dans des cas de fonctions particulières ; sup de l'erreur fournie PB : taux d'acc et dif par AA fournies Ex : Rep Graph sur Papier Qdrillé : 1	EA : 12 F : 2 EN : 3
Vitesses instantanées	Pb : [3,1]	RD : F3 RM : EA 1	Pb $f(t) = \frac{1}{2} g t^2$ ailleurs $f(t)$ = polyn degré 2	F : 2
Fonctions Dérivées	DC : [4,1] Ex : [16,8]	RD : EA 13 F 15 RG 1 RS : EA 2 F 1 RF : EA 1	DC : Expression des taux d'accroisst ($x \to \sqrt{x}$, $x \to \frac{1}{u(x)}$; $x \to \lambda u(x)$...) Ex : $f'(a)$ (nbre dérivé pour accéder à la fonction dérivée) $(\sin)'a$, $(\cos)'a$, $f'(x) = ax^2+bx+c$ ...	EA : 10 F : 11
Variations, extrema	Test : [7,2] Ex : [19,9]	RD : EA 20 F 12 RG 7 RS : F 14 EA 2	Ex : Représentations graphiques sur Papier quadrillé ou non Ex : $x \to x^3 + ax^2 + ax + b$ $x \to x^3 + px + q$; $x \to \sin(ax+b)$	F : 9 EA : 1
Bijections, Equations, Dichotomie	TP : [1,1] Test : [6,4] DC : [1,1] Ex : [11,7] Ex (imgo) : [5,3]	RD : F 15 EA 20 RG 2 RS : F 7	Ex : Représentations graphiques sur papier quadrillé (bijections)	F 11 + EA : 19 EN 1 EA 3
Calculs de limites	Ex : [2,1]	RD : EA 2 RS : F 2	∅	∅
Etudes de Fonctions	TP : [1,1] Ex : [8,3] Pb : [16,5]	RD : F 12 RG 1 F 12 + EA 12 RS : EA 12	Ex : $x \to \cos(ax+b)$ $x \to \sin(ax+b)$ PB : $x \to ax+b+h(x)$: 7/16 $x \to a\sin(\alpha x+\beta)$: 2	EA : 15 F : 10 EA+F : 14
Géométrie Analytique	TP : [1,1] Ex : [1,1] Pb : [6,5]	RD : F8 RS : EA 2 S 1 RM : EA 6 RF : F 1 FG 2 S 1 RG 1	∅	F : 12 EA : 8
Modélisation et problèmes concrets (éco, physique...)	TP : [1,1] Ex : [2,1] Pb : [3,3]	RD : F8 EA 2 S1 RS : EA 5 EN 1 I 1 RM : S 2 EN 1 EA 1 RF : F3 RG 2	TP : $f(x_0+h) - f(x_0) \simeq h f'(x_0)$ Pb : Coût marginal : $C(x+1) - C(x)$ diff volume : $V(x+h) - V(x)$ Ex : $x \to k \sin(ax+b)$: 2	F : 5 EA : 9
Optimisation et problèmes concrets (éco, physique...)	TP : [2,2] Pb : [12,10]	RD : F 13 EA 1 RS : EA 10 F 1 I 3 FG 2 RG 1 RM : EA 3 RF : FG 1	TP : $C_m(x) = \dfrac{CT(x+1) - CT(x)}{x+1-x}$ Pb : Form. canonique → asymptote 1 $f'(\alpha)$ factorisé 1	F : 14 EA : 15

SENTATIONS / REGISTRES SÉMIOTIQUES

DÉCLIC 1^e S (HACHETTE ÉDUCATION)

RG = représ. graphique
S = schéma
FG = figure géométrique
I = illustration
T = Tableau

EA = expression algébrique EN = expression numérique F = français (langue naturelle)

REGISTRES	CÔTÉ SOLUTIONS		Observations : formes utilisées et formes absentes
Registres { dominants (RD), secondaires (RS), minoritaires (RM)	Formes particulières sollicitées (types)	Registres sollicités implicitement	
RD : EA 6 + EN 2 + F 1	∅	∅	utilisés : $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f'(a)$ où a est spécifié + grandes flèches sur tracés. ABS : Déf en x, x_0 ; valeurs non spécifiées
RD : EA 9 + F 3 RS : RG 2 + F 1 RM : RG 1 + F 3	∅	RG : 1	Mêmes observations que ci-dessus...
RD : EA 16 + F 1 RS : RG 2 RM : RG 1	∅	RG : 1	• L'exp $f(x)-g(x)$ est suggérée pour étude de signe pour avoir la pos rel courbe / tgte • $f'(a)$ = coeff direct tangente ; exp "pente de $\mathcal{C}$ en a" absente
RD : EA 12 + EN 3 RS : EA 1 + EN 1 RM : RG 1	TP : $\varepsilon(h)$ après application des quantités conjuguées Ex : AA : $f(1+h) = b + ah + h\varepsilon(h)$ Pb : AA partic ; $\lvert f(x)-g(x)\rvert \leq 2\lvert x\rvert^n$	∅	• L'expression "fonction affine tangente" n'apparaît pas. • Le lien avec l'équation de la tgte (registre x, a ou x, x_0) n'est pas mis en valeur (Déf AA → not. x_0, h)
RD : EA 3	∅	∅	• Expressions vectorielles, différentielles dx/dt, express $\dot{x}(t)$, $\dot{\theta}(t)$ absentes
RD : EA 24 F 2 RS : F 2	Ex $\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \cos a \left(\frac{\sin h}{h}\right) + \sin a \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)$ idem pour cos... $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ ...	∅	Pas d'exp. type $f(x_0) = \ldots$ ou $f'(x_0) = \ldots$ où x_0 est donné mais inconnu ; pas de fonction définie implicitement (type : f = ... sur ... et f périodiq)
RD : EA 22, F 3, RG 1 RS : T 11, F 2, RG 1	∅	Tableaux de variations : 10	Pas d'expressions factorisées problématiques à obtenir, sans aide, pour l'étude du signe de $f'(x)$... (ex : $x \to f(x) = \cos x + \sin x$)
RD : EA 23, F : 1 (oui/non) + F 2 RS : RG 1, EN 2, F : 5, RG 5 (cercle trigo) RM : EN : 1, RG : 1	TP : Polynôme factorisé 1, expression selon certaines données : 2 Ex : oui / non : 1 (à partir de RG données)	Tableaux de variations : 17	Formes canoniques $\cos x = \cos y$, $\sin x = \sin y$, $\cos x = a$, $\sin x = a$ utilisées pour éq trigo.
RD : EA 2	∅	∅	∅
RD : EA 25 RS : RG 7 RM : F 1, T 1, RG 15	Tableaux de variations : 23	Tableaux de variations : 12	∅
RD : EA 12 RS : RG 4 RM : RG 4	TP / $y = mx + p$: 4	RG : 7	∅
RD : EN 2 EA 7 RS : EN 2 RM : EA 1, F 1	Modélisations → formules algé Ex $\frac{P_1 - P}{P} = \frac{2x}{100} + \frac{x^2}{100^2}$ ... $\left\lvert \frac{x_1}{100} - \frac{-x}{100} \right\rvert \leq x^2 10^{-4}$ ...	∅	∅
RD : EA 14 RS : RG 1, T 1 RM : T 11, RG 6, EN 3, F 1	Tableaux de variations : 5 Formules algébriques après modélisations (pour études de fctions)	Tableaux de variations : 15	∅

EXERCICES ET PROBLÈMES POST-COURS

LA DÉRIVÉE : CLASSIFICATION PAR TY

FD: Fonction Dérivée / ND: nombre dérivé

PC : papier calculat
PQd : papier quadrill

THÈMES ↓ / ÉLÉMENTS D'ANALYSE →	Sortes et nombres d'exercices	Sous-tâches graphiques : 1 tracés (tgtes, courbes, aut. droites) 2 lectures graphiques, associations, ... 3 interp graphiques (IG), Rés graph (RG)	(τ) Calculs ↗ ES ou ϕ ↘ IS ND, FD, lim, Tx (Tau Eq tgte, Eq (Eq Syst (système), Fac Var, TVar (Variati AN (applic num),
Continuité et Dérivabilité (et nombre dérivé)	TP1 QCM[8,4] Ex : [9,6]	IG dér g/d : 2 ; lire ND sur Cf : 1 Tracé {Cf : 1, {demi-tgtes : 4 ; lire ND g/d → dérivabilité ? 4 PQd + 3 PC	lim 2 ND : 5 ND géné : 1 FD : 1 {T Var : 1, Var : 1 lim 1^{IS} (continuité) ND : 6^{IS} FD : 6^{IS} lim Taux {18^{IS} → étude dériv 18, 6 → étude dérivabilité 3
	flog Ex [3,2] fexpo Ex [3,2]	Flog : lire ND sur graphique 1 PC (pm) f expo : lire ND sur graphique 1 PC (pm)	f.log : lim f.exp : lim
Equations et coeff. directeurs de tangentes ; position relative Cf/Tg	TP1 QCM1 Ex[6, 6]	Lire sgn (f-g) sur tracé : 4 IG prop parab (ss aide - idem 1S) IG sgn(f-g) : 4 Tracé courbe : 2 lire Coeff direct sur Cf' : 1 Tracé tgte : 2	FD 1 (géné) FD : 3 FDsec : 3 p^T inflex : 1 (TP) ND Eq tgte : 6 lim : 3 Var : 1 Eq : 1 (IS) f. Log : FD 1^{IS}
Fonctions dérivées Dérivées successives	DC : 1 Ex : [11,7]	ϕ	FD 23 + 3^{IS} ND : 2 Dérivées successives Syst 1^{IS} Fact : 1 Eq : 1 TAlg : 1 f.log : FD 13 Eq diff 1 (TAlg) f.Expo : FD 19+1
	Ex : [4,1] (f.log) Ex : [5,1] (f.34)		
Vitesse/accélération instantanées intensité électrique	Ex : [5,5]	Ex : tracé courbe évol pesanteur q (t), i (t) : 4 courbes	FD : 4^{IS} Var 1^{ES} Eq : 4 Prim 4^{IS} Calcul période 1 Calc Num : 1
Variations et Extrema	QCM [5/5] Ex : [4/2] DCexpo : 1	QCM : lire extr : 2, var : 2 sur Cf' Tech base : Associer T.Var (f) – Cf' : (3 possib) Tracer tgte : 4 lire sur Cf, Cg les var de f+g, 1/f, -f ... etc : 5 (ss dérivée)	FD : 20^{IS} + 1^{ES} Var : 19^{ES} + 1^{IS} Eq : 1^{ES} Tech base : Majorations à vue : 6 (RF) Transf alg 7 Majorations : 7 (RF)
	Tech base [19,16]	Tracé ss dériver 6 + 9 (log/expo)	
Equations, bijections dichotomie	QCM : 1 Ex : [3,3]	QCM : lire sur Cf' : var f et zéro(f) : 1 Ex Tracer Cf : 1 Rés graph f(x) = a : 3	lim : 2 Var, 1 + 1^{IS} T.Alg 1 + 1^{ES} Eq
	limites/continuité TP1 QCM : [2,2] Ex [5,3] Pb : [2,2]	QCM : lire sur Cf : ↗ nb sol f(x) = m 1, ↘ f biject. de ... sur ... 1 (lim, continuité)	Dicho : 4 FD : 10^{ES} intervalle image 7^{ES} c Rés syst : 1 lim Tx → ND g/d 1 Var :
Calculs de limites	Ex 5 lim/cont : TP1	ϕ	FD : 13 (IS) ND : 13 (ES) T.Alg : 10 (IS)
Inégalité des acc. finis	TP1 ; QCM[3,3] DC 1 ; Ex [8,8] flog 1 ex Suites : 1 TP 3 ex [5 Pb, 4]	Lire |f| ≤ a sur Cf : 1 Tracer Cf : 1 + tgte : 1 IG l' inég acc finis : 5 illustrer graph^t enc^T : 9 droites + 8 courbes	FD : 21^{IS} 4^{ES} {Var : 12^{ES}, TVar : 2^{ES} T.Alg : 6^{IS} Inég. Eq tgte : 1 – fct : encadrements algébriques : 8^{IS} + 15 – dichot : 4 – Suites : lim 12 ; Maj/min 4 ; Var 2 ; Enc^T alg : 9
Etudes de fonctions	QCM : 1 Ex : [5/5] Pb : [9,7] fct Log : DC1	QCM : signe (f) à lire sur Cf' Pb : Tracé Cf : 14 Tracé tg : 7 Tracé droites 9 IG dériv 4 Rés graphs {f(x) = x+p 2, f(x) = m 2 IG pos rel Cf / asympt : 6 IG d(A,M) = cste : 1 IG eq (x, y, x^2, y^2) : 3 IG fn(β) = β, fn ↘ 1	Df : 2 lim (5 - p^T précis, 10 - bornes, 8 - ss indic, 27 FD (12^{ES} + 8^{IS}) (RF = 3) Var (20 + 1^{IS}) T.Va signe {f'', f'} : 1^{ES} ; parité : 5^{ES} + 1^{IS} périodic Form canon. 1 + 1^{ES} As obl : 10 Dicho 9 T Trigo : 5 + 2^{IS} Eq 2nd degré : 1 géo anal :
	TP[2,2] QCM[4,1] Ex [18,11] Pb [7,5] expo : TP1 QCM [7,7] Ex [22,6] Pb [11, 10] fct a^x : Ex [7,3] Suites TP [1,1] Ex [4,4]	log/expo IG dériv 6 ; tracé courbes 59 asympt/tg 12 J. rep graph PC : 1 ; autres droites 9 IG courbe AS 2 QCM : IG ln(x) = mx (ss calcul) Rés Graph 3 Pb lire pente sur PQd → Trad fct pm 1 lecture G IG lim f-g 5 ; signe (f-g) : 5 ; sol éq 2+1 signe(f), ND I construct tgte → tracer 1 ; I pos rel 14 ; IG éq(Π) : 2 f expo : lire Var et ND : 1 → coeff fct pm (pas tg) + valeurs de f	f log lim Tx 1 + 3^{IS} Asympt H, V 10 ; lim 38 ^{ES} + 5^{IS} FD : 14^{ES} Eq tgte : 4 codir tg : 3 FDsec : 1 enc^T alg 6 maj, min alg Enc - Inég IAF : 2 T.Alg (éq diff ...) : 3 As obliq : 5 maj, m f expo lim Tx : 7 lim 54 FD 14^{ES} + 30^{IS} Var 37^{ES} + 4^{IS} as obl : 11 Asym H, V : 10 Eq / inéq trigo 3 (p^T Π) Eq / inéq expo 4+7 et signe 11^{ES} Eq 2nd d° : 2 T. Alg : 3 a^x + dicho : 8 TAlg éq : 4
	Tech base Ex [6,6]	Lire f(x) sur courb simple (composée avec x → x^2, √x ou 1/x d'une translation)	Tech base : Calculer g∘f (3) parité : 4 autre sym
Optimisation	Pb : [7, 7]	Tracer Cf : 3 tracer droite : 1	lim Taux 2^{IS} → dérivabilité 2 lim 3 FD Eq tangente : 2 Eq droite : 1 Calculs trigo : 6 Calc volume 3 calc surf : 3 calc. dans un tria point d'intersect : 9^{IS} Equation : 1^{IS} p^{TS} à déterm
Primitives + intégration	QCM : [9,9] DC : [4,4] TP[2,2] Ex : [14,7] [54,35] log [6,1] exp [8,1]	Lire conditions sur f' sur rep graph : 3 Pb : Tracer Cf : 1 [9,8]	Calc limit 40 + Rés éq (CI) : 5 f.log {Résol syst 1 FD : 49 Eq tgte : 6 ; décomp fract : 2 linéaris : 2 Var : 3 f expo Calc prim 32 + Rés éq (CI) : 2 lim 35 Eq Iné ; As : 1 Parité 1 ; Trigo + calc gé ; Primitiv 19 IS
Equations différentielles	TP : [2,2) QCM : [11,11) DC : [2,2) Ex : [40,20] Pb : [7,4)	Identifier Ci sol éq diff sur tracé : 10 Tracer tangentes : 4	Rés. équations (CI pour éq diff 1° ordre : 12/19 + 3/6) Rés systèmes (CI pour éq diff 2° ordre : 19/29 + 6 Calc primitives : 8 (aut. éq diff) + 4 + 3 = 15 Variations 7 AN : 3 dicho 1 Etud

PES DE SOUS-TÂCHES

DÉCLIC Terms
(HACHETTE EDUCATION)

[m, n] : m ↦ nombre d'exercices / pb…
n ↦ nombre de "types" d'ex. / pb… différents

ce — CI : Condition(s) Initiale(s) (primitives, eq diff…)

DC : « Démonstrations de cours » (en exercices)

pm : présence de paramètres

x), FDsec (dérivée seconde) ations), Ineq (Inéquations) t (factorisation), T. Alg = transf algébrique ons, tableaux…) CI, dicho (dichotomie)	Appliquer une Définition T = technique M = MOBILISABLE D = DISPONIBLE	Appliquer une propriété ou un théorème (Θ) T = technique M = Mobilisable D = Disponible	Argumenter, Composer, Contre-Ex, Démontrer, Discuter, Etudier, Formaliser, Généraliser, Identifier, Interpréter Graphiquement, Justifier, Lire Tableau Var, Reconnaître, Réduire, Résoudre, Vérifier, Utiliser, Traduire Analytiquement
Tr. Alg (sans V. Abs) : 1 Tr. Alg Taux : 1 IS 2 lim Tx : 2^{IS} ND : 1 2^{IS} lim Tx : $1^{IS} + 1^{ES}$	Déf continuité en a : 2^D 3^M Déf dériv. g/d : $1p^T$ Déf ND : 2 (gén) ^{M} 1+13 Déf dériv (a+h)/(a−h) (gén) +2	Théo. gén. dérivab $1^T + 3^T$ Formule dériv f^T Th monot 1^M dérivable ⇒ continue 1^D Réc. fausse : 1^D (géné)	D dériv ⇒ dériv sym I dériv sym ⇏ dériv I nbres dérivés dans ens. sym 2 (E.E donné) V dériv. en 1 pt par le calcul (après IG) : 5 IG dér g/d : 2 ; TA cond sur f'(a) : 1 E : continuité 2 dérivabilité 2
: 1 Ineq : 2 (IS)	Déf f impaire : 1^M	Eq tgte gén 1^T Eq tg : $6^T + 1^D$ pos rel Cf / tgte = 3^T (avec dérivée seconde) Th. monot : 5^M (cas gén) Formul dériv 8^T ; Th gén dér 1^T	TP J pos Cf / tg ⇔ signe (f(x) − g(x)) (gén) ; Lire Tabl Var 4 géné A signe (f − g) selon graph 4 ; R sens var (f+L) géné I lien (Var f', f'') 2 I lien (extrema (f') et pt inflex) 1 E pos. rel Cf / tgte 2 ; TA tgte traverse Cf pour f impaire IG plop parab IG signe (f − g) = 4
: 25 Récurrence ($f^{(n)}$ pour $\frac{1}{x}$) : 1 ES FD sec : 1 Eq diff (T Alg) : 1	Approximation Affine : 3^T	Formules dérivation : 86^T dérivée (g∘f) : 2^T	I dérivée (g∘f) DC C f' selon 2 méthodes (non indiquées) G : $\Sigma k x^{k-1}$ I : $(1-x^5)/(1-x)$ D récurrence
+ CI ^{IS} (2 eq + 2 syst)	$v(t) = \frac{dx}{dt}$; $\gamma(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ $i(t) = dq/dt$: 3^T	Théorème monotonie : 1^M Formule dérivée : 4^T	I : période de fonction 1
FD : 29 ND : 4 Var : 8 Encadremt / Variat : 4	ND : 4^T Déf croissance / déc : 1^T	Th. monot : 23^M ; Th extr 5^M Formul dériv : 21^T Formule dériv (g∘f) : 1^T Th. monot : 8^M Tech base Formul dériv : 29^T	I compatibilité possible entre f' > 0 et f ≤ 0 (IS) T.A : fct. paramétrée à 2 extrema I sens var. sans dérivée 16 + 5 pm + 9 (log / expo) (composée g∘f, k u(x−α)+β avec g polyn. $u = x^2$, $u(x) = \lvert x\rvert$, $u(x) = \sqrt{x}$ T.Var → I sens var g∘f avec g pol : 3
2nd degré : 1 (IS + pm) ff direct tgte : 1^{IS} Syst : 1 10 (limites et continuité)	Déf f strictt monot : 2^T Déf dériv en 1 pt : 1^T	Th eq : 4^M ; Th monot : 4^M Formule dériv : 3^T Th bij : 6^M Th eq : 4^M Th monot : 10^M Formul dér 10^T Th : dériv ⇒ cont : 8^T	C méth. alg / anlys : 1 Résoudre Graphiqt : f(x) = a direct : 2 R : interv. étude 1^{IS} C méth résol f(x) = a U : dériv sin pour lim $\frac{\sin x}{x}$ (0) ! T Alg + graph / eq 2nd degré I : sens var (ss dérivée) T.A cond / tgte cond / courb } (2 tâches complexes) → syst pm J : f biject sur graphic 1
	Déf ND + FD : 13^T	Th comp lim $1^{ES} + 1^{IS}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$: 3^T 6^M 1^D	∅
Alg : 6^{RF} AN : 3 (val app) signe (f') : 3 encadrements numériques 4^{ES} et val. num approchées 10^{ES} Enc^{TS} (IAF) suites : 7	Déf croissance décroissance 2^T (ou stricte) + 2^T	App IAF $27^T + 2^D$ [g∘f si f' ≥ 2^T] Th mon 12^M formul dériv 25^T IAF + Val abs : 5^T / Th eq 6^M	C : enct Num 1 I : |f| ≤ M ⇔ −M ≤ f ≤ M J : Int. graph IAF 1 → IG : 4 par IAF autonome D : ineg. fonctionnelle 1 J. dérivabilité sur Int. D par l'absurde
IS) lim Tx ($1^{ES} + 3^{ES}$) 8^{ES} FDsec : 1 Eq tgte : 6 … 5 + 1^{ES} axe sym : 1 Alg : 4 Eq : 4^{IS} INEQ : 3 pt Λ : 6 25^{IS} Var $33 + 1^{IS}$ T.Var 15^{ES} eq log 4 ineq log 7 dichot 8 in (Var) : 9 ineg fct (Var) : 2 f(x0) : 3 I. Var 15 Eq tgte 16 (pm 5) pt Λ : 4) colin tg 1 cote alg 1 suites : calc 5 ; $f^{(n)}$: 1 lim : 1 : 2 axe sym 2 ineq 6	Déf parité : 8^T Déf g∘f : 3^T Déf continuité en 1 pt = 8^T Déf dérivabilité en un point : 15^T Déf périodicité : 1^T Déf asymptote oblique : 23^T Déf primitive : 5^T Déf asympt H V : 20^T	Th continuité en 1 pt : 1^T Th gén dériv 13^T Formul dériv 2 Th monot 21^M Th eq 8^M Eq tgte : 6^T Th eq 2nd degré : 1^D Th eq trigo : 3^T Th Axe sym : 1^T Th gén dér $6^T + 4^T$ Formul dér 89^T Th mon 75^M Th Max 2^M Th axe sym 9 Th eq 20^M Th centre sym 1^T parité 1 Eq tgte 3^T Th cont en pt : 1^M Tech. de base : (IAF eq) Th mon : 11^M Form. dériv : 11 Axes de sym : 3^T IAF : 1^T Centres de sym 2^T Eq tgte : 1^T coeff tgte : 1^T	C : courbe (FG a) donnée f(x) → courbe : 1 (pm) IG eq pm : 5 (f(x) = m, x ∈ ℝ) A : existence f(x) C : méth. alg. / graph : f(e^x, m) = 0 : 1 D : inégal. par étude de fct. (direct) : 2 I : (calculs fct / eq) E : continuité (géné) : 2 dériv. géné : 2 cont, prolt en 1 pt = 5 dériv en un pt 7 E dériv. en 0 fct pm → IG 1 ; idem (IG) fct parité 9 I : renseignt si tabl var 4 V eq diff 1, I primit 4 I : posit. rel courbe / Asympt : 10 + 4 ; IG signe (f − g) 4 + 1 I : courbes conj formul (x^2, y^2, x, y) 3 ; IG lim (f − g) 4 + 1 pm I : posit. relat. courbe / tgte 1 et courbe / droite 1 J eq graph PC 1 IG courbe asympt : 2 R : intervalle d'étude I pos rel courbes 2, En / ave IG : d(A, M) extr T. A tgte parallèle à … : 4 (tâche complexe) + courbe passant par … coeff indéterminés (pm) IG eq, ineq (points Λ) : 2 IG fn (β) = β (fn)
6^{IS} + 1 (RF) Var 4^{IS} + 3 IS Forme can. 1 Asympt. 1 angle 2 — T. Alg : 1^{IS} 3 AN. 3	Déf asympt : 1^T Déf dériv : 2^M	Formule dériv 7^T Th eq 1^M Th extrema 4^D 3^M Th monot 7^M Rel trigo 1^D Rel triangle rect 3^D Trigo triangl 2^D surfaces 3^T volume cône : 1^T trigo cercle 3^D	F : expression d'une grandeur 4 I : la variable utile 2 E : l'existence d'un extrema 7
q, syst 5 Enc^T alg : 28 Cal Num 40 T Alg form can, linéaires 26 18 Autres 6 / int parties : 47 4 ES ; intégrals 113 Aires, vol : 38	Déf intégrale 19^T Déf val moyenne $3^M + 8^T$ Déf continuité 3^T	Formule dériv. 49^T il y a des Th : f continue ⇒ primit 5^T Th intég / parties 47^T ; Aires / vol 38^T Th : F = G + k pour F, G prim : 9^T intégrales, Moyenne : 2^M	T.A condition sur f' = 3 D Réc 1 Par absurde 1 TA f(x0) = y0 : 1 (cond géné, sol. unique eq diff) I suite géo 1, I eq lin 1 C méthodes F' = G' ⇒ F = G + k à l'écrit de 2 façons I const. 2
: 15 eq (+8) (11) = 25 syst (+6) FD : 77^{IS} (Vérif eq diff … 27) d'une fct sol eq diff : 3	Déf primitive : 3^T	Th eq diff lin 1er ordre : $17^T + 6^T$ Th eq diff lin 2e ordre : $28^T + 9^T$ Th (sol eq diff) g = f + f0 : 6^T Th monot 10^M Formul dériv 80^T Th max 1^M Th gén. dériv. 1	D E : choisir $f^{(n)}$ eq diff : 3 récurrence $f^{(n)}$: 2 I eq diff satisfaite par … : 11 R eq diff 1er ordre ss 2nd mbre : 19 2e ordre ss 2nd mbre : 29 R eq. diff 1er ordre avec 2nd m : 6 2e ordre avec 2nd mbre : 11 V eq diff satisf. par … 27 R aut eq diff 8 U form gén sol part : 12 U variat. cte : 3

EXERCICES ET PROBLÈMES POST-COURS

LA DERIVEE : CLASSIFICATION SELON LE

I.G = interpréter graphiquement — P.C : papier calculatrice — AA :

ÉLÉMENTS D'ANALYSE → / THÈMES ↓	Sortes et nombres d'exercices	Découpages en « sous-questions »	(p/q) { p = nbre de Réf. fournie q = nbre total de quest. E, I, P → dérivée / autres ... explicite → implicite → partiel	et D= A:
Continuité et dérivabilité (et nombre dérivé)	TP : 1 QCM : [8,4] Ex : [9,6] f. log : Exo [3,2] f. expo : Exo [3,2]	TP : dérivabilité sur I_1, I_2, I_3 → calcul f' → Var(f) → dérivabilité en 0 / en 2 → Int. Graph^t → tracé Ex : dét. graph^t ND g/d → f dérivable au p^t ? 4 (RQ 1 exo) sur PC dét graph^t dériv. → vérif calcul 3ex (5) RQ dérivabilité en x_0 → interp. graph. 1ex (4) dériv. en x_0 → sur R 1ex . f(1) → cont sur R → dér R (1)	TP : 1/9 QCM : 0/8 Ex : 3/33 f. log : 0/6 f. expo : 1/5	TP : au Ex : (d TAUX Rapp
Equations et coefficients directeurs de tangentes ; position relative Cf / tgte	TP : 1 QCM : 1 Ex : [6,6]	TP : eq tgte (f et g) → dériv (f-g) → var (f-g) → signe (f-g) → pos relative (f / tgte ((f-g)' → var (f-g)' = Var(f') → signe (f-g)' → Var(f-g)) → cas où f'' existe : lien entre Var(f') et Signe(f'') Ex : Rel f(a), f(b), f'((a+b)/2) → Prop parabole (direct)	TP : 3/10 QCM : 0/1 Ex : 3/17 log : 0/1	TP : pos po le suppl
Vitesse / accélération instantanées ; intensité électrique	Ex : [5,5]	Ex : vitesse $\frac{dx}{dt}$ → accélération $\frac{d^2x}{dt^2}$ → t / v(t) = 0 ? γ(t) = 0 ? Ex : acc → vit → loi horaire → tracé, parcours ?	Ex : 0/17	
Calculs de limites	Ex : 5 — lim/cont : TP 1	∅	Ex : 0/19 (5 exos) + 1/4 TP ($\frac{\sin x}{x}$ en 0)	"en dé
Fonctions dérivées et dérivées successives	DC : 1 Ex : [11,7] f log : Ex [4,1] f expo : Ex [5,1]	DC : AA en f(a) → AA en g (f(a)+h) (1) → composition → identifications AA pour g∘f → concl (AA fournies) Ex : f' vérifie ... → en déduire (Eq diff f, f', f'') (1)	DC : 5/6 Ex FD 3/51 (E) + 2/51 (I) Ex : ND 0/2 Fact 1 P Eq 0/1 Syst 0/1 f log x : 1/14 f expo : x : 1/19	f(x)+
Variations et Extrema	QCM : [5,5] Ex : [4,2] DC (expo) : 1 Tech. base : [19,16]	Ensemble de dérivabilité → variations : 18 Majorat. à vue → transf alg → maj à vue : 2 transf alg → maj à vue : 5 ✓ découp. abs^t détermination (f') → tracé tangente : 4 ens. dif → ens. dérivabilité → calc f' : 18	QCM : 0/5 Ex : 0/22 DC expo : 2/4 Tech base : 11/67 (Majorations : 11/11 !)	Ra Adr Uti Rapp pot,
Equations, bijections, dichotomie	QCM : 1 Ex : [3,3] limites / continuité : TP 1 Ex : [5,3] QCM : [2,2] Pb : [2,2]	$g_a(x) = 0 \iff f(x) = a$ ↦ IG Var (f) + lim ↦ f bijection de ... sur J à préciser → " " " ↦ ∃! α ∈ I / f(α) = λ donné → dicho pour f continue → strict^t monot sur ↦ interv image ↦ ∃! α / f(α) = λ ↦ dichotomie	QCM : 0/1 Ex : 1/9 QCM : 0/2 TP : 0/2 Ex : 7/19 Pb : 0/7	Mq Mq Tau " sa
Inégalité des accroissements finis	TP : 1 QCM [3,3] DC : 1 Ex [8,8] suites : 1 TP + 3 ex + 5 Pb 1 f log : 1 exercice 1	TP : Enc(g') ↦ enc^t g ("utiliser IAF") ↦ T Alg alg idem avec "étudier Var (f') sur ..." QCM : Enc (f') ↦ enc(f) IAF DC : Var (f-mx) ↦ IAF Ex : Enc^t (f') ↦ Enc^t (f) → IG (2) enc(f') → IAF suites (2) (6) Enc^t (f') ↦ IG par IAF 1 ou fournie 1	TP : (2/4)^{dér} + (3/7)^{aut} QCM : 0/8 DC : 4/4 (E) Ex : 10/22 {log expo : x 2/3 Suites : {inég par IAF 9/9 ; suivante sol eq 6/6 ; dérivée 3/17 (E) + 2 (I) / 17}	Tr Enc Enc Utilis
Etudes de fonctions	QCM : 1 Ex = [5,5] Pb : [9,7] f. log : DC : 1 TP : [3,2] Ex [18,11] Pb [7,5] QCM [4,1] Suites TP [2,2] Ex [4,4] Pb [5,4] f. expo : QCM : [7,7] Ex : [22,6] TP : 1 f. a^x : Ex [7,3] Pb [11,10] Tech base Ex [6,6]	var → éq tg ↦ min (f') ↦ IAF ↦ pos rel Cf / tgte 1 calc(g') → Var(g) → Sgn(g) → f' = hg → Var(f) : 5 sgn (f'') → Var (f') → sgn (f') → Var (f) : 3 Formul (x², y²) ↔ courb sym (2) (aidé) f con → AS obl : 2 ; cas délicat : lim → IG asympt : 1 périodicité, parité "éventuelle" → Variat (f trigo) : 5 Abs. p^t en lequel tgte // à ... → éq tgte → f(x) = x + m : 2 (à résoudre) parité, périodicité → réduction : 1 f expo : φ'' → Var φ' → sgn(φ') → Var(φ) → sgne(φ) → pos rel Cf / tgte Var f → sgne(f) 2 Var(f') → sgn(f') → Var(f) → sgn(f) : 20 sgn (...) → sgn (f') : 2 enc^t → as obl 1 as obl → pos rel 5 Var ↔ Valeurs → sgn : 4 Domain déf fourni → lim bornes sol f log et expo : Var f → maj / min / inég fct 5 ; Var f → sgn (f) → Var g 4 enc (f') → IAF → enc (f) 2 , ég, inég log → sgne (f') : 3 Var (f) → calc (f(x0)) → maj / min (f) : 2 Calc alg → signe 1 sign (f-g) ou lim (f-g) → IG 2x2 g(0) → étude x^α → lim (disc à sentir) → IG, dérivabil	Ex : 6/40 Pb : dérivée : E 6/29 P 1/29 autres : E 14/62 P 11/62 AN 2 f log : TP 5/17 E + 1/17 P QCM 0/4 + DC 1/3 Pb : 18/53 Autres 10/12 f expo : TP 0/1 QCM 0/7 Ex 9/56 (Aut 1/8) Tech base 4/22 (autres)	para Et (axe Trig Tra T A Enc " Pa Etu R.C " ut " ut " co " n
Optimisation	Pb : [7,7]	introduction d'une fonction → étude de cette fonction ↦ lien avec la grandeur étudiée 3/7	E : 1/29 + 5/29 (P)	Ex fou fa
Primitives + intégration	TP inté [2,2] QCM [9,9] DC [4,4] Ex : [14,7] / [54,35] Pb [9,8] log Ex [6,1] expo [8,1]	DC : (F prim ⇒ F + k prim) → (G primit ⇒ G = F + k) F' = G' ⇒ F = G + k (2 fois) linéariser → primitive G = F + k → dét. k tq ... décompo ↦ primitive 2 dérivée → une primitive de ... (5) f log : forme canon. → primitive (2)	QCM : 0/3 log : Ex 0/16 DC : 3/5 (E) Expo : Ex 0/19 Ex / Pb : 25/169 dér 41/137 HD	Re + le Tr
Equations différentielles	TP : [2,2] QCM : [11,11] DC : [2,2] Ex : [40,20] Pb : [7,4]	sol partic (forme donnée) → h = f - f₀ sol eq sans second membre → f sol géné avec (à déterminer ou fction à paramètres pour une sol partic)	QCM 0/11 TP 5/12 + P 4/12 DC 13/13 Ex 30/162 (E) + 11/162 (P) Pb 10/65 (E) + 7/65 (P)	Cal calc pose for pos

[m, n] : m ⟶ nombre d'exercices
n ⟶ nombre de types d'exercices différents

DC : « démonstrations de cours »
pm : paramètres

.S AIDES A LA RÉSOLUTION

DÉCLIC Term S (HACHETTE EDUCATION)

formule de l'approximation affine

Indications techniques (T) Rappels de cours (θ) dérivée G = général autres P = particulier	P[t] Méthode (T/θ) et Réf à un exercice corrigé (utilis) G/P E/NE	Aides à la résolution « les plus significatives »	Absences d'aide (degré d'autonomie élève sollicité)
compl cours : dérivabilité à g/à d point, ND associés, interp. graphique Contre ex fourni, p[t] non fourni Eiv sym ≠ dériv : $\lvert x\rvert$ acc[t] g/d → f dériv ? 1exo (RQ:1) $\lim_0 x\ln x = 0$ (1)	"Utilisations" : dérivabilité en 1 p[t] / sur un intervalle interprét. graphique : coeff directeur tangente (exo corrigé : $x \to (x-1)\sqrt{x^2-1}$)	TP : Isoler points à problèmes et intervalles où les théor. généraux s'appliquent. Ex : "On suppose f cont. sur ℝ (2exo f) → déterminer les pm a, b pour que f soit dérivable sur ℝ" Ex : dérivabilité p[t] à pb : décompos limite en produit (en 0, $(1-e^{-x})\ln x$) continuité Evolution : (f dériv en 1 → sur ℝ) → directement,	fct. log : étude "directe" continuité, dérivabilité au p[t] de jonction / 2 exos fct. expo : idem 1/2 (C) dérivée en 1p[t] sans aide sauf 1[e] exos… ex35p156 dériv sur ℝ (exo suivant)
indic des 4 positions relatives possibles courbe / tangente position relative Cf / tgte donnée par signe de f−g" cours : p[t] inflexion, convexité (θ)	$\emptyset$	Schémas donnant la pos. rel. courbe / tangentes : paraboles $y = ax^2+bx+c$ pour $a>0$, $a<0$ (sur-découpage du TP sur ce thème…) $x \to x^3+3x^2-x+1$ en −1 (traversée courbe / tgte) . pos. rel Cf / tg en a tq $f''(a)=0$ (inég. algébrique → pas	Interp. graph non suggérée (prop parabole $y=x^2$) f impaire → tgte traverse courbe en 0, ss aide d'autres aides…)
Absence totale de cours sur la notion d'accélération	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
utilisant la définition de la dérivabilité, calculer les limites…"	$\emptyset$	" en utilisant la définition de la dérivabilité en a, calculer les limites suivantes"	$\emptyset$
$\frac{1-x^5}{1-x}$ → f' de 2 façons différentes → en déduire $\sum_1^4 kx^{k-1} = \dots$ → géné $\sum_1^n k x^{k-1}$	$\emptyset$	$g' \to (g\circ f)'$: guidage (2fois) formule de récurrence de $f^{(n)}$ donnée ($f(x)=\frac{1}{x}$)	$\emptyset$
rappel : $\ln(e^x)=x$ …ités : l'expo. est dérivable sur ℝ utiliser la formule de $(g\circ f)'$ …s : fct bornée (déf), th gén dériv fract, r, comment tracer une tangente	Tech de base : Etudier les variations de $x \to k u(x-\alpha)+\beta$ selon k sachant que u est ↗ ou ↘ → application à des cas	Ensemble de dérivabilité → variations : 18 Variations de φ → déterminer φ(0) → en déduire l'inégalité sur $\mathbb{R}_+$ Utiliser $(\ln o u)' = (g o f)'$ pour avoir la dérivée de l'expo : DC 1	Directement : déterminer a, b tq f possède 2 schémas : (1)
f bijective de… sur… (inter donné) 2 exos f bijct de… sur J à préciser 2 exos acc[t] donné → dériv g/d : 1[ère] dérivée, mq f strict[t] monotone"	"Utilisations" : résolution approchée d'équations type $f(x)=\lambda$; Ex : $x^3-3x=3$	"Retrouver algébriquement le nbre et le signe des solutions à $f(x)=a$", "Utiliser le tabl. var. (f) pour avoir le nbre et le signé des sol de $f(x)=a$" I, intervalle image : donné 5/7, demandé 2/7	Directement Variat → Eq approchée dichot 1/5 (après d'autres exos plus aidés)
…f inég : 3 illust. graph donnée 2/5 (f') : hyp 2/11 à prouver 8/11 · Absente 1/11 f) : à prouver 9/12 Absent 3/12 …IAF" : 5 fois Max/min (f) = donnés 9/… Max/Min (f') : 1/7	$\emptyset$	Illustrations : 1 fois à justifier (Cf ∈ zone par l'IAF) sur EC, 3 fois comme aide supplémentaire (TP + Ex) Enc[t] (f') donné (retrouver algébr[t]) ou var (f') demandées 11 Titres) Acc finis précède listes ; IG fournie au début liste Encadrement ⟶ IG 7/18 / autres et plus après : titre	Encadrements directs même requis par IAF (précisé) Ineg $\tan x \geq x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ directe dans Exph…
…ites : discussion orientée ($x^n\sqrt{1-x}$…que) Val ABS → Transf algébric 2 …ut sym donnés, faute → en déd Var, lim sol d'équat (C) : Transf somme en produit → Var …rst alg pour calc lim : 2 (fact / e^x) … → as cbl fournie → Pos rel Cf / as : 3 … part / tot → sgne (f') → Var (f) : 3 …onn une somme de fct, pour ét. dériv" …de de fct trigo : Exp factor (f') donnée chg[t] var → lim To Red → f' → Var → tracé …us : $\lim_0 \ln(1+h)/h = 1$ cos(a+b) = … …liser les règles sur les inégalités" …lyse le sens de variation" …idérer f comme somme de 2 fct" …ter f' a et du signe de…" → variat	"Utilisations" : Red domaine d'étude → f' → signe (f') → Var(f) → tracé par sym (fctions trigo) Ex : $f(x)=\cos^2 x \sin 2x$ Techniques de bases : • Rappels axes, centres de symétrie • Rappel gof (déf) • Comment obtenir Cg à partir de Cu sachant que $f(x)=ku(x-\alpha)+\beta$ Ex expess → courbe et réc	"Etudier la dérivabilité, en particulier aux points… → conséquences graphiques (quasi-systématique). Dérivabilité en 0, fct param → cas donnés, taux donné Taux fourni dans les situat. délicates (2 p[ts] à pb, 0 et 1, pour $x \to (1-\sqrt{1-x^3})/x$; nouvelles fctions dans des cas délicats : $x \to e^{\ln x / x}$ en 0 ; $x \to x^\alpha$ en 0 selon α) Expressions de dérivées données selon d'autres fonctions (montrer que $f' = hg$ où $h>0$ et g étudiée avant et de variat et de signe connus). "Donner un tableau de variat complet" Fct. trigo : signe (h) → signe ($f'=kh$)… → décroit Mq l'éq $f(x)=0$ admet une unique sol → donne le signe implicit Titre : "étude d'une fonction auxilliaire" (1 f log + 2 f. expo) et sgn → pos Cf / tg ; aides partie : $f(x)-g(x) = xf'(x)$ → signe (f−g) … Eq pm : discussion guidée → lim f, g → Int. Graph "Montrer que l'on peut restreindre l'étude à…" (trigo) dér-log : 3 formules fournies $f' = kg$ - 3 I.G $d(AM) = k$	Absence d'aide : Eq pm → intro fct. → trait[t] graph (1 fois) dérivabilité en un p[t] particulier : le plus souvent sans aide… asympt. horiz / vert : IG lim, Mq il existe une asymptote (18/20) (fct log / expo) Asympt données : 14/16 oblig Eq 2[nd] d° en e^x : ss aide
…estion de la grandeur fournie 3/… …e agréable de la dérivée donnée (1) …e canonique de la fonction rat (1) 3 ETUDES FCTION GUIDEES	encart méthodo. en début de liste : choisir l'inconnue, exprim grandeur / x, étudier les schéma	• Données littérales : 5/7 (2 fois implicites) • Inconnue : donnée 5/7 (2 fois implicite) • grandeur : donnée 3/7 par la fction donnée à étudier • schémas ⟶ et figures géom : 6/7	Dans 4 problèmes sur 7, aucune indication du résultat (grandeur) à exprimer
…pel de cours : primitive ($\frac{u'}{u}$) (1) …ide pour identifier u' dans numérateur. …nsf alg pour faire apparaître $\frac{u'}{u}$ (1)	"Utilisations" : • calcul primitive, vérifier primit partic, générale… expo : prim $u'u^\alpha$, $u'e^u$	"Faire une intégration par parties." Transformations (économiq / fractions - linéarisation transf. algébrique…) avant primitiv Dériver une fction pour avoir des primit. d'une autre expo : $P(x)e^x$ ⟶ forme de la primit. donnée	$\emptyset$
…uler f'' → en déduire l'éq diff. …ler à l'aide d'une intég / parties … $g = f'$ dans $f''+2f' = 0$ …e sol part donnée → vérifier… … $g(x) = e^x f(x)$ → var cste.	"Utilisations" : Trouver une sol partic éq diff ordre 1 (utilis énoncé) Résoudre l'éq diff ordre 2 sans second membre	changements de fonctions pour résoudre l'éq diff avec second membre, solution partic donnée, vérification du fait que $f = f_0 + g$ demandée forme de solution particulière donnée	$\emptyset$

EXERCICES ET PROBLÈMES POST-COURS

LA DÉRIVÉE : ANALYSE SELON TYPES D'OBJETS

ÉLÉMENTS D'ANALYSE → / THÈMES ↓	Concepts / énoncés objets / outils (OB/OU) explicites / implicites (Ex/Im)	Connections effectuées	Champs réels d'investigation	Ch… ou …
Continuité Dérivabilité Nombre dérivé	Cond contin. /OB/Ex : 5 Cond dériv /OB/Ex : 25 ND/OB/Ex : 3 ND/OU/Im : 25 FD/OU/Im : 7 dériv ⇒ continue OU/Im : 1 Th gén dériv /OU/Ex : 4 Th monot /OU/Im : 1	ND et racines d'ordre k polyn (pas de théorisation, étude d'un cas particulier) – ND ⟷ ND sym (récip, CE) Lectures de courbes et confrontation avec le calcul	– Fonctions à $\sqrt{\ }$, val abs (surtout) – Fonctions déf par deux expres plus rares – 2 expos à pm (dont 1 fonction déf implicitement "raccords" = polynôme sur [a,b]) – Fctions log / expo → pas de pm – Disparition de la déf par AA dans les expos - - - - - -	• x → x… • compos… • fonct… • pathol… lim 1… x → … • pas de… • fréqu… situation…
Equations et coeff dir de tangentes Positions relatives courbes / tangentes	EQ tgte /OB/Ex : 5 EQ tgte /OB/IM : 1 ND/OU/Ex : 1 ND/OU/Im : 7 FD/OU/Ex : 1 FD/OU/Im : 7	Fct. usuelles partic lien avec le graphe : IG : parabole : ∀a ∀b $f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ Pt inflexion – convexité / concavité position rel Cf / tgte (TP)	Liens avec le graphe (interp. très simples) Position relative Cf / tangente : Cas où $f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)$ est de signe déterminable algébt.	Cas où … dérivab… où droit… tangen… de l'ét… courbe…
Vitesse et accélération instantanées Intensité élect.	FD/OU/Im : 3 Prim/OU/Im : 4 ND/OU/Im : 3 Th mon/OU/Im : 1	Mouvement rectiligne, champs de pesanteur, pb de ressort – d'intensité électrique, dérivée seconde	Surtout des fonctions trigo très simples. Cette fois, on prim des fonctions $\gamma(t) \to v(t) \to x(t)$ avec C.I	… vitesse
Calculs de limites	ND/OU/Im : 11 ND/OU/Ex : 11	Par la définition de la dérivabilité (suggéré)	Reconnaître des taux d'accroissements dans des cas simples. Fctions $\sqrt{\ }$, trigo…	Reconna… plus déli… fonctions…
Fonctions dérivées Dérivées successives	FD/OB/Ex : 80 FD/OU/Im : 6 AA/OU/Im : 3 ND/OU/Ex : 2	Fonctions usuelles à dériver 2, 3, 4 fois mais une seule dérivée nième (formule donnée, réc suggérée) – Justifier dérivabil avant de dériver – Eq diff & déduire de dérivées succ DEL $(g\circ f)$ par dif par AA	Fonctions particulières usuelles à dériver plusieurs fois, 1 seul cas gén $x \to (1/x)^{(n)}$	Dérivée… soi-mê… par réc… Tht ahi… que x → …
Variations et Extrema	FD/OU/Im : 46 ; FD/OU/Ex : 3 Var/OB/Ex : 27, Var/OB/Im : 1 Th monot /OU/Im 31 Th extr /OU/Im 5 ND/OU/Ex 4	Majorations à vue, algébriques Transfo algébriques : IG : lire var et dériver, schéma var(f) sur Cf Etudes qualitatives : Var $(f+g)$, Var $kf(x-\alpha)+\beta$, $\sqrt{f}$, f^2, $1/f$	Fonctions usuelles particulières Etudes dirigées Discussions graphiques	Discuss… des hyp… d'un … Hyp stri… T. Var …
Equations, Bijections, dichotomie	FD/OU/Im 40 ; ND/OB/Ex 1 Th mon/OU/Im 14 ; f(I) OU/Ex 7 Strict mon/OB/Ex 1 ; dériv/OB/Ex 1 Th bij /OU/Im 6 Th Eq/OU/Im 8 Th dériv ⇒ cont /OU/Im 8	• Théo : f dériv ⇒ f continue • Lectures graphiques $f(x)=m$: nb sol, bijectivité, lecture sur Cf • Eq spécifiques : $\cos x = a$, $\sin x = a$	Fonctions ~~usuelles~~ particulières, cas où f est strict monot. et continue (ou dérivable) sur les divers intervalles considérés (zéros repérables sur T. des Var)	Ca… Fonct… Fonct. sur le… Cas où … des inter… usc hypo…
Inégalités des accroissements finis	FD/OU/Ex 12 FD/OU/Im 13 IAF/OB/Ex 1 Th mon/OU/Im 12 IAF/OU/Ex 9 Th Eq/OU/Ex 6 IAF/OU/Im 12 ND/OU/Im 1 Eq tgte /OB/Ex 1	Interprétation graphique d'encadt fonctionnels, approxim numériq Position relative courbe / tangente DC : par étude des var de $x \to f(x)-mx$	Fonctions usuelles plutôt simples (ex : dém $\tan x \geq x$, $\sqrt{x+h}$, $x \to \frac{1}{1+x^2}$, $x \to 1-\frac{1}{2}x+\cos x$ …) Cas généraux ss caract de difficulté (hyp : $\|f'(x)\| \leq a$ sur I) utilis. précise Applic simples, directes, dirigées	IAF peu… les ét… (sauf … suites ré… Pas de ca…
Etudes de fonctions	FD/OU/Im 72 FD/OB/Ex 23 Th monot/OU/Im 107 Contin/OB/Ex 8 dér/OB/Ex 15 Eq tangente OB/Ex 10 Th gén dériv OU/Im 23 Th max/OU/Im 2 Th éq OU/Im 5 primitives OU/Im 20	Fonctions à radicaux / valeurs absolues, log expo, position rel. courbes / droite, courbe / courbe, points d'intersection asympt. plus délicates qu'en 1ère S (ex : $x \to 2x-\sqrt{1+x^2}$ …) Aspects géométriques graphiques Transformations complexes $f(x)=m$	Encadt plus uniquement algéb. avec l'utilisation des fctions log / Expo ⟶ étude par dériv successives ⟶ IAF Etudes de fonctions auxilliaires très dirigées, limites, valeurs soll. Pas que des fonctions (Ex cissoïde de Dioclès). Reconn ½ cercle.	– Cas gén… – Etude… tableau… en ch… successi… de fonct…
Optimisation	Cont. dér/OB/Ex 3 ND/OU/Im 2 FD/OU/Im 6 Eq tgte OB/Ex 2 FD/OU/Ex 1 Th extr OU/Im 7 Var/OU/Im 4 Th mon OU/Im 7 Var/OB/Ex 3	Opti. vol, aires, distances, angles … Cube dont le fond est une pyramide creuse → continuité, dérivabilité de la fonction volume v(h)	Modélisation guidée ou pas, formalisation finale donnée ou pas 2 parties bien séparées de l'exercice : modélisation → étude de fonction	
Intégration, primitives, applications	prim OU/Im 198 prim OB/Ex 9 Déf intég OU/Im 198 Int / parties OU/Im 5 + OU/Ex 42 Interp graph de l'int OU/Im 38 Théo généraux 55 (OU/Im) FD OB/Ex 8 FD/OU/Im 41 Déf (val moyenne…) OB/Ex 14	Décomposition de fractions Calcul de 2 intégrales I et J à la fois (par I+J, I−J …) Linéarisation, suite d'intégrales IG : ½ cercles, volume, aire compar. avec les rectangles Encadrements, valeurs approchées	Fonctions usuelles, primitives directes ou par intégrations par parties suggérées Cas "concrets" de valeurs moyenne (domaine médical)	intégr… parties… intégr… dérivab… Cauchy… Sommes…
Equations différentielles	Th éq homo 1er ordre OU/Im 23 Th éq homo 2e ordre OU/Im 37 FD OB/Ex 104 Prim OB/Im 15 Th monot/OU/Im 10 Th max OU/Im 1 Var OB/Ex 17	Qq études de famille de courbes par recherche de primitives, trouver une équadiff satisfaite par… Calcul d'une dérivée nième (1 fois) PB "concrets", physiques	Recherche de solution particulière guidée (sol à vérifier ou sol donnée avec coeff indét.) La rel. f=g+h est suggérée systt	Etud…

UN STATUT OUTIL / OBJET
; FONCTION ET ENVIRONNEMENT

DÉCLIC Term S
(HACHETTE ÉDUCATION)

pm : paramètre
AA : approxim. affine (déf dériv)
FD : fonction dérivée

AA = approximation affine (déf dér) DC = démo de cours ND = nombre dérivé

TG : tangente, Tx = taux d'accroist

…amps peu …as explorés	Conséquences, effets, théorèmes en actes éventuels	Paramètres et leur environnement {explicite / implicite E/I, fonctions / points F/P, dérivée / autre D/A	Degré de généralité (Nul, Intermed, Maximal)	Application Questionnement	Notions non institutionnalisées en cours mais présentées en exercice. Notions extra-math
…sin $\frac{1}{x}$, $x \to \sin\frac{1}{x}$ …e avec valabs… $x \to \sin(x)$ …ns dif implicit! …ogies (cas où $\lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ …ravail sur le local …ralence de dif, …s où AA a de l'efficacité	Pas de pblisation, de "morale" des cas étudiés (dérivée sym) PB non étudiés : $\lim f' = f'(x_0)$? Petite familiarisation à l'étude de la dérivabilité (fction $\sqrt{\ }$, Val abs) mais forte limitation des cas étudiés. Plus de dif par AA (obsolète) donc pas de réflexion sur les dif équiv. Notion de DL ordre n non préparée	ϕ : 17 exos pm : 6 exos (pb de raccord cond graph) (E/F/D)	N : 16 exos I : 6 (pm) M : 2 (dérivée de $g \circ f$ par AA [DC] + ND symétrique)	A : 23 exos Q : 1 (mais question non ouverte dans l'ex)	- N Dérivé symétrique (ss problématisation) - Notion de dérivabilité à gauche et à droite en x_0
…il n'y a pas …ilité à gauche et … donc pas de …, Systématisation … de la position relative …tangente …	"Il y a toujours au moins des 1/2 tgtes à g et à d en tout point" (th en acte)	ϕ : 8 exos pm : 0	N : 6 exos I : 0 M : 2	A : 6 exos Q : 2 formaliser "tgte traverse courbe en O si f impaire"	TP : pt d'inflexion concavité / convexité Position relative courbe tangente et variations de f. Intro de g tq $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$
… de rotation …	—	ϕ : 5 exos pm : 0	N : 5 exos I : 0 M : 0	A : 5 exos Q : 0	intensité élect. charge élect.
…ique des taux d'acc…, avec des …log, exos mélangés	Limitations dans les fonctions étudiées (pas de $x \to \frac{e^x-1}{x}$ par exemple)	ϕ : 5 exos pm : 0	N : 5 exos I : 0 M : 0	A : 5 exos Q : 0	—
…s niées à extrapoler …e à démontrer selon sa propre …re, plus délicats $(1/x)^{(n)}$ …	—	ϕ : 20 exos pm : 1 (E, F, D)	N : 18 ($\sum kx^{k-1}$) I : 2 (dérivée nième de $x \to \frac{1}{x}$) M : 1 DC $(g \circ f)'$ par AA	A : 20 Q : 1	—
…ion systématique …du th. d'existence …premium … CNS ou …k monot. → CS ? …n chaîne (autonom…)	Pas de véritable technol. pour les extrema repérés directement sur T variat.	ϕ : 24 exos pm : 5 (E, F, A)	N : 24 exos I : 5 M : 0 variat fct pm sans dériver	A : 26 ex Q : 3	—
…s généraux …ns non continues …non strict mon. …int. considérés …ne considère pas …valles (conjectures), …hèses, CS ou CNS)	Pas de technologie réelle (th VI) puisque l'on repère "graphiquement" les zéros du T. var Th. en actes possibles : "f bijective ⇔ continue, strict mon" Prop d'intervalle ss incidence …	ϕ : 11 exos pm : 3 (E, P, A) ↳ $f(x) = m$ à résoudre graphiquement	N : 11 exos I : 3 M : 0	A : 14 ex Q : 0	—
… intégrées dans …des de fonctions …ou l'étude de … par le th pt fixe) …s généraux ptiques	On entre dans un rapport initial à la notion, peu d'autonomie encore puisque utilisations ciblées, suites récu pt fixe, exos spécifiques	ϕ : 13 exos pm : 0	N : 10 exos I : 0 M : 3 DC (IAF par étude des var) $\lvert f'(x) \rvert \leq a$ sur I → Encadrement	A : 13 ex Q : 0	logarithme décimal méthode de Newton Approximation d'un point fixe
…raux — …autonome par …de variations …ine, dérivations …res, considération …n ($f'' \to f' \to f$)	Peu d'autonomie au niveau de l'étude des variations → Pas de méth. institut. ($x \to x^n \sin\frac{1}{x}$, $x \to \frac{\sin x}{x}$, $x \to \frac{e^x-1}{x}$, $x \to \ln(x+1)$, $x \to e^x - 1 - x - x^2$ p. ex) nécessitent des aides substancielles	{ϕ : 88 exos pm : 16 E/F/D (e.g pm $f(x) = a$, résol alg et graph + fction pm → suite (a_n) de zéros (pb résol $a^x = x^a$, tgtes communes)	N : 88 exos I : 14 exos M : 2 exos	A : 101 exos Q : 3 exos (suite de zéros résol $a^x = x^a$, tgtes communes à e^x, $\ln x$)	Cissoïde de Dioclès Évolution du taux de carbone 14, taux de natalité courbes asymptotes, expo de base a
—	Qqfois le découpage (model, ét. de fonction) correspond au fait que le pb d'optimis. est un "alibi" à l'étude de fonction	ϕ : 7 exos pm : 0	N : 7 exos I : 0 M : 0	A : 7 exos Q : 0	charge q, intensité; condensateur → $i = \frac{dq}{dt}$ notion de pH Magnitude des étoiles
…ations par …autonomes, …les indéfinies …on de $x \to \int_a^{u(x)} f(t)dt$ …Schwarz …de Riemann	- Dépendance au contexte - Des thèmes effleurés (sommes de Riemann) dans les exos mais sans institutionnalis (encadrements : méthodes …)	ϕ : 95 exos pm : 11 (E, F, D) (suites d'intégrales en général …)	N : 91 exos I : 11 exos M : 4 (somme de Riemann sans le dire, comp avec les $\int$)	A : 96 exos Q : 10 (étude de $x \to \int$ …, raccord de courbe, valeur moyenne, …ination de e)	Méthode des rectangles, des trapèzes, du point milieu Centre d'inertie d'un solide, aire et volume
… qualitative	Pas d'autonomie dans la recherche de solution d'éq diff linéaires coeff csts avec 2nd membre	ϕ : 54 exos pm : 8 (E, F, D)	N : 52 exos I : 8 M : 2 (démonst. de cours)	A : 62 exos Q : 0	période d'un corps radioactif raideur d'un ressort inductance / capacité

EXERCICES ET PROBLÈMES POST_COURS

LA DÉRIVÉE : CLASSIFICATION PAR

ÉLÉMENTS D'ANALYSE → / THÈMES ↓	Sortes et nombre d'exercices	CADRES DE TRAVAIL (Algébrique, Numérique, Graphique, Géométrique, Analyse	
Continuité et dérivabilité (et nombre dérivé)	TP1 QCM [8,4] Ex [9,6] fct. log Ex [3,2] fct. exp Ex [3,2]	TP: Alg 8/11 Graph 3/11 QCM Alg 5/8 Graph 3/8 Ex: Alg 18/31 Graph 13/31 Ex: Alg 6/6	
Equations et coefficients directeurs de tangentes. Position relative courbe/tangente	TP : 1 QCM : 1 Ex : [6,6]	TP: Alg 9 Graph 5 Ex: Alg 11 + Graph 3 QCM: Graph 1	
Vitesse, accélération instantanées, intensité électrique	Ex : [5,5]	Ex : Alg 12 + Graph 3	
Calculs de limites	Ex: 5 lim/cont : TP1	Ex: Alg 19/19 TP: Alg 4/4	
Fonctions dérivées et dérivées successives	DC: 1 Ex: [4,7] f. log : Ex: [4,1] f. expo: Ex: [5,1]	DC: Alg 7/7 Ex Alg 67/67	
Variations et Extrema	QCM: [5,5] Ex : [4,2] DC expo : 1 Tech base [19,16]	QCM: Graph 5/5 DC : Alg 4/4 Ex: Alg 22/22 → 51 Graph 16	QC Ex Gr
Equations, Bijections, Dichotomie	QCM:1 Ex [3,3] lim/continuité TP1 QCM: [2,2] Ex: (5,3) Pb: [2,2]	QCM : Graph 1/1 ; QCM : Graph 2/2 Ex: Alg 2/3 + 1/2 + 5/5 ; Ex: Alg 14/18 Graph 1/3 + 1/2 ; Num 4/18	QCM:
Inégalités des accroissements finis	TP1, QCM: [3,3] DC1 Ex: [8,8] f log suites: 1TP 1er Ex[3,1] Pb [5,4]	TP: Alg 8/12 Num 4/12 Ex: Alg 15/24 Graph 5/24 Num 4/24 QCM: Alg 3/3 DC: Alg 8/8 TP: Alg 11/17 Num 4/17 Graph 2/17 Ex: Alg 13/13 + 56/67 Num: 9/67 Graph 2/67	TP Al Alg Alg Alg
Etudes de fonctions	QCM1 Ex[5,5] Pb[9,7] fct log: DC 1 TP [4,2] QCM [4,1] Ex [18,11] Pb: [7,5] fct expo : TP1 QCM [7,7] Ex[22,6] Pb [11,10] fct a^x Ex: [7,3] Suites TP [1,1] Ex [1,1] Tech base [6,6]	• QCM Graph 1 Ex Alg 22 Graph 4 Pb Alg 64 Graph 19 Num 2 DC Alg 3 TP Alg 14 Graph 2 Num 1 • QCM Alg 5 Ex Alg 19 Graph 14 Num 3 Pb Alg 66 Graph 16 Géom 2 (construction) Num 4 • TP Alg 5 Graph 2 QCM Alg 7 Pb Alg 59 Graph 19 Num 8 Ex Alg 100 Graph 19 Num 6 • TP Alg 12/18 Graph 2/18 Num 4/18 Ex Alg 2/6 Graph 4/6	QCM Ex: Pb: TP : Ex:
Optimisation	Pb [7,7]	Pb Alg 20/31 + Num 1/31 + Graph 2/31 + Géom 7/31	Pb :
Primitives, intégration	QCM: [9,9] DC: [4,1] TP [2,2] Ex: [14,7] [54,35] Pb [9,8] log [5,1] Ex (8,1)	QCM: Alg 9 + Graph 1 DC: Graph 9 TP: Alg 8/12 + Graph 4/12 Ex: Alg 48/50 + Graph 2/50 Ex Alg 203 Graph 17 Num 14 Géo 5 log Alg 19/19 exp Alg 19/19 Pb Graph 21 Alg 52 Num 7	Alg Graph Alg
Equations différentielles	TP : [2,2] QCM : [11,11] DC : [2,2] Ex : [40,20] Pb : [7,5]	TP Alg 11 + QCM Alg 28 + DC 13 Ex Alg 147 Num 5 Pb Alg 46 Num 8 Graph 2 Graph 8	Ex:

"CADRES MIS EN JEU"

DÉCLIC Term S (HACHETTE EDUCATION)

[m, n] : m ⟶ nombre d'exercices ; n ⟶ nombre d'exercices de types différents

[RQ] : répétition de questions

Interactions et changements de cadres (type / nombre) • Pris en charge par l'énoncé (ēn) • A la charge de l'élève (él)	Changements de points de vue	Observations générales
TP : Alg → Graph 3 (ēn) acn Alg ⟷ Graph 2 (ēn), Graph → Alg 3 (ēn) Ex : Alg ⟷ Graph 5 (ēn) Graph → Alg 4 (ēn) Alg → Graph 4 (ēn)	ϕ	Interprétation graphique de limite à gauche et limite à droite → guidage total (TP) Jeu de cadres (alg / graph) → fonction de vérification - piloté -
TP : Alg ⟷ Graph 1 (ēn) Ex : Alg → Graph 3 (ēn) Graph → alg 2 (ēn) 2 (él) Alg → Graph 3 (ēn)	ϕ	TP : GUIDAGE position relative Cf / tangente, repérage des différentes positions relatives possibles Traduire algébriquement : pos. relat Cf / type 2 suite à TP corde / type 1
—	ϕ	—
—	ϕ	—
—	ϕ	—
M : Graph → Alg 4 (ēn) Alg → Graph 8 (ēn) Graph → Alg 4 (ēn)	ϕ	Variations sans calcul de dérivée (-f, 2g, f+g, 2f+g, 1/f à partir du graphe de f et g ; fctions paramétrées ou non, très simples fctions du type v = ku + β où u est simple...
Graph → Alg 3 (ēn) Graph → Alg 2 (vérification - ēn) Alg → Num 4 (ēn)	ϕ	Eq : dichotomie (méth approchée) / résol algébrique (fraction rationnelle) ⟵ discussion graphique f(x) = m eq second d°
Alg → Num 8 (ēn) → Graph 1 (comparer RG sur papier quadrillé et résult. alg.) pts sur eq droite → Num 4 (él) → modalités chgt cadre → Graph 7 (ēn)	ϕ	Interaction de cadres pour vérification de la concordance Alg / Graph (rép donnée par l'énoncé dans le cadre graphique) → Ex mais pas Pb TP : Travail direct sur graphique (conjecture : suite réc pt fixe)
Graph → Alg 1 (ēn) Alg → Graph 4 (ēn, tracé de courbes) Alg → Graph 51 (ēn) (tracés, IG sollicités) Alg → Num 8 (ēn) Alg → Graph 2 (ēn) Alg ⟷ Graph 4 (variations sans dérivée) Alg ⟷ Graph 3 (lectures graphiques, fct param, étude algéb. pour vérifie) Alg → Graph 37 (ēn) Graph → Num 4 (ēn) Alg → Num 12 (ēn)	ϕ	Passages du cadre algébrique au cadre graphique standards : interpréter $\lim f(x) - ax - b = 0$, tracés, inégalités en termes de position relatives courbes/droites, interpréter $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \ldots$, discussion du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ Des tâches dans le cadre algébrique (recherche d'un centre ou d'un axe de symétrie...) qui visent à justifier une prop. graphique Passages du cadre graphique au cadre algébrique Ex : conjecture (suite récurrente) sur la convergence après tracé (toile d'araignée) → Tracés précis...
Géom → alg 6 (ēn) Alg → Num 8 (ēn) alg → Graph (ēn) 2	ϕ	Travail de modélisation / formalisation piloté de + ou - près, mais suggéré par un encart d'ordre méthodologique
→ Graph 1él + 4ēn Graph → Alg 8 (ēn) + 17 (ēn) + 2 (él) → Alg 4él + 2ēn Alg → Graph 5 (ēn) + 6 (ēn) Géo → Alg 5 (él) → Num 6 (ēn) 4 (él) 4 (ēn) Graph → Num 1 (ēn)	ϕ	Calculs de centres d'inerties, de volumes Graph donné pour aider l'élève dans le calcul Graph donnant la réponse à une question (encadrement) Méth rect / trapèze / pt milieu à appliquer de manière contrôlée (Graph + Alg + Num) Domaine pavés → calculs d'aires → calculs Num graph → Alg : sommes de Riemann, encadrement par les rectangles
Alg ⟷ Graph 4 (repérer sol part. d'éq diff sur tracé) Alg → Graph 3 (ēn) + 2 (ēn) Alg → Num 3 (ēn) + 8 (ēn)	ϕ	Identification de solutions particulières d'équa. diff. sur papier quadrillé.

EXERCICES ET PROBLÈMES POST-COURS

LA DÉRIVÉE : CLASSIFICATION PAR REPR

ÉLÉMENTS D'ANALYSE → / THÈMES ↓	Sortes et nombres d'exercices	REGISTRES CÔTÉ ÉNONCÉS — Registres : dominants (RD), secondaires (RS), minoritaires (RM), R compléments d'énoncés facultatifs (RF)	Formes particulières introduites (types)	Registres des réponses annoncées
Continuité, Dérivabilité (et nombre dérivé)	TP : 1 QCM [8,4] Ex : [9,6] fct log : Ex [3,2] fct expo : Ex [3,2]	RD : EA 16 + F 2 + RG 7 RS : EA 6 + F 16 + S 1	TP : $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (idem en 0^-) $f_g'(a)$, $f_d'(a)$, Rep. graph calculat. Rep graph. papier quadrillé, $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2}$	F : 2 EA : 1
Equations et coeff. directeurs de tangentes. Posit. rel. Cf / tgte	TP : 1 QCM : 1 Ex : [6,6]	RD : F6 + RG 1 + EA 2 RS : EA 4 + F2 + S1 + RG1 + T1	$g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$ pos. relat. courbe / tangente. Schémas pos. relative (4 cas) forme factorisée $f(b)-f(a) = \frac{b-a}{2} f'(\frac{a+b}{2})$ → facilite IG	F : 7 EA : 2 RG : 1
Vitesse et accélération instantanées, intensité électrique	Ex : [5,5]	RD : F5 RS : EA 5 + RG 1 RM : S1	$\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ $i = \frac{dq}{dt}$	—
Calculs de limites	Ex [5,1] lim / cont. TP1	RD : EA 23	$f(x) = 1/2 \left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2$	EA : 1
Fonctions dérivées Dérivées successives	DC : 1 Ex : [11,7] fct log Ex : [4,1] fct exp Ex : [5,1]	RD : EA 27	DC : définition par approximation affine de la dérivabilité	EA : 13 F : 1
Variations et Extrema	QCM : [5,5] Ex : [4,2] DC (expo) : 1 tech base [19,16]	RD : EA 18 + RG 10 + F1 RS : EA 3 + F5 RM : F4	QCM : Représentations graphiques avec pentes fournies RG sur papier quadrillé	EA : 4
Equations, Bijections, Dichotomie	Q.C.M : 1 Ex [3,3] TP : 1 QCM : [2,2] Ex [5,3] Pb [2,2]	RD : EA 2 + RG 2 + F3 RS : EA 3 + F4	Q.CM : Rep. graph sur papier quadrillé	EA : 5
Inégalités des accroissements finis	TP : 1 QCM : [3,3] DC 1 Ex [3,3] fct log [1,1] suites TP1 Ex [3,1] Pb [5,4]	RD : EA 21 + F 13 + RG 2 + EN 1 RS : F6 + RG 2 + EN 1 RM : F3 + RG1	Représentations graphiques (facultatives) données par la calculatrice. IAF avec $\lvert f(x)\rvert \le M$ et $m \le f(x) \le M$ zone grisée sur papier quadrillé (IAF)	EA : 68 EN : 2 F : 24
Etudes de fonctions	QCM 1 Ex [5,5] Pb [9,7] fct log : DC 1 TP [2,2] QCM [4,1] Ex [18,11] Pb [3,3] fct exp : TP 1 QCM [3,7] Ex 22/6 Pb [11,10] fct a^x Ex [3,3] suites TP [1,1] Ex [1,1] Tech de base Ex [6,6]	RD : EA 41 + F 43 + RG 2 RS : EA 3 + F1 + EN 1 RM : EN 1 RD : EA 31 + F 39 + RG 1 RS : EA 4 + EN 5 RM : EA 4 + EN 2 + RG 1 RD : EA 1 + F2 RS : RG 1 + EA 1	formes factorisées dérivées (ex : $f'(x) = \frac{x g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$) $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ → dérivabilité en 1 lien avec transfo complexe dans un problème $m(t) = m_0 e^{-0{,}000121t}$ (carbone 14) → Pb numériques Suite récurrente : courbe calculatrice + courbe sur papier quadrillé	F : 91 EA : 75 EN : 7
Optimisation	Pb : [7,7]	RD : F7 RS : F6 2 + S3 + I2 RM : EA 3	figures géom., schémas pour clarifier le problème, variables désignées, Expressions $f(x)$, $f'(x)$ connues 4	EA : 2 F : 1
Primitives, Intégration	QCM : [9,9] DC : [4,4] TP : [2,2] Ex : [14,7] [54,35] Pb : [9,8] Log [6,1] Exp [8,1]	RD : EA 89 + F 61 + RG 9 + F6 2 + I5 RS : EA 15 + F 33 + RG 3 RM : EA 2 + F 20 + RG 1 + EN 2 RF : 2	Graph papier quadrillé / idem + surface coloriée $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$, $\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}$, etc...	EA : 60 F : 21
Equations différentielles	TP : [2,2] QCM : [4,11] DC : [2,2] Ex : [40,20] Pb : [9,4]	RD : F 37 + EA 50 + RG 4 + F7 RS : EA 4 + F6 + I2 + RG 1 RM : F4 + EN 2	Eq diff de la physique $mx'' + fx' + kx = 0$ ...	F : 3 EA : 55

ESENTATIONS / REGISTRES SÉMIOTIQUES

DÉCLIC Term S
(HACHETTE EDUCATION)

RG = représentation graphique
S = schéma
FG = figure géométrique
I = illustration
T = tableau

EA = expression algébrique EN = expression numérique F = français (langue naturelle)

REGISTRES	CÔTÉ SOLUTIONS		OBSERVATIONS :
Registres { dominants (RD), secondaires (RS), minoritaires (RM)	Formes particulières sollicitées (types)	Registres sollicités implicitement	Registres utilisés et registres absents
RD : EA 19 + F8 + EN 1 **RS** : F12 + RG 1 + T1 **RM** : F 2	Tableaux de variations QCM : Rép. en V/F (8) Valeurs numériques entières (évaluations de pentes) $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et $\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$	RG : $x \to \|x\|$ (dérivée symétrique)	R. présents : schémas, RG calculatrices + papier quadrillé Absent : RG pour interprét. le pb dérivée sym ($x \to \|x\|$)
RD : EA 7 + F2 **RS** : RG 1 **RM** : RG 2	Tableau de signe QCM : Rép en V/F (1)	RG : 1	TP : registres sollicités variés : tableaux de signe, français : "justifier pos. relative", E.A, RG...
RD : EA 5 **RS** : RG 2 + EN 2	—	Tableaux de Variat.	registres utilisés : dx/dt, d²x/dt², v(t), $\frac{dg}{dt}$ travaillé Abs : f'(t), f''(t)
RD : EA 23	—	—	—
RD : EA 27	—	—	—
RD : EA 19 RG 5	QCM : Rép en V/F (5)	—	—
RD : EA5 + F1 **RS** : EN3	QCM : Rép en V/F (3)	—	—
RD : EA 18 + EN : 1 + RG 1 **RS** : EN 1 + RG 3 **RM** : EN6 + F8 + RG 4	QCM : Rép en V/F $\frac{3}{20}x - \frac{9}{20} \leq f(x) - f(3) \leq \frac{6}{7}x - \frac{18}{7}$ $f(x) \geqslant -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f(\pi/2)$	EA : 1 (pour avoir un encadrement numérique)	TP : Registres sollicités variés (graphique : "toiles d'araignées" pour les suites, alg, num : méth pt fixe, français (IG), justific pt fixe
RD : EA 43 **RS** : RG 7 **RM** : RG 25 + EN6 **RD** : EA 35 + EN : 5 + RG 1 **RS** : RG 8 + EA 4 + T1 + F2 **RM** : RG 8 + EN 5 + T5 **RD** : EA 2 + RG 1 **RS** : EN 1 **RM** : RG 1 + F1	QCM : rép en V/F Travail sur graphique donné (papier quadrillé), fonction paramétrée, correspondance avec le calcul Conjecture suite récurrente ("toiles d'araignées"...) Travail graphique / numérique (concordance avec l'algébrique pb concrets)	Tableaux de Variations	
RD : EA 7 **RS** : F3 + T7 **RM** : EN2 + RG2	Pb V(x) ; $f'(x) = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{S(x)}{P(x)}$ V(x) selon f(x) $f(x) = a/(x+1/2) + b/(x+1/2)^2$	Tabl. Var : 5 F : 4	—
RD : EA 99 + F4 + EN 2 + RG 2 **RS** : EA 1 + F7 + RG 7 + EN 1 **RM** : EN 9 + F 1 + RG 4	QCM : Rép en V/F	IS : graph 1 RG pour appliquer une méthode Num d'intégration (rect, trapèze, point milieu)	Calculs d'aires hachurées ou coloriées (RG calculatrice ou papier quadrillé)
RD : EA 11 + EN 1 **RS** EN 1 + RG 1 **RM** F2 + RG2 + EN2	QCM : Rép en V/F	—	—

ANNEXE 5

Sujets des Baccalauréat scientifique 1994-1995-1996
Environnement de la dérivée

Grille n°1 : Etudes de fonctions

Codage :
RF = réponse fournie
RNF = réponse non fournie pm = paramètre Spé = option de spécialité

Domaine de déf parité, axes et centres de sym	Dom. de déf : 3 RNF + 1 RF Déd d'un CDS une rel alg : 1 RF (ss indic) Centre de sym : 1 RNF + 1 RF Une sym de courbes à identifier : 1 RF Parité : 1 RF Rais^t / parité 1 RNF Mq f impaire ⇒ f' paire 1 RF
Limites	RNF : 85 RF : 3 lim cours : lim $x(\ln x)^p$ par lim $t^p e^{-t} = 0$: 3 pm + 1 RNF RNF, av indic : $\lim_0 x\ln x = 0$ 4, Transf alg 4, RF + $\lim \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (indic) : 1 fact. termes préps 5 (polyn, e^x...), RF + chg^t de variable : 1 lim. plus délicates : RNF ss ind : 3 (1 taux acc + 1 tr. alg. ... 1 taux acc. avec $\lim (x-1)\ln(x-1)$ non rappelé) ~~X = e^t~~ tx acc RNF av. ind 1, $X = 1/x$ 2, Transf $\ln(e^x+1)$: 2, réd au m̂ dénomin 1 RF ss indic tx ↗ + tr. Alg 1
Etudes locales (ou justif globales)	Continuité locale RF 2 + 2 ind $\lim x\ln x$) + RNF 1 (av. indic : "calculer limite...") Justifier continuité globale RF 1 - Justifier dériv. globale 5 RF dont 1 intég indéfinie Dériv. locale RNF 4 RF 1 RNF avec indic : calculer $\lim_0 \frac{f(x)}{x}$ → en déd. tgte en 0 3 RNF non dériv 4
Calculs de fonctions dérivées	RNF 68 + 2 pm + 4 dériv seconde - Compo avec intég. indéf : 1 RF RF 10 RF ss forme factorisée 2 - une int. indéf $\int_0^x f(t)dt$ à dériver 2 RNF
Transf de fonctions (algébriques)	• Montrer que f' est du signe de ... RF 3 - Factoris. de f' donnée RF 3 asympt oblique • f'(x) selon g(x) RF 4 - Transf alg dérivée RF 14 + 1 trigo 2 transf Fract RF
Etude des Variations	RNF : 59 + 1 pm + 2 trigo + 2 via f' RNF + indic : 2 pm (discuter selon le paramètre) RF : 3 Cas où f est la primitive d'une fction 3 RNF dont $\int_0^x f(t)dt$ RNF / indic signe dér → Var 3 (dériv du signe de ...)
Encadrements, majorations, minorations de fonctions	IAFinis 10 (méth. précisée) RF Majoration algébrique de |f'(x)| ou encadr^t alg de f'(x) sur I RF 6 + 2 Majoration de |f'(x)| ou encadrement de f'(x) par variat. de f', sgne f'' 3 RF Lire Tableau de Variations → signe fction RNF 11 + 2 av indic (placer f(0)...) RF 2 + 6 selon α zéro de la fonction (valeur exacte inconnue) comparer 2 fct 2 RNF + 1 av indic (placer f(0)...) Résumer Variations par un T. Variations 17 RNF $f(I) \subset I$ 6 RF, $f(I) = ?$ 1 RNF RF $f(x) < 1/2$ sur [2, 3] par déf de f croissante 1
Tangentes	RNF 14 + 2 (pm) ident. tgte avec aut. droite 1 RF Cond p^t + tgte → dét pm fct 1 RNF Sym de tgtes / Y = x : 1 RF Cond // à une tgte (pm) 1 RNF Cond p^t où tgte a un coeff de... 1 RNF Autre éq. droite : 1 RNF Cond ordonnée à l'origine : 1 RNF (pm) Spé : courbe paramétrée : cas où la tgte est // à un axe : RNF 2 + vect. tgt en 1 p^t : RNF 2
Droites et courbes Asymptotes	Horizontales / Verticales : RF 3, RNF 7, RNF mais indic ("déduire de telle limite") : 4 Obliques : RF 6, RF + transf alg. donnée 2, RF + "utiliser tel calcul de limite" : 2 courbe asymptote : RNF 1 (mais indic : "que déduire de telle limite ?")
Existence et Unicité d'une solution de l'équation f(x) = 0 sur ... + Encad. Num	RF : 30 RF + pm (f(x) = k) : 2 RF + Méthode : 2 } Expliquer méthode ? 1 (RNF) intervalle donné : 16 + 2 av indic : "calculer f(0), f(1)..." (RF) intervalle non fourni : 1 (RNF) Encadrement numérique à 10^{-2} ou 10^{-1} : { 6 RNF, 14 RF "Vérifier qu'il n'y a pas de sol sur..." 3 (RF) Fction trigo = biject de ... sur ... 1 (RF)
Calcul Numérique	Exact 9 RNF Approché 20 RNF ... dont : $f(x_i)_{i=1,..6}$ RNF 6 ; $(u_i)_{i=1,..5}$ RNF 5 et : • Encadrement Num de x_0 → enc de $f(x_0)$ RNF 1 • Pour α ≈ ... val approchée de f(α) RNF 1
Autres tâches	Calculs et transformations algébriques : - générales : RF 6 RNF 2 - relatives à la sol α (non calculable de manière exacte) d'une éq f(x) = 0 RF 12 + 2 avec pm Déf. de la croissance / décroissance d'une fonction f utilisée pour l'étude d'une suite (x_n) de zéro de f : 1 RF

Sujets du Baccalauréat scientifique 1994-1995-1996
Environnement de la dérivée

Grille n°2 — Intégration - Equations différentielles

Codage:
RF = réponse fournie
RNF = réponse non fournie
pm = paramètre
SPÉ = option de spécialité

Calculs directs de primitives ou d'intégrales	RNF 17 RF 1 RF + méthode 1 Méth seule (RNF): 1 Recoller des morceaux: 1 RNF Av. indic : → décompo fct. donnée 4 RNF (fraction, $f(x)=x^{1/2}-x^{3/2}$, $\tan^2\theta=(1+\tan^2\theta)-1$) Appliquer primitive entre 2 points : 5 RNF Vérifier que f est une primitive de... : 2 RF Vérifier que F est la primitive s'annulant en 0 : 1 RF Quest plus théoriques / originales : $F'=G' \Rightarrow F=G+K$ à utiliser RNF 2, Justifier l'existence d'une intégrale RF 1, $\int_0^x f(t)\,dt$ = prim de... s'annulant en 0 RF 1
Intégrations par parties	• M (méthode précisée) RNF 17 ; M + indication ($\frac{x}{x+1}=f'(x)$) : RNF 1 • M = deux intég / parties RNF 2 • RF + Méthode RNF 8 (précisée)
Calculs d'aires	• Aire en cm² à partir d'une primitive : 5 RNF (1 cas à pm), à p. d'une int. 1 RNF • Aire en cm² à partir d'un léger calcul restant : 4 RNF • Aire / calc total : 7 RNF dont 5 sont complexes (droite oblique - courbe C_f) (+ 1 intersection courbe/droite à trouver seul, et 1 calcul dif. d'un paramètre avec util. d'une rel. vérifiée par ce paramètre pour simplifier le résultat, seul) 2 tâches complexes
Valeurs numériques approchées / exactes	• 5 Valeurs approchées (RNF) + 8 valeurs exactes (RNF) (1 exercice : "Voir que 3 courbes partagent un carré") • Encadrement de α sol de $f(x)=0$ → Encadrement de $\int_0^\alpha f(t)\,dt$ à 10^{-2} 1 (RNF)
Encadrements, Majorations, Minorations	• Encadrement fonctionnel → encadrement d'intégrale RF 9 • Encadrement de la limite d'une suite d'intégrale : 1 RNF • Exemple d'encadrement d'intégrale I_n : $0 \leq \int_1^e (\ln t)^n\,dt < e-1$
Limite de suites (I_n) d'intégrales	• $I_n=f(n)$ où f est une fonction usuelle : RNF 3 + 2 av indic techn. ($n=\ln(e^n)$ et "en déduire") • Th des gendarmes : RNF 5 (dont 1 avec une inég. à intégrer) • $(A_n-B_n) \to 0$, $\to \ell-\ell'$ $n\to\infty$ donc $\ell=\ell'$ $B_n \leq I \leq A_n$ donc $\lim A_n = \lim B_n = I$ (suites adjacentes) RNF 1 • Mélange de variables : $\lim_{t\to 0} I_n(t) = ?$ RF 1
Monotonie et convergence d'une suite (I_n) d'intégrales	• Monotonie de (I_n) : $u_{n+1}-u_n$ ... 4 (RF), constater que $u_n=f(n)$ avec f monotone : 2 (RF) $u_n=\int_1^n f(x)\,dx$ avec $f>0$ 1 RF, $\int_{1/n}^e f(t)\,dt$ avec $f\geq 0$ 1 RF + 1 à déd direct : 1 (RF) • Convergence (SPÉ) : Utilisation du théorème "Toute suite ↗ (resp ↘) et maj (resp min) converge" 6 (RF)
Calculs et transformations Algébriques...	• $I_{n+1}=f(I_n)$ → I_n selon n ? 3 RF • Système en I_n, J_n ou en I, J à résoudre : 2 (RNF) • Transf. algéb. : 3 RNF + 1 RF
Equations Différentielles (uniquement ordre 2, lin, à coeff const)	• Eq. diff. lin. homo. à coeff constants, du 2nd ordre : 4 (RNF) • Vérif sol part pour eq géné : RF + Méth 1, par coeff indéterm RNF 1 • Recherche d'une sol partic de l'éq. homogène avec Cond. Init. { sur f : 1 (RNF) ; géom : 3 (RNF) • "La sol de l'éq géné av 2nd membre est la somme..." { admis 1 (RF) ; à dém 1 (RF) → Conclure 2 (RNF)

Sujets du Baccalauréat scientifique 1994-1995-1996
Environnement de la dérivée

Codage :
RF = réponse fournie
RNF = réponse non fournie

Grille n°3 : Sous-tâches graphiques, Equations et inéquations
Séquences classiques – Problèmes minoritaires

pm = paramètre SPÉ = option de spécialité

Tracés de courbes et de droites	(RNF) 47 courbes, 29 droites, 1 courbe paramétrée 1 pente en un point
Interp. graph^t $\lim_{x \to x_0}$ taux acc	(RNF) → 2 cas de fonctions dérivables → 2 cas de fonctions non dérivables
Intersections de courbes et de droites	(RNF) 7 + 2 pm RNF 2 pm intersection courbe paramétrée / axes
Positions relatives courbe/droite	RNF 12 + 3 sur indications (déduire du signe de...) 2 courbes : 4 RNF 2 courbes C_k : 1 RNF (av. indic) 2 courbes asymptotes : 2 RNF invers^t : comparer e^t et $t+1$ par observation de la courbe 1 RNF
Interprétations graphiques d'une intégrale en termes d'aires	RNF 6 cas faciles + 9 cas plus délicats (aire entre courbe et droite oblique) 1 cas général : $\int_0^x f(t)dt$ avec $f \geq 0$ (→ 2 cas : $x>0$ et $x<0$) 3 cas faciles avec aide ("hachurer la partie qui...") 2 cas où la relation de Chasles est à utiliser sans indications Int. graph^t • une inég. entre intég : 2 RNF → lim suite = $\int$ somme de Riemann RF 2 • un encadr^t d'intégrale : 1 RNF • A partir d'une aire dessinée → faire le calcul 1 RNF • $\lim_{\lambda \to} A(\lambda)$: 4 RNF ; Comparaison suite / intégrale par les rectangles 3 RNF
Equations et Inéquations algébriques, Inégalités à établir (Hors sens de variation)	Equations 8 RNF Inéquations 5 RNF pm 1 RNF + 1 RF Inéq + Val approchée : chercher λ tel que $\lvert A(\lambda) - A \rvert \leq 10^{-2}$ RNF 1 Inégalités trigo 5 RF (trinôme en $\sin x$) Autres inégalités 1 RF + 4 RNF + 2 RNF / indic : "utiliser questions précédentes"
Divers	• Int. graph $f_{1/2} = \frac{f_0 + f_1}{2}$ (déduire une constr. géom. de $C_{f_{1/2}}$) 1 RNF • dire le nombre de solution de l'équation paramétrée $g(x) = k$ 1 RNF • Identifier k correspondant aux courbes C_k données 1 RNF
Filières	• Etude de limites → variations → $\exists ! \alpha$ $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in [a, b]$ → val. a/p à 10^{-2} de α 30 • $f(I) \subset I$ ($u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n$ $u_n \in I$ néc) → $\lvert f'(x) \rvert \leq a < 1$ sur I → $\forall x \in I$ $\forall y \in I$ $\lvert f(x) - f(y) \rvert \leq a \lvert x - y \rvert$ → $\forall n$ $\lvert u_{n+1} - \alpha \rvert \leq a \lvert u_n - \alpha \rvert$ → $\lvert u_n - \alpha \rvert \leq k . a^n$ ($\forall n$) → th gendarmes limite pour → trouver n_0 / $\lvert u_{n_0} - \alpha \rvert \leq 10^{-2}$ → Val ap de u_{n_0} 10 • calcul de primitive → calcul d'aire 6 RNF ; • Dériver une fct pour voir que c'est une primitive de... 4 RNF + 1 RF • f'' → variations (f') → signe (f') → variations (f) ou ét. fonct. auxilliaire ($f' = kg$) 2 • Equa diff homogènes (g) → sol partic de l'éq géné (h) → $f = g + h$ = sol géné de l'éq géné → conclure 2 RNF
Quelques thèmes de problèmes plus originaux ou peu répandus	• Recherche des tangentes communes à $x \to e^x$ et $x \to \ln x$ (→ Bilan) • Calcul de $\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{t+1} dt$ par $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{t+1}$ et $h \circ k$ avec $k(x) = \tan^2 x$ (dériver puis primitiver) • Calcul de la limite de $S_n = 1 - 1/2 + 1/3 \cdots + (-1)^{n+1}/n$ quand $n \to +\infty$ • Etude de fonctions trigos → 3 seulement et très simple ($x \to \sin \pi x$, $x \to \cos x$, ...) • Etude de la suite des zéros d'une éq paramétrée $f(x) = n$ ($k \in \mathbb{N}$) ; • suite $\left(\frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!}\right)$

EXERCICES ET PROBLÈMES DONNÉS EN TRAVAUX DIRIGÉS

LA DÉRIVÉE : DÉCOMPOSITION DES TYPES DE SOUS

THÈMES ↓ / ÉLÉMENTS D'ANALYSE →	Sous-tâches graphiques (tracés sollicités, interprét. graphiques, tracés pour raisonner, lectures ou production de courbes...)	(c) Calculs < explicitement sollicité (ES), implicitement sollicités (IS), ES avec réponse fournie (RF) Rubriques : ND, FD, lim, TAlg, DL, Maj/Min, Var, $Tx \uparrow$, Réc, Chgt Var, Eq, Inéq, tgte	Applique D=dérivée T=technique
Continuité et dérivabilité	Tracé de courbe : 1^{ES} IG : $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l$: 1^{IS} 1^{IS} $\lim_{x\to x_0} Tx = \infty$ IG : DL (pos rel. Cf/tgte) : 5ES	ND : 2^{IS} FD : $7^{IS} + 2^{ES}$ lim : 13^{IS} lim f' : 1^{ES} TAlg, 1^{ES} Chg^T Var : 3^{IS} Calc. alg. (taux) : 1^{IS} Eq tgte : 5^{ES} Réc : 1^{ES} DL : 8ES + 3IS div pol 2^{IS} + composée DL : 3^{IS}	Continuité. continuité dérivabilité dérivabilité
Limites (et équivalents, o...)	ϕ	TAlg. : 8^{IS} FD / ND : 2^{ES} Chg^T Var : 3^{IS} Quant. conjuguées 1^{IS} (nouvelles fonctions) DL : $13^{ES} + 22^{IS}$ (14 limits) chg^T Var dans DL : 7^{IS} usuels composée de DL : 13^{IS} développer polyn. 5^{IS} $f(x)^{g(x)} = e^{g \ln f}$: 6^{IS}	$f \underset{x_0}{\sim} g$: 1^T
Fonctions dérivées, dérivées successives et convexité	Vérif $graph^T$ pos Cf/tgte 1^{ES} IG encadrement 1^{ES} Imaginer CE $graph^T$ 1^{IS} Tracer Cf pour $x \xrightarrow{f} e^{-x^2}$ 1^{ES}	FD $f^{(n)}$ pour avoir $(fg)^{(n)}$ 1^{IS} FD seconde 1^{IS} FD 4^{IS} Var 1^{IS} Calculs des C_n^p 2^{IS} Etude de fction 1^{ES} lim 2^{IS} Parité : 1^{IS} Inéq 2^{IS} Encadrement 2^{IS}	Déf conv Déf p^T
Variations et études de fonctions	I. $Graph^T$ un encadrement pour avoir une CN au graphe IG lim u' = 0 1^{IS} 1^{ES} IG ∞ $ch^2 - sh^2 = 1$ 1^{ES} Allure courbe S^T étude complète ($\sin(x^2)/x$) 1^{ES} Tracé qualit. nelle fct. 1^{ES} Tracé usuels 5ES Cf^{-1} 4^{ES}	Var $5^{ES} + 2^{IS}$ FD $1^{ES} + 5^{IS}$ Parité 1^{ES} lim $8^{ES} + 4^{IS}$ lim ($prol^T$ /cont) 2^{IS} 3^{ES} lim $Tx \uparrow 2^{IS}$ $Encad^T$ 1^{ES} DL pour AS : 2^{IS} + chg^T Var 1^{IS} + composée 1^{IS} Asymptotes : 3^{IS} Nelles fonctions : Df : 3ES Ddér : 7ES lim $10^{IS} + 11^{ES}$ FD $3^{ES} + 12^{IS}$ Var $5^{IS} + 6^{ES}$ Parité 4 ES prim + cste : 3^{IS} f(x) : 3^{IS} TAlg : 4^{IS} Eq (Var aux, 2^{nd} d^o) : 3^{IS} Factpol $d^o 6$: 1^{IS} (f^{-1}) : 5ES Talg : $x = f^{-1}(y)$ 5^{IS}	Sup 2^T Int déf $prol^T$/cont dériv (lim Tx déf ch, sh : Déf : |a| =
Equations, inéquations, bijections	Rep Graph : 7ES Tracer Cf^{-1} par sym : 3^{ES} tpeltes Tracés pour conjecturer S^T bijections, monot, contin (f cont, non mon → non bij...) 5 IS	FD 9^{IS} 2^{IS} ND 1^{ES} 2^{IS} Taylor L Var $6^{ES} + 4^{IS}$ TVar 3^{IS} + Var(f') 1^{IS} Var (f-g) 1^{IS} Maj/Min : $12^{IS} + 1^{ES}$ Maj 11^{IS} inég Var (f-g) → Var(f' - g') 1^{IS} Maj alg (min dén, maj num) 1^{IS} TAlg 1^{IS} TAlg$(f^{-1})(x)$ 2^{ES} $(f^{-1})'(a)$ 4ES $f(x_0)$ 1 ES PTN 1 ES Inég pm 1^{IS}	Biject 6^T Biject 8 M injectiv. 1 M f(x) 2 M
Théorème de Rolle et formule des acc. finis	Interpréter $Graphiquem^T$ $f'(x+\frac{h}{2}) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Tracer (partiellement) une courbe correspondant à f tq $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$	ND max/min : 2^{IS} FD : $\cancel{12}^{IS} + 1^{ES}$ lim $3^{ES} + 1^{IS}$ Alg : 1 système ^{IS} Maj/min 2^{IS} Calc alg : $1^{IS} + 2^{ES}$ Sommer 1^{IS}, Calc Num : 4^{ES}	
Formules de Taylor	Interpréter $Graph^T$ f, f'' bornée ⇒ f' bornée 1^{ES} I.G position relative courbe/tgte 1^{ES}	FD nelle fct. : 3^{IS} FD : 5^{IS} FD sec : 1^{IS} FD succ : 1^{ES} 7^{IS} → ND : 5^{IS} FD num (sin, cos) : 2^{IS} → ND : 2^{IS} Var : 1^{IS} 1^{ES} TVar 1^{ES} Val min 1^{IS} lim 6IS + 1ES Maj $2^{ES} + 3^{IS}$ Enc 3^{ES} (Inég. T) Inég : 1^{IS} Alg : 1^{IS} Num $5^{ES} + 6^{IS}$ Maj reste Lagrange 2^{IS} Réc : 1^{IS} Calc Alg : combiner T. Young (calc. littéral) : 1^{ES} Eq tgte : 1^{IS} DL : 16 ES + 15IS | 19 DL $f(x)^{g(x)} = e^{g \ln f}$ 1^{IS} div. polyn : 7^{IS} chgt var : 9^{IS} Factor : 2^{IS} composée de DL 5IS/19DL inté DL 3 ES (Nelles Fonct : 5DL)	Déf contin Déf dérive Déf ^{n} clas Déf DL G → lien av ∃ δ > 0 ∀ Déf DL (x-
Primitives et intégrales	ϕ	FD = 60^{IS} Prim : $38^{IS} + 65^{ES}$ Calc num : { 7^{ES}. (intégrales correspond.) / 10^{ES} (primitive et intégrales) / 5ES Maj : 2ES Var $\int$ indéf : 1^{ES} Alg : Σ, extrapolation (réc) $2/2^{IS}$ réc ! descendre n, n-1 → 0 $x^2 = (1+x^2) - 1$ → $\tan^n x + \tan^{n+2} x = \tan^n x (\tan x)'$ Alg : déc fract 12^{IS} fact pol 4^{IS} Forme can : 3^{IS} div pol 3^{IS}	Dérivabil Déf pai Déf primiti
Equations différentielles	ϕ	FD : 13^{IS} + FD seconde : 3^{IS} primitive : 14^{IS} Equation : y(0) = α à résoudre 6^{ES} Eq 2^{nd} degré : 3^{IS} Eq : 1^{IS} DL usuel : 2^{IS} développer polyn : 1^{IS} quotient DL : 1^{IS}	Déf primitive :
Suites numériques	Rep. graphiques : 2^{IS} "Toiles d'araignées" : 7 peu utiles + 2 utiles (IS) (disc Ψ pm)	ND : 3 IS FD : 7^{IS} Var : $2^{ES} + 4^{IS}$ TVar : 5^{IS} IAF : 3^{ES} Eq 2^{nd} d^o : 4^{IS} Alg : 1^{IS} FD : 3^{IS} + TVal : 3^{IS} avec valeurs particulières indispensables Inég 2^{nd} d^o : 1^{IS} lim : 1^{IS} TAlg (réc) : 1^{IS} Maj/Min : 1^{IS} f(x) > x utilisé : 3^{ES}...	Fonctio Suite (un+1 -

TACHES SELON DIVERS
-TÂCHES

UNIVERSITE DE MARNE-LA-VALLEE

ND, FD : nombre / fonction dérivé
Var : variations, DL = dévelt limité
...
(NF = nouvelles fonctions)

IG = interpréter graphiquement pm = paramètres

une définition , A = autre - M = mobilisable - D = disponible	(θ) Appliquer un théorème ou une propriété D = dérivé T = technique M = mobilisable A = autre D = disponible	Sous-tâches liées au raisonnement Démontrer, donner un Contre-Exemple, Formaliser Discuter, Identifier, etc... Généraliser, Utiliser Traduire (ES / IS : explicitement / implicitement sollicité)
$2^T + 5^M$ de f' : 4^T en x_0 : $8^T + 6^M$ (AA pointé 1 fois) de f' : 5^M, de $f^{(n)}$: 1^M	Th généraux dérivabilité : 9^M Formules dérivées : 7^M Th : dérivable en $x_0 \Rightarrow$ continue en x_0 : 2^M	Formaliser dérivabilité : 1ES Utiliser déf géné nouvelle $f^{(n)}$ (f lip) 2IS Généraliser la déf de la dérivabilité à f', $f^{(n)}$ en x_0 pour voir si f est C^2, C^∞... (idem pour la continuité) Identifier Pb dérivabilité si présence de val. absolues. D dérivabilité avec hyp. géné (th gendarmes, une hyp à utiliser 2 fois diff.) I f(0), f'(0), Pos relative Cf / tangte sur DL : 5ES
$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$: 12^M Déf formelle lim 1^T	Eq tgte : 2^T formules de DL usuels : $9^T + 20^M$	Identifier : Tx ↑ : 12IS D lim f(x) = 1 ⇒ f(x) > 0 sur... (Formaliser) 1ES Traduire : $f \underset{x_0}{\sim} g$ pour le prouver / Transf en log Utiliser 2 propriétés des nouvelles fonctions / identité démontrée pour établir un résultat
...exité 1D inflexion 1^T	Formule de Leibniz : 2^T Formules dérivées : 6^T Th pos courbe / tangte : 1^M Th convexe ⇔ f'' ≥ 0, concave ⇔ f'' ≤ 0 2^M Th monotonie : 1^T	Imaginer un contre-exemple via le dessin 1ES
2^T déf continuité 1^T : 2^T déf Argth 1^M) : 2^T déf f^{-1} : 5^M 1^M B. parab : 4^M $\sqrt{a^2}$ 2^M	Th monotonie 12^M Th : f' = g' ⇒ f = g + k, 6^M Th des bijections 4^M Th (f^{-1}) : 4^T $(f^{-1})'$: 4^M Formule (g∘f)' 1^M continuité / var / sym Cf' / Cf Formule (Arcsin)' 1^T Parité f^{-1} par sym : 2^M Prop géné Arcsin 1^M Formule DL = 1D Formules dérivées usuelles 21^T	Identifier : traduction formalisée d'un résultat 1IS CE : lim u' = 0 ⟸ lim u = l ? 2IS compt as. 4ES Id. dérivée (Arcsin) → f = Arcsin + cte → dépend interv 1ES I : paramétrage hyperbole $ch^2 - sh^2 = 1$ F : courbes asympt 1ES I : compt asympt. f^{-1}, 4ES f = g ⇔ f' = g' 6IS R : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ 5IS f(a) = g(a)
Image 6^T f(I) 6^T Strict non 1^M monotonie 1^M surjectiv 1^M décroissance : 1D	Th des bijections 10^M Th monotonie 11^M TAF 9^M Rolle 1^M IAF 1^M / Taylor L 1^M 1^T $(f^{-1})'$: 1^M Th (f^{-1}) : $3^T + 1^D$ (il existe g tq g∘g = x) Formules dérivées usuelles 11^T continuité / var / sym Cf⁻¹ / Cf	Dém. inégalités : considérer la fction différence, dériver autant de fois que... ou Appliquer IAF, Taylor ss indic ↳ + majorer à vue (min. Dén, maj Num) Identifier applic réciproque dans g tel que g∘g = x 1IS C Ex 4IS Raisonner par inject + surject → biject. 1IS Taylor : Id fonct. et points, Discuter pm : 1ES F : k lac réels C. App - 1IS, Se ramener de 2 à 1 fction 1IS, Vérifier hyp. 1IS
∅	Th Rolle T2 + M4 TAF T9 + M3 IAF T1 Th monot M2 Formules dérivées 12^T Th vi : D1 Th : dériv. → continue M1 (ss monotonie)	Identifier points à considérer pour appliquer th Rolle 2IS Appliquer le th. Rolle en cascade (n+1 zéros ⇒ ∃c $f^{(n)}(c) = 0$) 2IS Var en chaîne (cas géné : f(a) = f(b) = 0 et f'' ≤ 0 → f > 0) Int. Géom (prop parabole) $f'(x + \frac{h}{2}) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ x, h réels quelc. Raisonner en utilisant c ∈]x, x₀[(si x → x₀, c → x₀) Vérif. hyp TAF, CE : 1IS + 1 vérifier R : graphe sol Formal fct pol de d° mini tq... Id 1 eq, 1 fct, des pts Démo acc finis géné (indic fctaux)
...ité : 1^T ...bilité : $1^M + 1^T$ ...e C^1 " : 1^T importance de lim ε = 0 ...c déf formelle limite x ∈]-δ, δ[... 1D ⇒ $x^5 \ln x$: DLs en 0? 1D	Taylor L. $10^T + 7^M + 9^D$ TAF : 1^D Taylor Young $1^T + 1^M + 1^D$ Th pos rel Cf / tgte Th : $\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!}$ ∀x ∈ ℝ 2^M fct convexe fct concave 1^M Th monotonie : 1^M Formules de DL usuelles : $13^M + 17^T$ (reconn $(1+x)^\alpha$...) Formules dérivées 19^T	R : passer à la limite dans TL ∀x $f(x) = R_p(x) \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$ f = 0 1IS (p fixe devient variable) R : Si $\lvert f'(x)\rvert \leq \varphi(h)$ ∀x ∀h alors ∀x $\lvert f'(x)\rvert \leq \min \varphi(h)$ 1IS (h fixe devient variable) Interp. 2 premiers termes TL (éq tgte) + pos. rel. Cf / tgte avec le 3e terme. 1IS Interp. prop locale : ∃δ > 0 ∀x ∈]-δ, δ[$x + \frac{x^2}{4} \leq e^x - 1 \leq x + \frac{3x^2}{3}$ Interp pos rel courbe / tgte 3 cas (inflexion) : 3ES Identifier ordre de grandeur : $x^5 \ln x = o(x^4)$ mais pas o(x⁵) Id : Pos rel. locale de 2 courbes par les DL : 2ES / Asym 4ES Combiner une formule Taylor et TAF pour obtenir lim Sp(R).
...té fct ∫ : 1D ...é : 1^T ...ve : 103^T	Inté / parties 11^T 3^M Inté / parties doubles 1^T 1^M Chgt variable $16^T + 5^M + 1^D$ Inté à vue 5^T ($\int_a^b f = [F]_a^b$) F. Taylor Lagrange 1^T Formules primitives 103^T Formules dérivation 60^T	Identifier passage de $I_n = f(I_{n-1})$ à $I_n = f(I_0)$ 2IS récurrence sous-jacente, extrapolation : I : $1 - \cos^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta$ → rel (I_n, I_{n-2}) I : chgt variable utile 8/23 I : $1 + x^2 - 1 = x^2$ rel I_n, I_{n-1} I : $\int \tan^n x\, dx + \int \tan^{n+2} x = \int (\tan)' \tan^n x\, dx$
14^T	Th sol géné $a(x)y' + b(x)y = 0$: 7^T Formul prim 14^T Méth var. cte : 6^M Th : sol géné = g + h : 7^M Th éq diff lin à coeff cst. homogène : 3^T Méth var cte : 2^M Th : sol géné = g + h : 3^M Formules dérivées : 16^T	Identifier : équation différentielle vérifiée par la fonction → Utiliser cette équation diff pour obtenir un Dév. limité 1ES
... croissante : 1^M ...issante : 3^M u_n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$)	Th monot : 6^M, Th "gendarmes" : 5^M TAF : 1^M Th des équations : 2^M Th : "Si (u_n) croissante et majorée..." 9^M Th : f continue ⇒ f(l) = l : 8^M Th : "Si (u_n) croissante Th : f ↑ ⇒ (u_n) monot : 7^M et non majorée..." 5^D Σn, Σn² 1^M Formule dérivée 1D	Raisonner par récurrence : $4^{ES} + 9^{IS}$ R. par absurde : $1^{ES} + 1^{IS}$ (u_n) diverge → ∞) Raisonnt en cascade (passage $u_{n+1} = f(u_n)$ → $u_n = g(n)$) 3IS R étude(f) → Var (u_n) ? (u_n) bornée sur I ? f(l) = l sol ? R par absurde : si u_n ↓ et l = 0 et u_0 < 0... ou u_1 < 0 → th monot suite 6IS (regarder 2nd terme) Comparer f(x) et x

EXERCICES ET PROBLÈMES DONNÉS EN TRAVAUX DIRIGÉS

LA DÉRIVÉE : CLASSIFICATION SOLLICITÉ (AIDES

ÉLÉMENTS D'ANALYSE → / THÈMES ↓	RQ = Rejet de questions [m,n] m = nb total d'exos n = nb d'ex de diff types	(p/q) p = nb rép fournies q = nb questions E : explicit I : implicit P : Partiellt	Taux de tâches complexes et nbre mini de sous-tâches implicites	Taux de tâches réalisables de différents façons	Principaux découpages (donnés) de tâches complexes en sous-tâches ...	
Continuité et Dérivabilité	[4,2] [1,1] RQ5 [2,2] [1,1] RQ5	(3/31) ↓ E	(12/31) ↓ (2)	(7/31)	f dérivable en x_0 / sur $\mathbb{R}$ → $f'(x_0)$ → deux fois dériv en x_0, sur $\mathbb{R}$ → $f''(x_0)$ → $f^{(n)}(t)$ pour $t \neq x_0$ → f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ fn dériv → C^1 → 2 fois dériv sur $\mathbb{R}$ (4) Cas général → appliquer cas partic lim T... lim f' Prol^t / cont → dérivab → Pos rel courbe / tgte (DL)	$x \to \sqrt{\ }$ Faire lim f $x \to x_0$
Limites (équivalents, o ...)	[4,3] 15RQ [1,1] RQ4 [1,1] RQ2 [1,1] RQ12	(0/35)	(16/23) (9/12) ↓ ↓ [2,3] [3,4]	(19/23) (2/12)	ϕ	
Fonctions dérivées Dérivées successives Convexité	[1,1] RQ2 [2,2] [1,1]	($2^E + 2^I$ / 12)	(2/11) ↓ (2)	(3/11)	dérivée (seconde) → convexité → pos relat Cf / tgte → inégalité IG → travailler sur un ex → concl et conjecture Et. fct → domaine de convexité → pT d'inflexion → Tracé	Utili Cons Int
Variations et études de fonctions	[2,2] RQ2 [2,2] RQ 2/10 [4,4] RQ ... [2,2] RQ 4+2/8 0/4 [1,1] RQ 5/10	(0/5) [3/12] (3/10) [1/10] (0/9) [5/7]P [4/7]P	[1/17] (6/23) [13/20]	(13/60)	Prol^t / cont. en x_0 → dérivab en x_0 → $f'(x)$ pour $x \neq x_0$ → continuité de f' (1) Nelles fonctions : Calcul de $f'(x)$ en distinguant ces cas (Arcsin) → En déduire $f(x)$ (idem) → tracé Etudes de fonctions : parité, limite, variations comportement asymptotiques, tracé (C)	Etude IT : f C.E ... Calcul f Identités TVar : "I
Equations, inéquations, inégalités, Bijections	[1,1] RQ 6/6 [1,1] RQ 2/2 [4,2] [1,1]	[0/6] [4/4] 2/12 E + 2/12 P 1/8 E + 1/8 P 0/9	(6/6) (3) (2/4) (2) 10/28	(7/38)	. Etude var → Rep graph → bijections ? 6/6 . Maj f' ou f'' → Inég sur f (mais IAF non précisé) ou Inég sur f avec Taylor (non précisé) . Dérivabilité de f^{-1} → $(f^{-1})'(a)$ et f bijection de ... sur ... → prop de f^{-1} → Courbe de f^{-1}	"Etudi " Plusie Calcule avec D pour a
Théorème de Rolle et formule des accroissements finis	[11,10]	(13/25)	(4/22)	(6/22) (IAF ou TAF ...)	. TAF ou IAF → convergences de suites (Euler ...) . Fct auxilliaire → adapter un paramètre → appliquer Rolle → Conclure . Pbne à 2 fonctions → se ramener à une. . Vérifier hyp. th Rolle satisfaites → appliquer th Rolle . TAF → passer à la limite, $c \in]x, x_0[$ donc $c \to x_0$ si $x \to x_0$. TAF à $f(x) = \dots$ entre k et k+1 → convergence d'une somme par majoration / minoration	IAF + Appliq "Th de Fct ima facilité "Consid "Applique → déter CE fou TAF : Po
Formules de Taylor	[1,1] RQ2 [1,1] RQ9(DL) [6,6] [1,1] RQ2 [2,2] RQ4 DL [1,1] RQ3 DL inte [1,1] RQ2 [3,3] [1,1] RQ2 DL	(10/47)	(4/5) (2) (4/6) (3) (3/7) (3) DL (6/9) 2-4 DL (9/18)	(12/45) (Taylor ou étude de fonction ...) ↓ position Cf / tgte	. Appliquer une formule de Taylor → θ_n en déduire ... . Ecrire T-Lagrange ordre 1 → position Cf / tgte (Q : Que représentent les 2 premiers termes) . Continuité → dérivabilité → classe C^1 en 0 (4) . DL en 0 → pos rel de g : 2^{ES} . Mq Il y a une asymptote oblique → Position relat. Courbe / Asympt 4^{ES}	Majora sollicité "En dé Utiliser Appliqu "Plusie inté
Primitives et intégrales	[2,1] RQ 15/15 [2,1] RQ 3/3 [2,1] RQ 12/12 [2,1] RQ 4/4 [2,2] RQ 6/8 [3,1] RQ 9/10	(11/48) ↓ Partielles	(7/30) (3) (16/18) (3) ↳ mais "standards"	ϕ	. Relation Récurrence $I_n = f(I_{n-1})$ → Calcul I_n . Rel. Réc $I_n = f(I_{n-2})$ → Calc I_{2n}, I_{2n+1} . $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ rel I_n, I_{n-1} → calculs part. . F. Rat. en sin, cos → (chgt var → FR → inté) . F. Rat. en ch, sh → (poser e^x → FR inté) . Radicaux $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ou $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$	Rappels C 1 seule Formule $\int \cos^2 pt$ Chgts rationn
Equations différentielles	[5,3] [1,1] RQ6	(5/20)	(1/1) (3/9)(2) (6/6)(3) (2/4)2-3	(6/20)	Equa diff vérif par f → DL(f) → autre méth 1 Eq diff lin ordre 2 à coeff csts → sol partic → sol générale f = g + h Sol gén eq homog → f = g + h (2) → h sol pol part (1)	Métho "Solut Métho
Suites numériques	[16,9]	(17/34)	(18/31)	(5/29)	Etude fct. → ét. suite $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n$ $u_n \in I$ → $f(x) = x$ admet une unique sol sur I $\forall n$ $\lvert u_{n+1} - l\rvert \leq a \lvert u_n - l\rvert$ ($a \in]0,1[$) → (u_n) converge vers l Encadrement fonctionnel → limite de suite	Var fct Var f(... Var f "établir R. par ré Discussi demandé

(SELON LE DEGRÉ D'AUTONOMIE OU ABSENCES D'AIDES)

UNIVERSITÉ DE MARNE-LA-VALLÉE

(NF = nouvelles fonctions)

Indications techniques, Rappels de cours, etc... G = général P = particulier (D/A)	Absences d'aides pour des tâches complexes (situat. inhabit. ss aides → répét.? variabilité sauvage? routinisation? types, contextes... monde fonctionnel...)	Existence de choix à réaliser de manière autonome (dessins, contrôle théorique, Contre-Ex, cohérence...)
$\sqrt{1+x}$ dériv en 0 → $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + xE(x)$? une récurrence pour calculer $f^{(n)}$ + formule générale donnée $' = \lambda \in \mathbb{R}$ → tracer → f cont? → IG $\lim_{x \to x_0} f = \lambda$	Pas de rappel de la déf de "dérivable en x_0" ou "deux fois dérivable en x_0" par lim $Tx(f)$ ou lim $Tx(f')$. Pas de rappel de "f de classe C^1" et pour la continuité de f'. Problème en x_0 où une val. absolue s'annule non signalé, pas d'aide pour les DL.	AA ou lim Tx puis transfo algeb. Pour $f''(0)$, calculer $f'(x)$ puis $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$ Pour C^1 → calculer $\lim_{x \to x_0} f'(x)$, trouver $f'(x_0)$ Faire soi-même 2 cas: $x \neq x_0$ et $x = x_0$ Dériv fct par ⇒ continuité, lim f, lim taux
$\emptyset$	Chgt variable, transformer $f(x)^{g(x)}$, reconnaître un taux? utiliser quantités conjuguées, transf. algébriques... (DL et limites ss DL)	Transf alg, chgt variable, recon taux acc. (limites ss DL ou avec)
...ser la formule de Leibniz ...dérer la fonction... (CE) 1 ...expét. graphique 1	Etude de fonction à gérer seul, point d'inflexion, convexité aussi (1)	Calculer la dérivée nième de $t \to 1/t$. Postuler une formule puis l'établir pour obtenir la dérivée nième de $t \to e^t$. Th pos. relat. courbe/tgte pour f convexe ou étude fction différence (1)
...de variations → Validité d'une prop formelle $\lvert f(x) \rvert \leq 1/2$ si $x \neq 0$ → sert à tracer courbe ...e conjecture donnée (ex: $x \to \frac{\sin(x^2)}{x}$) 1 (x): distinguer 2 cas: $\lvert x \rvert < 1/2$, $\lvert x \rvert > 1/2$ ...sur nelles fonctions: "2 méthodes possibles" 6 ...indiquer limites aux bornes". Prol^t à g? à d?	Conjecture: $\lim_{x \to \infty} u'(x) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \lim_{x \to \infty} u(x) = l \in \mathbb{R}$ → Contre-exemple non fourni. Factorisations, p. ex. $1 - (4x^2 - 3x)^2$ à effectuer seul (prendre aussi la décision de factoriser) ch(a+b), sh(a+b)... selon sha, shb, cha, chb: repasser en expo (ss indic). Comportement (f_1, f_2)? 6 DL: utilis non précisée. Méthode démo nelle fct non F.	Conjecture VIF → Choix de la stratégie (preuve ou CE) Nelles fonctions: choix des valeurs $x_0 \in I$ pour déterminer les constantes d'intég. (3) + simplifie $f'(x)$ Comportement asymptotique → où? (aux bornes de Df) Choix DL / techn usuelles pour limites 5 Choix: repasser ch, sh en exp. Limites nelles fct.
...er les variations..." (→ détermination du caractère bijectif ou non) 6/6 ...us méthodes possibles" ... $f^{-1}(a)$ → pentes? point d'intersection $(y = x)$ demandé, nombre dérivé $f'(x_0)$ ...voir $(f^{-1})'(y_0)$ où $y = f(x_0)$ ensuite: 2	. Méthode pour prouver des inégalités non précisée: F. Taylor (laquelle? points? ordre?) TAF ou étude fct. ss indic (4) . Etude paramétrée ss indication: trouver tous les couples (a, b) de réels tq $f_{a,b}$ soit bijective de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (1)	Considérer la fonction différence $f - g$ → dériver 1 ou 2 fois → inég fct $f \leq g$ (2) Dériver f' → Var(f') → Maj(f') → IAF (1) Majorer à vue ou dériver? ou IAF? ou Taylor? CE: faire des dessins (conjonct s/ bijection) R: strict^t monot. → injective.
...fonction et intervalle précisés. ...uer Th Rolle à telle fonction... ...Rolle" dans le titre de la feuille d'exercices ...auxill donnée + recherche d'un p^t d'annulation ...e(3)^t Rolle plusieurs fois ...rer d'abord g = 0" (Pb à 2 fonctions) ... Acc finis entre x et x + h, à $x \to x^2$ ...miner c → interp. graph. ...ni → reste à l'étudier et à l'interp ĉ tel... ...ints précisés} fct. précisée 1. Utiliser graph	Situations générales non problématisées, non contextualisées. Routinisation délicate (ex: Appliquer th Rolle à une fonction auxilliaire → laquelle et pourquoi?) Trouver des Contre-Exemples sans aide Sommation + majoration sans aide + $c \in]k, k+1[$ à utiliser (y penser)	• Choix des points en lesquels appliquer le th de Rolle (répétitif) (1) • Appliquer le th Rolle → 2 fois th monotonie • Vérifier précisément les hyp du th Rolle (utiliser des arguments différents) • Passer à la limite dans TAF $c \in]x, x+1[$ si $x \to +\infty$, $c \to +\infty$ • Conjecturer, trouver des idées à partir d'un graphe conj. à f tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$
...ion intermédiaire fournie → étude de fct ...e, p^{ts} fournis (Taylor Lagrange) ...duire"... position relative Cf/tangente → de la formule de Taylor ...une formule de Taylor (préciser laquelle est adéquate et pourquoi) (4) ...u T. Young 2 Pos rel Cf/tgte → 3 cas (étude locale) ...us méthodes possibles: Taylor, ét. fonction (1) ...gration DL (3)	Appliquer T. Lagrange au "bon" ordre, aux "bons" points puis minorer ss indic (2) . Savoir quelle formule de Taylor appliquer, montrer que les hyp. sont satisfaites f est C^1 en 0 → Calcul formel $f'(x)$ + $\lim_0 f'$. Calculer P', P'',... P(5) pour Taylor. lim valeur en x = 3 puis appliquer la F. Taylor pour avoir une décomposition selon les puissances de X − 3 . FD succ → ND succ → Major Reste → 0 → Σ cvge . $f(x)^{g(x)}$ à transf seul, chgt variable, seul. DL seul, rép NF → Interpréter...	. Choix entre T Lag et T Young, ordre? points? . Pos rel Cf/tgte → fct diff → Var f . Points? ordre? → passer à la limite . Choisir de "perdre" (en apparence) de l'information: $\forall x\ \forall h\ \lvert f(x) \rvert \leq \ell(h)$ donne $\forall x\ \lvert f(x) \rvert \leq m$ où $m = \mathrm{Min}\, \ell(h)$. Utiliser les Inég triang. pour majorer . Faire un tableau Var complet
...ans: formule d'inté par parties. ...inté/parties nécessaire ou plusieurs? ... du changement de variable rappelée. ... $\sin^2 t$: arc double ou chgt variable. ... de variable ad hoc pour fractions ... en sin/cos (tests donnés), e^x, sh, ch	. Passage $I_n = f(I_{n-1})$ à I_n selon n . Extrapolation à réaliser soi-même. . Rel de réc $I_n = f(I_{n-1})$: penser à faire une inté par parties. . $I_n = J_n$ pour les int. de Wallis: idée du chgt de variable non suggérée. . I_n selon n avec des problèmes techniques (factorielles, C_n^p pour Wallis) non pris en charge. Fract Rationnelles (décomp → inté)	Quoi dériver, quoi primitiver dans une inté par parties? (Pas toujours évident: Wallis...). Dans les suites d'intégrales, le nbre d'inté/parties n'est pas précisé. Certains chgts de variables (simples) non précisés.
...de variat. cste → éq ordre 2 lin à coeff cstes (2) ...ion part. de la forme..." (1) ...de variat cste avec double quadrature (1)	Calcul DL non aidé (formaliser seul) 1 sol éq homo ordre 1 → méth var cste → quadrature → sol partic à voir → f = g + h: 6	- ordre DL à choisir (1) - Sol particulière à trouver ou méthode de la variation de la constante - Poser $z = z'$ (double quadrature)
...f → Var suite $u_n = f(n)$ 1 ...$-x$ → Var suite $u_{n+1} = f(u_n)$ 1 ... → Var suite $u_{n+1} = f(u_n)$ par récurrence ...par réc que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ...c suggéré 1 résultat annoncé 4 ...on orientée selon u_0 / limites possibles ...e au début → sauf cas simples ($u_{n+1} = u_n - u_n^2$ p ex)	• Intro fct pour résoudre une équation $x = \cos x$, $x = e^{-1-x}$ ou résol directe algébrique ($x = \sqrt{1+x}$) • Passage au log ($\Pi \to \Sigma$) • Voir que $\lvert u_{n+1} - l \rvert = \lvert f(u_n) - f(l) \rvert$ 3 (seul) • Rais^t en "cascade" + th gendarme 3 (seul) • Pas de décompo de la tâche "étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ si classique" (monotonie de f...) 6 . Réaliser T. Var seul et placer les valeurs tq $f(x) = x$, $f(x) = l$, les extrema ss indic	• Signe fct → étude des variations 2 utiliser déf croissance + table var pour démontrer par réc que $u_{n+1} = f(u_n)$ monotone 2 • Intro une fct ou pas selon le cas • Intro f, étudier f, regarder $f(x) = x$, monotonie suite, bornes éventuelles 6 → par étude de f ou directement • Appliquer encadrement fct. → sommer

EXERCICES ET
PROBLÈMES DONNÉS EN TRAVAUX DIRIGÉS

LA DÉRIVÉE : ANALYSE SELON
TYPES D'OBJETS ; FC

ÉLÉMENTS D'ANALYSE → / THÈMES ↓	Concepts / énoncés objets / outils (OB/OU) explicites / implicites (Ex/Im)	Connections effectuées	Champs d'investigation, Types de problématisation, Contextes (inhabituels ou non), nouveau monde fonctionnel...	
Continuité et dérivabilité	Dérivabilité OB/Ex : 20 ND : OU/Im 2 FD : OU/Im 6 et OB/Ex 2 Continuité : OB/Im 4 et OB/Ex 6	dérivabilité / petits "o" 1 mélanges dériv locale / globale 4 dérivées successives / récurrence 1 dérivabilité / th gend / fonct à pm $\lim T_x$ et $\lim f'$; études locales tg^{te} (DL)	Est-ce que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(x)$? Fonctions définies par 2 expressions différentes de part et d'autre d'un point ; dérivabilité Pathologies : $t \mapsto e^{1/t}$, $x \mapsto x^n \sin 1/x$ à partir d'un rang [illegible]	• Ut...
Limites (équivalents, o...)	ND : OU/IM : 15+6 DL usuels : OU/Im : 29+6	lim ⟷ Nombres dérivés lim ⟷ équivalents ⟷ éq de tangente prolongements par continuité	Fonctions usuelles + "pathologies" : $x \mapsto x + x^2\, 10^{10^5 x}$	
Fonctions dérivées Dérivées successives Convexité	FD : OB/Ex 4 FD : OU/Im 2 FDsec : OU/Im 1	$f^{(n)}$ ⟷ coeff binomiaux / récurrence dérivée seconde ⟷ inégalités dans $\mathbb{R}$ dérivée seconde ⟷ position relative courbe / tgte Encadrement sur f' et IG.	Fonction définie par une intégrale Fonctions à paramètres Fonctions définies implicitement ($x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}_+$ et f paire)	
Variations et études de fonctions	FD : OU/Im 18 FD : OB/Ex 18 ND : OU/Im/1 Var : OB/Ex/10 Var : OB/Im 4 dérivab : OB/Ex/1 Continuité : OB/Ex 4 Primitive : OU/Im 1 DL : OU/Im 1	Variations ⟷ Notion de Sup et d'Inf logique (1) ⟷ Étude de conjectures (pathol : $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$) tracé par recollement d'Arcsin de Étude de fonction ⟷ identités fonction (N^{elles} fonctions)	Conjectures (→ fonctions inhabituelles) Études locales et globales fines (DL ou pas, prolongement à g et pas à d, dérivabilité à étudier où on juge, as.) Calcul et simplif de dérivées délicats (Arctan → factors, $\sqrt{a^2}$ à simplifier...) Cas où on ne peut avoir le signe de f' (ex : $x \mapsto \sin(x^2)/2$ → tracé qualit.)	
Equations, inéquations, Bijections	Continuité/OB/Ex 2 OB/Im 2 Dérivabilité/OB/Ex 2 OU/Im 6 FD : OU/Im 5 FDsec : OU/Im 1 ND : OB/Ex 4 Bij : OB/Ex 16 f^{-1} : OB/Ex 2 f^{-1} : OB/Im 1 Var : OU/Im 7 $f(I)$: OB/Im 5 monotonie OB/Ex/1 strict mon OB/Ex/1 IAF OU/Im 1/1 Taylor OU/Im 1 inj, surj OB/Im 2	Bijection ⟷ variation Inégalités ⟷ étude fonction différence dérivée multiple Inégalités ⟷ IAF, Taylor Continuité ⟷ monot. / stricte mon. Bijection ⟷ $F = f(E)$ intervalle Bijection ⟷ dérivabilité	Cas généraux : conjectures mêlant "bijectivité", "continuité", "monotonie", "stricte monotonie", image d'un intervalle injectivité, surjectivité, .. fonction nouvelle à paramètre : discuter caractère bijectif.	
Théorème de Rolle, Accroissements finis	IAF : OB/Ex : 1 TAF : OU/Ex : 5 Th Rolle : {OU/Ex : 3, OU/Im : 3} FD : OU/Im 12	IAF ⟷ encadrements ⟷ monotonie de suites, convergence Th Rolle ⟷ zéros de polynômes Th Rolle ⟷ zéros de fonctions Th Rolle ⟷ prop d'une fonction Th Rolle ⟷ compar. de fctions (cond gén) TAF ⟷ Prop géom des paraboles TAF ⟷ passages à la limite (3) limite d'une somme ⟷ suites numériques et fonctions mélangées $f(k) = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$	zéros d'un polynôme quelc, de degré n soumis à une condition générale (idem pour une fonction). Cas général étudié sans problématisation → résultat ininterprété, parfois peu interprétable (3) Situation générale + problème inhabituel (Est-ce que lim taux f = lim f'(x) ?) → étude d'un exemple Pathologies : $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ $\lim_\infty f = 0$, $\lim_\infty f'$ n'existe pas $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ – Fonctions usuelles –	• Pour • Ut • Pb
Formules de Taylor	Taylor-Lagrange OU/Ex : 9 Taylor-Young OU/Ex : 2 Var : OU/Ex 2 DL usuels OU/Im : 25 Notion de DL : OB/Ex 4 FD/OU/Im 11	F. Taylor ⟷ minorations, maj fct ($n \leq 2\sqrt{n}$ ...) F. Taylor ⟷ pos. rel. cf / tangente F. Taylor ⟷ décomposition polyn F. Taylor ⟷ convergence séries num ($R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$) dérivabilité Classe C^1 Taylor Young ⟷ limites (cas géné) DL ⟷ pos relative de 2 courbes DL ⟷ asymptotes 4 obliques	DL fct. usuelles (12) démonstrations : cas général Fonctions n'ayant pas un DL à tout ordre Fonctions ne pouvant être étudiées que localement (pos rel de courbes, asymptotes) Cas général : TY pour calculer une limite Étude du caractère "dérivable" ou "C^{1}" dans un cas général.	• Nec
Primitives et intégrales	primitives : OB/Ex : 18 prim + dérivée : OU/Im : 34 (FD OU/Im)	intégrale ⟷ primitive ⟷ dérivée Récurrence ⟷ suite d'intég. Polynôme ⟷ FR ⟷ décomposition → inté / parties, chg^T var nombres complexes, trigo	Fonctions usuelles du lycée + qq nouvelles fonctions (7) Calculs de primitives : notation $\int$ sans bornes changement de variables divers Fract rationnelles en sin, cos x, sh, ch, e^x	• C
Equations différentielles	FD : OU/Im 15 prim : OU/Im 16 DL/OB/Ex 1 Eq diff : OU/Ex 1	Eq diff ⟷ primitives Eq diff ⟷ DL	Fonctions usuelles uniquement Cas de double quadrature : $uz'' + vz' = 0$ → résoudre en $Z = z'$ puis calculer z	
Suites numériques	ND : OU/Im 3 FD : OU/Im : 10 Var : OU/Im : 7 OB/Ex : 2 IAF : OU/Ex 3 Rec : OU/Ex : 4 Th gend : OU/Ex 4	Suites réc → variations fct. → fonctions (9) → équations $f(x) = x$ (9) inéquations $f(x) \geqslant x$ (polynômes...) 3 suites → sommation, passage au log, Th gendarmes, Σn, Σn^2	Th central : Si (u_n) ↑ et majorée (ou ↓ et minorée) alors (u_n) converge. Étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante (notamment), problèmes liés à l'initialisation (→ discussions) Th du point fixe (étude de fction non pilotée) Fonctions usuelles	Appl

UN STATUT OUTIL/OBJET
NCTION ET ENVIRONNEMENT (CONTEXTES)

UNIVERSITÉ DE MARNE-LA-VALLÉE

(NF = nouvelles fonctions)

Difficultés de nature conceptuelle	Difficultés de nature logique (pb de statut : données, variables...)	Changements de cadres et de points de vue (Guidé / Autonome)	Degré de généralité (Nul, Interm, Maxi)	Paramètres (expl/impl (E/I) fct/p^ts (F/P) dériv/autre (D/A))	Degré de formalisation sollicité (IS ou ES)	Applic ou Quest^t
...lier à la fois l'aspect "dérivation ...melle" et l'aspect "déf par lim taux" ... étudier f''(0) ... Tx = lim f' sous certaines condition ...aluer f'(a) sans vraiment connaître f	Ecrire une propriété avec le quantif ∃ (1)	Cadre graph ⟷ alg (guidé) (lim f', schéma continuité étude locale → IG 5 Autonome	N : 7 I : 5 M : 2	φ : 9 pm : 5 (E, F, D)	Cond. de continuité de f, f' en 0, de dérivabilité de f, f' en 0	A : 14 Q : 4
contradiction apparente entre résultats (cadre numérique / algébrique) (convergence "lente")	Définition formelle d'une limite : 1^E	φ	N : 21 M : 1 I : 1	pm : 1/23 (E, F, A)	1/23 déf formelle limite lim f = 1 ⇒ f > 0 sur ...)	A : 22/22
Dérivation d'une fonction intégrale 1 Traduire graphiquement un encadrement de la dérivée 1	φ	Alg ⟷ Graph (encadrement inf.) (Guidé) point inflexion (Autonome)	N : 2 I : 2 M : 1	pm : 2/5 (E, F, D)	φ	A : 4/5 Q : 1/5 inégalité encadrement par dériv?
Obtenir un tracé fiable par recoupements qualitatifs (études locales, majoration : $\|f(x)\| \le \frac{1}{\|x\|}$ pour $x \mapsto \sin(x^3)/x$ ... Étude de conjectures pièges : lim f = l ⟹ lim f' = 0 Quand faire un DL ? Identifier 2 express → ét. de fct.	Comprendre une proposition formelle (quantifiée plusieurs fois)	Alg ⟷ Graph (lim f' = 0 ...) ∞ étude → tracé 10 Aut	N : 15 I : 1	pm 1 (E, F, D) φ 15	Prop formelle 1	A : 15 Q : 2 (conject)
• flexibilité des connaissances nécessaire (injectivité, surject., bijectivité, continuité, repères graphiques, différences entre monotonie et stricte monotonie • Interpréter en terme de bijection récip. des situations ... à voir, étude de fonct. non ... dérivation en chaîne	"f strict^t monot. continue ⇒ biject de ... sur ... → y a t'il une réciproque ? ... A t'on : f continue bijective de I → f(I) implique f strict monot sur I ?	alg → graph (conjectures, ...)	N : 13 I : 1 M : 1	1/15 (E, F, D)	formalisation 1/15 (preuve de : f strict^t monotone ⇒ f injective)	A : 14 Q : 1 (liens entre notions générales)
... $\lim_{\infty}$ et $\lim_{\infty} f'$ font ... appliquer le th. de Rolle plusieurs fois à la suite → prop sur $f^{(n)}$ ... en la présence d'un grand nombre de notations avec des statuts différents (..., α, φ fction, f, K pm, t var ...) ... 2 théorèmes à la fois (monotonie, Rolle) dans un contexte général ... calcul et argument théorique ... convergence : si lim f = l et lim f' = L alors L = 0 ... si lim f = l seulement, que dire de lim f' ?	Quantifications universelles implicites : comprendre la généralité du problème (x, h quelconques → Ex : prop géné parabole)	• alg → geom Aut interpréter une égalité entre nombre dérivé et taux d'accroiss^t • graph → alg guidé pour l'étude d'une conjecture	N : 4 M : 10	pm : 3/14 (E, F, D)	Th de Rolle en chaîne → nommer les zéros, les situer, faire un arbre, construire une récurrence. • c ∈]x, x₀[et x → x₀ donc c → x₀ lim f'(c) ... 2/14	A 11 Q 3 (fonct a f(a)...) ptique géné, ...)
...ssité de différencier "local" et "global" ...ag. et T. Young, prop valable pour ... points x et ... → faire tendre p vers 0 ... conclure (constante → variable) ... le h correspondant à Min (f) pour ... une majoration ... (2 → limite + calc. formel f'(x) ... du DL de x → x⁵ ln x ... majoré ... ...ct local de : "∃δ > 0 ∀x ∈]−δ, δ[..."	Statut de certaines notations qui représentent successiv^t une constante puis une variable (quantific universelle implicite)	Alg ⟷ Graph (pos rel (f, tgte) Alg ⟷ graph (point d'inflexion) Alg ⟷ graph (2 DL → pos rel de 2 courbes) Alg ⟷ graph (4 DL → asympt)	N : 13 I : 1 M : 2	pm : 3/16	Ecrire la formule de Taylor Young deux fois (formaliser avec ε₁, ε₂ et les points ad hoc) ordres	A 14 Q 2 (local / global)
...lcul direct impossible pour les ...ités d'intégrales → récurrence descend^te ... aspect empirique, écrire la ...lution à divers rang sans ...calculer ...hoix de tests (changements de variable pour les fractions rationnelles en sinus, cosinus	φ	φ	N : 49 I : 3	pm : 3 (E, F, D) φ : 49	Sommation et simplification (factorielles ...)	A 52 Q 0
φ	φ	φ	N : 6/6	0/6	Trouver un DL en l'écrivant à l'aide de coeff indét 1/6	A : 6/6
...quer aux suites un résultat sur ...ctions, ne pas mélanger étude ... suite récurrente et étude de ...nction associée (un ↑ et f ↑ ...) ... f(x) = x, mais ne pas affirmer ... il y a convergence vers la solution de ...ière automatique si cette sol est ...que. Percevoir les récurrentes à faire	Raisonner par l'absurde Si f(x) = x n'a pas de solution ... Si (Un) ↑ sans convergence ... et ... Si f(x) = x possède plusieurs sol ...	alg ⟷ graph 2 (autonome)	N : 18 I : 4	4/22 (E, F, D)	0/22 discuter selon la vitesse de converg... résoudre f(x) = x ou appliquer théorème	A : 11/22 Q : 11/22

ANNEXE 7

TEST COMPLEMENTAIRE D'ENTREE A L'UNIVERSITE
DE MARNE-LA-VALLEE :

(Septembre 1995 ; 1 h 30 mn)

Exercice 1 :

A chacune des questions suivantes, vous répondrez :

- soit par "oui", en donnant un exemple,
- soit par "non", en apportant une justification.

1) Peut on trouver une fonction numérique à valeurs réelles, qui soit définie sur $\mathbb{R}$, non continue sur $\mathbb{R}$?

2) Peut on trouver une fonction numérique à valeurs réelles, qui soit définie seulement sur $\mathbb{R}^*$, et continue sur $\mathbb{R}^*$?

3) Peut on trouver une fonction numérique à valeurs réelles, qui soit définie sur $\mathbb{R}^*$, non continue sur $\mathbb{R}^*$?

Exercice 2 :

Quels cas de non-dérivabilité en un point pour une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pouvez vous citer ? (exemples et schémas à l'appui...)

Exercice 3 :

On considère deux fonctions f et g quelconques, définies sur $\mathbb{R}$.

1°) Soit a un réel strictement positif.
On suppose que pour tout x réel de l'intervalle $]-a,+a[$, on a:
$f(x) = 2x + 1 + x.g(x)$.
Peut on affirmer sous cette hypothèse que la fonction f est forcément dérivable en zéro ?
Justifiez votre réponse et donnez, s'il y a lieu (c'est-à-dire dans le cas d'une réponse affirmative), la valeur de f'(0).

2°) On suppose à présent que pour tout x réel on a : $f(x) = 2x + 1 + x.g(x)$
A t'on pour tout x réel : $f'(x) = g(x) + x.g'(x) + 2$?

Exercice 4 :

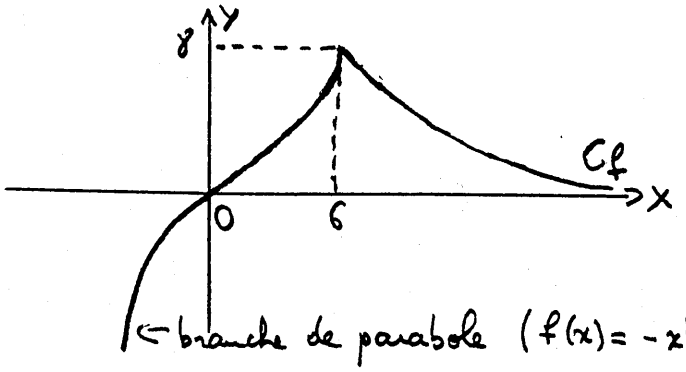
a et b désignant deux réels, comment faut il choisir a et b pour que la fonction définie pour tout x réel par :

$$f(x) = \begin{cases} a.x^2 - x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ b/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit continue en 1 ? Expliquez.
Comment faut il choisir a et b pour qu'elle soit dérivable en 1 ? Expliquez.

Exercice 5 : (Variante 1)

On considère la fonction f définie sur IR, à valeurs réelles, dont la représentation graphique Cf est donnée ci-dessous :



<— branche de parabole ($f(x) = -x^2 + x$ pour $x \leq 0$)

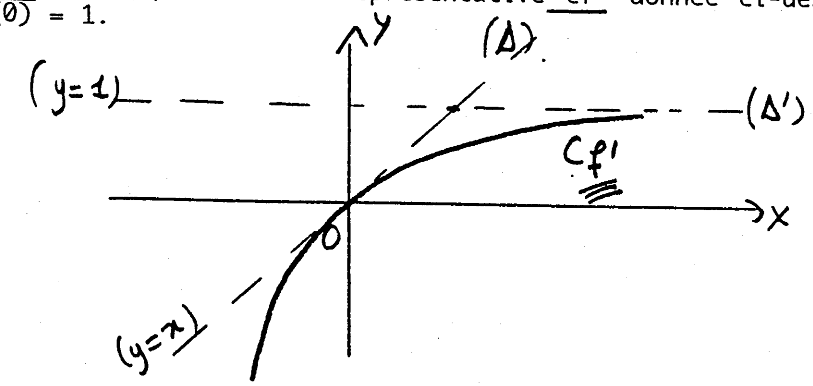
1°) A la vue de ce seul schéma, quel semble être, selon vous, le domaine de dérivabilité de f. Justifier votre réponse

2°) Précisez les valeurs, selon vous, des nombres dérivés (lorsqu'ils existent !), éventuellement à gauche et/ou à droite, de la fonction f en 0 et en 6.

3°) Tentez d'extrapoler un tracé aussi préçis que possible de la représentation graphique de la fonction dérivée f'. (Indication : on pourra préalablement chercher le tableau de variations de la fonction dérivée f'). Indiquez le cas échéant les zônes de votre tracé dont vous n'êtes pas sûr(e), ou qui vous semblent très approximatives, et pourquoi il en est ainsi.

Exercice 5 : (Variante 2)

On considère la fonction f définie et dérivable sur IR, à valeurs réelles, dont la dérivée f' admet pour courbe représentative Cf' donnée ci-dessous :
On donne aussi f(0) = 1.



Par interprétation de ce seul schéma, tentez d'extrapoler un tracé aussi préçis que possible de la représentation graphique de la fonction f. (Indication : on pourra préalablement chercher le tableau de variations de la fonction f).
Indiquez le cas échéant les zônes de votre tracé dont vous n'êtes pas sûr(e), ou qui vous semblent très approximatives, et pourquoi il en est ainsi.

ANNEXE 8

Septembre 1996

TEST D'ENTREE A L'UNIVERSITE DE MARNE-LA-VALLEE :

DEUG A - EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(durée : 2 heures ; documents interdits, calculatrices autorisées)

EXERCICE N°1 :

On définit la fonction f par :

$$\begin{cases} f(x) = a.x^2 - x + 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = b/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Existe t'il des valeurs de a et b pour lesquelles :

(1) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

(2) f est continue sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable sur $\mathbb{R}$?

(3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais non continue sur $\mathbb{R}$?

(4) f n'est ni continue, ni dérivable sur $\mathbb{R}$?

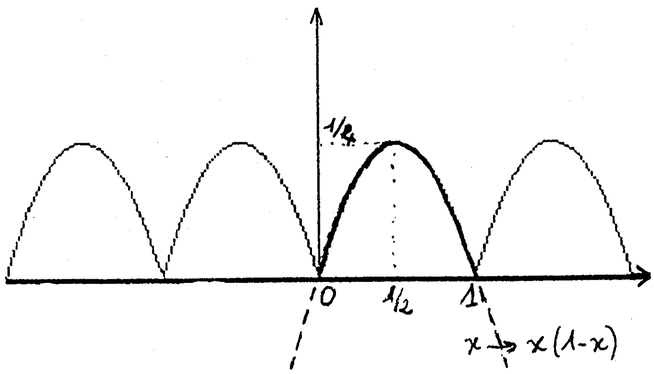
Justifiez à chaque fois votre réponse en précisant, le cas échéant, les valeurs concernées pour a et b.

EXERCICE N°2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période égale à 1, et vérifiant :

$f(x) = x.(1-x)$ pour tout x élément de $[0,1[$

(cf tracé ci-contre)



1°) La fonction f est-elle : a) continue sur $\mathbb{R}$? b) dérivable sur $\mathbb{R}$?

Justifiez soigneusement vos réponses.

2°) On définit ici une nouvelle notion, la "dérivée symétrique" de f en un point réel x_0, notée $f'_S(x_0)$, et égale à :

$$\lim_{h \to 0} \left(f(x_0+h)-f(x_0-h) \right) / (2h) ,$$

...si cette limite existe et est finie.

a) Calculez, si elles existent, les valeurs de :

$f'_S(1/2)$, $f'_S(1/4)$, $f'_S(0)$

b) Calculez, si elles existent, les valeurs de :

$f'(1/2)$, $f'(1/4)$, $f'(0)$,

c'est-à-dire de la dérivée "classique" de f (du lycée) aux mêmes points d'abscisses 1/2, 1/4, 0.

c) Comparez existence et valeur de $f'_S(x_0)$ et $f'(x_0)$ pour x_0 successivement égal à 1/2, 1/4 et 0.
Que constatez vous ?

3°) Pour chacun des trois énoncés suivants, dites s'il est vrai ou faux :

a) "Toute fonction paire, définie sur $\mathbb{R}$, admet une dérivée symétrique au point $x = 0$."

b) "Toute fonction paire, définie sur $\mathbb{R}$, admet une dérivée au point $x = 0$."

c) "Si une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est dérivable au point x_0, alors elle admet aussi une dérivée symétrique en x_0 et on a : $f'_S(x_0) = f'(x_0)$."

Justifiez soigneusement chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

Rappel : Au lycée, on définit la dérivée d'une fonction f en un point réel x_0, notée $f'(x_0)$, par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} (f(x_0+h)-f(x_0)) / h,$$

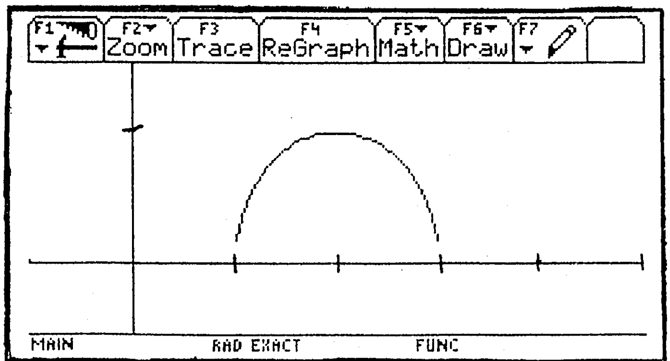
... si cette limite existe et est finie,

ou encore par : $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} (f(x_0)-f(x_0-h)) / h$

...ce qui est équivalent.

EXERCICE N°3 :

La calculatrice graphique TI92 donne, pour une certaine fonction f, définie sur l'intervalle $[1,3]$, la représentation graphique que voici :



1°) Au vu de cette représentation graphique, la fonction vous semble t'elle :

- Continue sur l'intervalle $[1,3]$?
- Dérivable à droite en 1 ? A gauche en 3 ?
- Dérivable sur l'intervalle $]1,3[$?

Justifiez vos réponses.

2°) Indiquez les coordonnées (même approximatives) des minima / maxima que vous percevez sur cette représentation graphique, ainsi que la pente de la tangente en ces points.

3°) On donne maintenant l'expression, f(x), correspondant à cette fonction f :

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$$

Vos interprétations graphiques de 1°) et 2°) étaient elles correctes ?

Justifiez votre réponse.

Pour l'ensemble de ce test, avez vous, ou non, utilisé votre calculatrice ? Si oui, pour quelle(s) question(s) et pourquoi faire? Précisez le type de calculatrice utilisé.

ANNEXE 9 : Texte de l'atelier n°1.

DIFFERENTES DEFINITIONS DE LA DERIVABILITE EN UN POINT.

NOTION D'APPROXIMATION AFFINE.

Objectif de l'atelier :

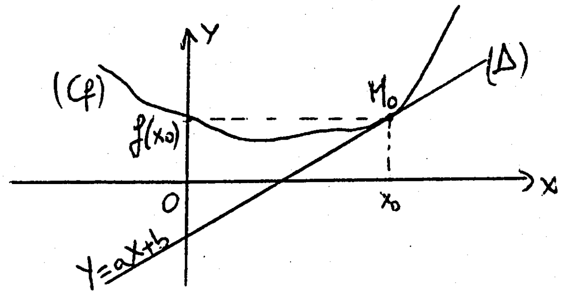
Il s'agit de juger en tant que : "définitions de la dérivabilité en un point", diverses propositions construites et formulées par des étudiants de DEUG-Sciences dans le cadre d'un autre atelier.

Notations du texte, situation proposée pour étude :

.f désigne ici une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de courbe représentative (Cf) dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

.On suppose f dérivable au point réel x_0, et on note l'équation de la tangente (Δ) à (Cf) au point M_0 d'abscisse x_0 : $Y = a.X + b$, où $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
On note g, la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = a.x + b$, dont (Δ) est la droite représentative.

Schéma :



A/ Résultats préliminaires (sans documents).

1°) Déterminez a et b en fonction de : x_0, $f(x_0)$, et $f'(x_0)$.
Justifiez l'équation que vous donnez ainsi de la tangente (Δ).

2°) Rappelez les diverses définitions de : "f est dérivable au point x_0", qui vous ont été présentées au lycée ou à l'Université.
Indiquez pour chacune d'entre elles, la (ou les) classe(s) dans lesquelles cette définition a été donnée et utilisée.

B/ Juger la validité d'affirmations concernant la situation proposée.

.Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez chacune de vos réponses par une démonstration ou un contre-exemple :

a) "La fonction g vérifie nécessairement: $g(x_0) = f(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$
et c'est l'unique fonction affine vérifiant de telles égalités..."

b) "La fonction g vérifie nécessairement: $g(x) = f(x)$ au voisinage de x_0, et c'est l'unique fonction affine vérifiant cela."

c) "Il existe nécessairement une fonction $\mathcal{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0).\mathcal{E}(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0,$$

d) "La fonction g vérifie nécessairement: $g(x_0) = f(x_0)$,
et $a = \lim_{h \to 0} (f(x_0+h)-f(x_0-h)) / (2h)$
et c'est l'unique fonction affine vérifiant cela."

e) "Deux points M et M' de même abscisse x, appartenant respectivement à (Cf) et à (Δ), peuvent être rendus aussi proches l'un de l'autre que l'on veut pourvu de prendre x assez proche de x_0."

C/ <u>Problème réciproque: diagnostiquer des conditions assurant la dérivabilité en x_0</u>.

.Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de courbe représentative (CF) dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
.Dans chacune des situations suivantes, dites si la fonction F est forcément dérivable au point x_0 :

a) Il existe une fonction affine H vérifiant à la fois :
$H(x_0) = F(x_0)$ et $\lim_{x \to x_0} (F(x)-H(x)) = 0$.

b) Il existe une fonction affine H telle que: $H(x) = F(x)$ au voisinage de x_0.

c) Il existe une fonction $\mathcal{E}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'on ait :
$F(x) = F(x_0) + (x-x_0).\mathcal{E}(x)$ et $\lim_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$.

d) Il existe une fonction affine H qui vérifie : $H(x_0) = F(x_0)$, et dont le coefficient directeur est égal à : $\lim_{h \to 0} (F(x_0+h)-F(x_0-h)) / (2h)$.

e) Il existe une droite (D) du plan, telle que deux points M et M' de même abscisse x, l'un appartenant à (CF) et l'autre à la droite (D), peuvent toujours être choisis aussi proches l'un de l'autre que l'on veut, pourvu que x soit assez proche de x_0.

D/ <u>Conclusion sur l'activité proposée dans cet atelier</u> :

Par observation des résultats obtenus en B/ et C/ ci-dessus, dites si de nouvelles définitions de : "être dérivable en un point x_0" pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vous sont apparues.
Précisez lesquelles, le cas échéant. Justifiez avec précision votre réponse.

ANNEXE 10 : Texte de l'atelier n° 1 reconstruit suite aux expérimentations

CONDITIONS NECESSAIRES ET / OU SUFFISANTES DE DERIVABILITE EN UN POINT.

A/ On considère une fonction f : R→ R, *dérivable* en un point x_0.
Dites si les propositions suivantes sont, ou non, nécessairement vérifiées en *justifiant* vos réponses :

(1) Il existe un réel a et une fonction ε : R→ R, tels que pour tout réel x :
$f(x) = f(x_0) + a.(x-x_0) + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

(2) Il existe une fonction *affine* g telle que $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x))=0$.

(3) Il existe une fonction *affine* g telle que $g(x) = f(x)$ *au voisinage de* x_0.

(4) Il existe une droite (Δ) telle que deux points M et M' de même abscisse x, l'un appartenant à la droite (Δ) et l'autre à la courbe représentative (Cf) de la fonction f peuvent être rendus *aussi proches l'un de l'autre que l'on veut* pourvu de prendre x *assez proche de* x_0.

B/ Dans chacune des situations suivantes, peut-on assurer que la fonction f : R→ R est *dérivable* au point réel x_0 :

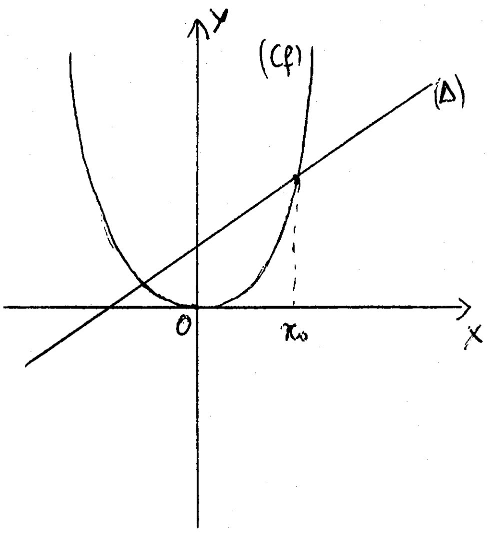
(1) Il existe un réel a et une fonction ε : R→ R, tels que pour tout réel x :
$f(x) = f(x_0) + a.(x-x_0) + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

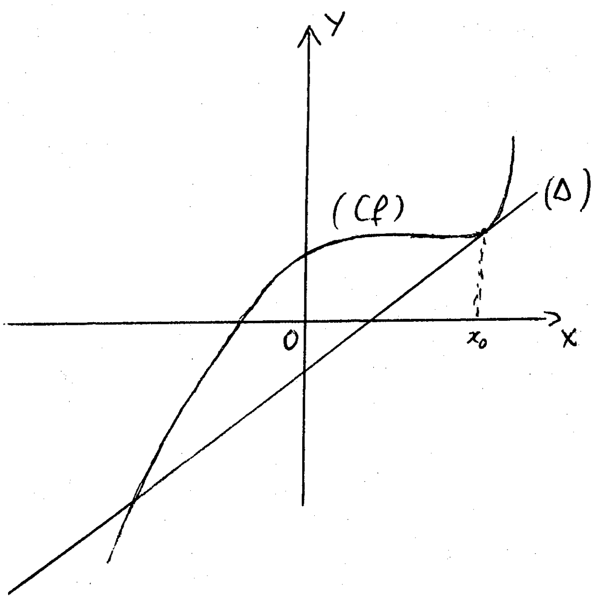
(2) Il existe une fonction affine g telle que : $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$.

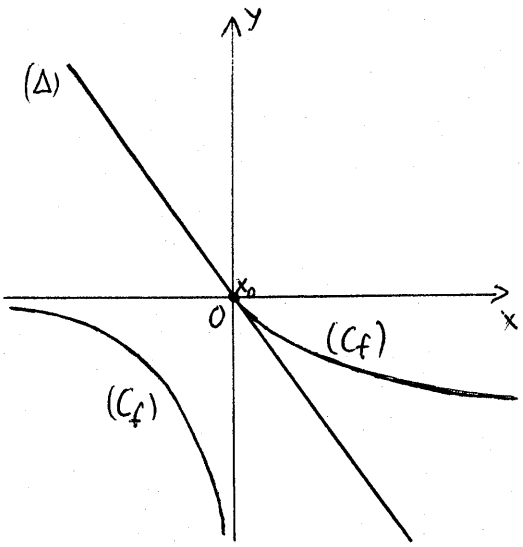
(3) Il existe une fonction affine g telle que : $g(x) = f(x)$ *au voisinage de* x_0.

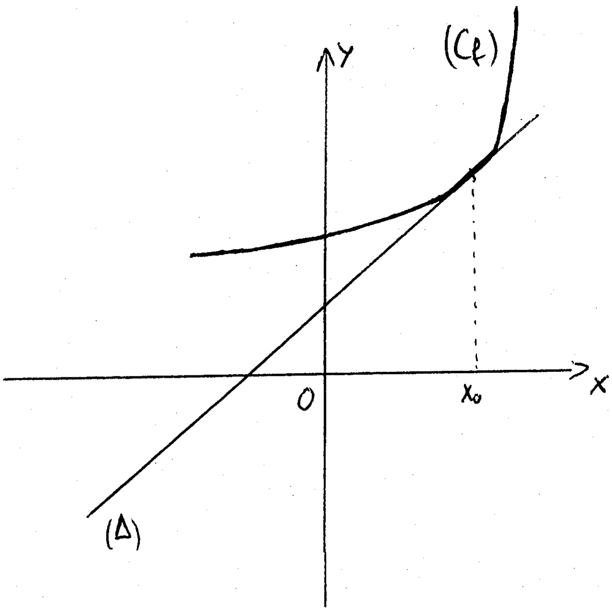
(4) Il existe une droite (Δ) telle que deux points M et M' de même abscisse x, l'un appartenant à la droite (Δ) et l'autre à la courbe représentative (Cf) de la fonction f peuvent être rendus *aussi proches l'un de l'autre que l'on veut* pourvu de prendre x *assez proche* de x_0.

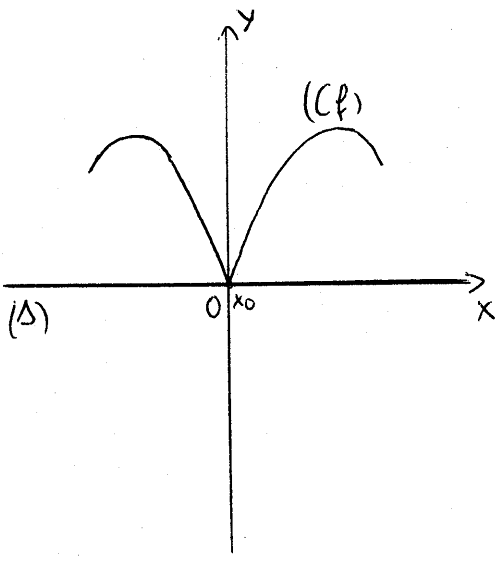
N.B : Pour vous aider ou illustrer vos réponses, vous pourrez vous inspirer à votre convenance, le cas échéant, d'une ou de plusieurs représentations graphiques de la feuille ci-jointe, correspondant à diverses situations de dérivabilité, *ou non*, au point x_0.

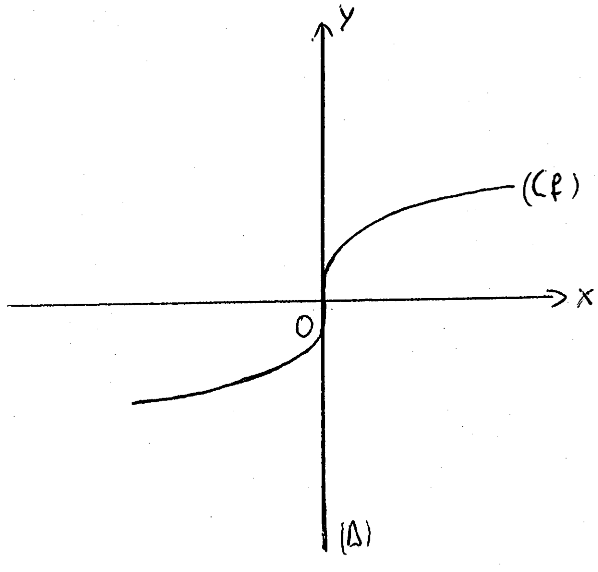

y
(Cf)
(Δ)
O
x_0
x


y
(Cf)
(Δ)
O
x_0
x


y
(Δ)
x_0
O
x
(Cf)
(Cf)


y
(Cf)
O
x_0
x
(Δ)


y
(Cf)
(Δ)
O
x_0
x


y
(Cf)
x
O
(Δ)

ANNEXE 11 : Texte du devoir à la maison préparatoire à l'atelier n°2

EXERCICE A EFFECTUER CHEZ SOI
(un corrigé sera distribué)

...en préparation du T.P intitulé :

"Taux d'accroissement et nombre dérivé.
Lien avec la convexité."

. f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, de courbe représentative (C_f) dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

. On considère deux points distincts, M_0 de coordonnées x_0 et $f(x_0)$ et M de coordonnées x et $f(x)$, de la courbe (C_f), avec $(x_0,x)\in I^2$.

1°) a) Déterminez l'expression du coefficient directeur $\alpha_{x_0}(x)$ de la droite (M_0M) en fonction de f, x, et x_0.

b) Quelle relation y a t'il entre $\alpha_{x_0}(x)$ et l'angle orienté $\theta_0 = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{M_0M}})$?

c) Précisez les variations de $\alpha_{x_0}(x)$ selon $\theta_0 \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

d) Effectuez des schémas correspondants aux situations suivantes :

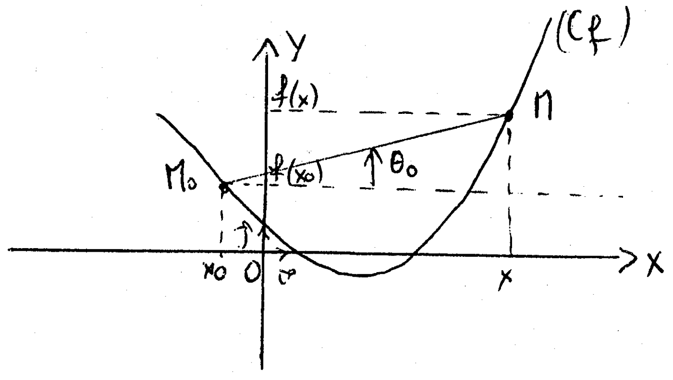
- La différence entre $f(x_0)$ et $f(x)$ est "petite", en valeur absolue, devant celle entre x_0 et x, et $\alpha_{x_0}(x) > 0$.
- Idem avec $\alpha_{x_0}(x) < 0$.
- La différence entre $f(x_0)$ et $f(x)$ est "grande", en valeur absolue, devant celle entre x_0 et x, et $\alpha_{x_0}(x) > 0$.
- Idem avec $\alpha_{x_0}(x) < 0$.

Donnez dans chaque cas des valeurs plausibles pour $\alpha_{x_0}(x)$ et θ_0.

2°) a) Déterminez l'expression du coefficient directeur a_0 de la tangente (Δ) à la courbe (C_f) au point M_0 en fonction de α_{x_0}.

b) Interprétez géométriquement la relation existant entre $\alpha_{x_0}(x)$ et a_0.

Schéma fourni :



ANNEXE 12 : Texte de l'atelier n° 2 (préexpérimentations)

TAUX D'ACCROISSEMENT ET NOMBRE DERIVE.

LIEN AVEC LA CONVEXITE.

Nous définissons tout d'abord une nouvelle notion mathématique, la propriété de "croissance forte" (F.C), pour les fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Une fonction f sera dite "à croissance forte sur I", si et seulement si elle satisfait la propriété suivante :

(F.C) : " $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et dérivable sur I, de dérivée strictement croissante sur I. "

Le but de cet atelier est de rechercher des exemples de fonctions "à croissance forte " sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, voire sur $\mathbb{R}$ tout entier, puis de conjecturer un résultat général pour de telles fonctions, avant de l'établir rigoureusement.

A/ Exemples de fonctions vérifiant la propriété (F.C).
(calculatrices graphiques autorisées pour ce A/)

1°) Donnez un exemple de fonction usuelle très simple "à croissance forte" sur $\mathbb{R}$. En déduire de façon plus générale toute une famille de fonctions "à croissance forte" sur $\mathbb{R}$.

2°) Le panel de fonctions "à croissance forte" sur un intervalle se réduit il, selon vous, à une telle famille ? Justifiez votre réponse.

3°) On considère les trois familles de fonctions suivantes (paramétrées) :

$F_1 = \{ f_1$ déf. pour $x \in \mathbb{R}$ par : $f_1(x) = A.(x-a)^{\alpha} + B$; $(a,A,B) \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha > 0 \}$

$F_2 = \{ f_2$ déf. pour $x \in \,]-\pi/2 + a, \pi/2 + a[$ par: $f_2(x) = A.\tan(x-a) + B$; où $(a,A,B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \}$

$F_3 = \{ f_3$ déf. pour $x \neq a$ par: $f_3(x) = A.\ln(|x-a|) + B$; $(a,A,B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \}$

a) Déterminez :

- un exemple de fonction de F_1 qui soit une fonction "à croissance forte" sur $]-10000, +\infty[$
- un exemple de fonction de F_3 qui soit une fonction "à croissance forte" sur $]-\infty, 10000[$
- un exemple de fonction de F_2 qui soit "à croissance forte" sur $]-\pi/4, \pi/4[$

b) Démontrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(|x-1|) & \text{pour } x \leqslant 0 \\ x + x^3/3 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

est "à croissance forte" sur $\mathbb{R}$.

c) Revenez sur la question 2°) pour une conclusion définitive.

B/ <u>Etude d'une conjecture pour les fonctions "à croissance forte" sur un certain intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0.</u>
(certains groupes peuvent travailler avec la calculatrice, d'autres pas)

- Dans tout ce qui suit, f désignera une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0, "à croissance forte" sur I.
- On posera, pour $x \in I \setminus \{0\}$: $\alpha_0(x) = (f(x)-f(0))/x$
(reprise de la notation introduite dans l'exercice à effectuer chez soi)

1°) En prenant ici $I = \mathbb{R}$ et pour fonction f la fonction exponentielle, tentez de précisez, selon vous, en raisonnant uniquement graphiquement :

a) Les variations de la fonction α_0.

b) Le signe de : $(\alpha_0(x) - f'(x))$ selon x.

Tracez alors sur un même schéma l'allure générale des courbes représentatives des fonctions α_0 et f'.

2°) Les résultats obtenus en a) et b) pour la fonction exponentielle vous semblent ils généralisables à n'importe quelle fonction f "à croissance forte" sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 ?

Si c'est le cas, tentez de les démontrez rigoureusement.
Sinon, donnez un contre-exemple.

C/ <u>Application</u> (calculatrice graphique non autorisée) :

1°) Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $g(x) = (\exp(x+x^3/3) - 1)/x$ est prolongeable par continuité en 0.
On admettra que ce prolongement G est aussi dérivable en 0.

2°) On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = (1 + x^2).\exp(x + x^3/3))$$

En utilisant ce qui précède (en B), étudiez les variations de G sur $\mathbb{R}$ et tracez sur un même schéma l'allure générale des courbes représentatives des fonctions G et H.

ANNEXE 13 Texte de l'atelier n°2 (expérimentations sur deux séances)

ETUDE D'UNE FAMILLE DE FONCTIONS :

LES FONCTIONS A CROISSANCE FORTE.

(première séance : deux heures ;
calculatrices autorisées)

Nous définissons tout d'abord une nouvelle notion mathématique, la propriété de "croissance forte" (F.C), pour les fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Une fonction f sera dite "à croissance forte sur I", si et seulement si elle satisfait la propriété suivante :

(F.C) : " $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et dérivable sur I, de dérivée strictement croissante sur I. "

Le but de cet atelier est de rechercher des exemples de fonctions "à croissance forte" sur un intervalle de $\mathbb{R}$, voire sur $\mathbb{R}$ tout entier.

A/ Pour tenter de mieux se représenter ce qu'est une fonction à croissance forte.

1°) Pour une fonction usuelle f, indéfiniment dérivable sur un intervalle I, sous quelle(s) condition(s), très simple(s) peut on être assuré du fait que f est à croissance forte sur I ?
S'agit il de condition(s) nécessaire(s), ou simplement suffisante(s) ?

2°) Comment doit on interpréter graphiquement le fait qu'une fonction f est à croissance forte sur I, et en particulier le fait que f' est une fonction strictement croissante sur I ?

Effectuez plusieurs représentations graphiques différentes pouvant correspondre à des fonctions à croissance forte sur $\mathbb{R}$.
Dites ce qui varie d'une courbe à l'autre à chaque fois.

B/ Exemples de fonctions vérifiant la propriété (F.C).

1°) Donnez un exemple de fonction usuelle très simple, "à croissance forte" sur $\mathbb{R}$.
En déduire de façon plus générale toute une famille de fonctions "à croissance forte" sur $\mathbb{R}$.

2°) a) Déterminer le domaine sur lequel la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n$ (où $n \in \mathbb{N}$) est à croissance forte.
On pourra discuter selon la valeur de n.

b) En déduire les valeurs de n (où $n \in \mathbb{N}$) et a (où $a \in \mathbb{R}$), s'il en existe, pour lesquelles la fonction Fn définie sur $\mathbb{R}$ par : $Fn(x) = (x-a)^n$ est à croissance forte sur :

b1) $]-100 , +\infty[$
b2) $]-100.000 , +\infty[$
b3) $\mathbb{R}$

c) Déterminer le domaine sur lequel la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ par : $g(x) = A.\ln(|x-a|)$, où $(a,A) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, est à croissance forte.
On pourra discuter selon la valeur de A.

d) Déterminer le domaine sur lequel la fonction "sinus" est à croissance forte.
Retrouvez graphiquement votre résultat par observation de la sinusoïde sur l'intervalle $[-\pi,+\pi]$.

3°) a) A quelle(s) condition(s), nécessaire(s) et suffisante(s), une fonction f définie ainsi :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{pour } x \leq 0 \\ f_2(x) & \text{pour } x > 0, \end{cases}$$

(f_1 et f_2 étant deux fonctions usuelles indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$)

...est elle une fonction à croissance forte sur $\mathbb{R}$?

b) Démontrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(|x-1|) & \text{pour } x \leq 0 \\ x + x^3/3 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

est "à croissance forte" sur $\mathbb{R}$.

4°) Pouvez vous décrire une méthode générale permettant d'obtenir de nouvelles fonctions à croissance forte sur $\mathbb{R}$?

xxxxxxxxxx Fin de la première séance xxxxxxxxxx

TAUX D'ACCROISSEMENT ET NOMBRE DERIVE.

ETUDE DE CONJECTURES SUR LES FONCTIONS A CROISSANCE FORTE.

(seconde séance : deux heures ; calculatrices autorisées)

Nous rappelons qu'une fonction f est dite "à croissance forte sur I", si et seulement si elle satisfait la propriété suivante :

(F.C) : " $f: I \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et dérivable sur I, de dérivée strictement croissante sur I. "

Le but de cet atelier est d'émettre des conjectures concernant la fonction exponentielle, avant de déterminer si ces conjectures sont vérifiées et généralisables à toutes les fonctions à croissance forte.

- Dans tout ce qui suit, f désignera une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de R contenant 0, "à croissance forte" sur I.
- On posera, pour $x \in I \setminus \{0\}$: $\alpha_0(x) = (f(x)-f(0)) / x$
  (reprise de la notation introduite dans l'exercice à effectuer chez soi)

A/ Dans cette partie, on prendra $I = \mathbb{R}$ et pour fonction f la fonction exponentielle.

1°) Que mesure graphiquement pour x réel fixé non nul le terme $\alpha_0(x)$?
Et le terme $f'(x)$?

2°) En déduire, de façon purement graphique et intuitive :

a) Les variations de la fonction α_0.

b) Le signe de : $(\alpha_0(x) - f'(x))$ selon x.

3°) Par une étude rigoureuse de la fonction α_0, vérifiez le résultat de 2°)a).
A l'aide de l'expression de $\alpha_0'(x)$, fonction de $x, \alpha_0(x)$, et $f'(x)$, vérifiez alors le résultat de 2°)b).
Tracez enfin, sur un même schéma, l'allure générale des courbes représentatives des fonctions α_0 et f'.

B/ 1°) Les résultats obtenus en A/2°) ci-dessus pour la fonction exponentielle vous semblent ils généralisables à n'importe quelle fonction f à croissance forte sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 ?

Indication : Vous pouvez utiliser, pour vous aider, les résultats obtenus lors du premier atelier (question A/2°) : interprétation graphique).

2°) Etudiez, à l'aide d'un raisonnement rigoureux, le signe de la quantité $(\alpha_0(x) - f'(x))$ selon x, pour une fonction f quelconque à croissance forte sur un intervalle I contenant 0.

(Indication / Posez vous la question :

" Quel résultat général est-ce que je connais, liant un taux d'accroissement et un nombre dérivé ? ")

En déduire alors les variations de la fonction α_0.

C/ Application :

1°) Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $g(x) = (\exp(x+x^3/3) - 1)/x$ est prolongeable par continuité en 0.
On admettra que ce prolongement G est aussi dérivable en 0.

2°) On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = (1 + x^2).\exp(x + x^3/3))$$

En utilisant ce qui précède (partie B/), étudiez les variations de G sur $\mathbb{R}$ et tracez sur un même schéma l'allure générale des courbes représentatives des fonctions G et H.

ANNEXE 14

Reconstruction a postériori de l'atelier sur les fonctions à croissance forte.

ETUDE D'UNE CLASSE DE FONCTIONS :
LES FONCTIONS VERIFIANT LA PROPRIETE (P) :
(première séance : deux heures ; calculatrices *autorisées*)

Introduction : Nous nous interessons ici aux fonctions f, définies et *dérivables* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant sur I la propriété (P) ainsi décrite :
(P) : « f est *strictement* croissante ainsi que sa dérivée première ».

A/ Recherche d'exemples et de propriétés simples.

1°) Donnez un exemple de fonction usuelle vérifiant (P) sur $\mathbb{R}$.
En déduire plus généralement une *famille* de fonctions vérifiant (P) sur $\mathbb{R}$.
Comment se caractérise graphiquement la stricte croissance de la dérivée ?

2°) Déterminez le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction φ, définie pour tout $x>0$, $x\neq 1$, par : $\varphi(x) = x / \ln(x)$, vérifie (P).
Précisez ainsi deux conditions suffisantes, mais *non nécessaires*, pour qu'une fonction f *deux fois* dérivable sur un intervalle I vérifie la propriété (P) sur cet intervalle. Justifiez votre réponse.

B/ Recherche de familles de fonctions paramétrées vérifiant (P) sur un intervalle.

1°) Déterminer, selon la valeur du paramètre n ($n\in\mathbb{N}$), le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n$, vérifie la propriété (P).
2°) En déduire les *valeurs* de n ($n\in\mathbb{N}$), et de a ($a\in\mathbb{R}$), s'il en existe, pour lesquelles la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (x-a)^n$ vérifie la propriété (P) :
a) sur $]-100 ; +\infty[$ - b) sur $]-10000 ; +\infty[$ - c) sur $\mathbb{R}$.
3°) Déterminer, selon les valeurs des paramètres réels A et a, le plus grand intervalle sur lequel g, définie pour $x \neq a$ par : $g(x) = A.\ln(|x-a|)$, vérifie (P).
Vérifier votre réponse en traçant la courbe représentative de g pour les valeurs $A = -1$ et $a = 0$ et en interprétant cette représentation graphique.
4°) Voyez vous d'autres exemples de fonctions vérifiant (P) sur $\mathbb{R}$ que ceux déjà présentés en A/1°) ? Quel nom pourrait-on donner aux fonctions vérifiant (P) ?

C/ Une méthode d'obtention de nouvelles fonctions vérifiant la propriété (P) sur $\mathbb{R}$.

1°) A quelle(s) condition(s), *nécessaire(s)* et *suffisante(s)*, une fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{pour } x \leq 0 \\ f_2(x) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$
vérifie-t-elle la propriété (P) sur $\mathbb{R}$?
(f_1, f_2 étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$)

2°) Vérifiez que pour $f_1(x) = -\ln(|x-1|)$ et $f_2(x) = x+x^3/3$, f vérifie (P) sur $\mathbb{R}$.

3°) En déduire une méthode d'obtention de fonctions vérifiant (P) sur $\mathbb{R}$.

Reconstruction a postériori de l'atelier sur les fonctions à croissance forte.

TAUX D'ACCROISSEMENT ET NOMBRE DERIVE.

ETUDE DE CONJECTURES SUR LES FONCTIONS VERIFIANT (P).

(seconde séance : deux heures ; calculatrices *autorisées*)

Rappel : On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I, intervalle de $\mathbb{R}$) vérifie la propriété (P) sur I si et seulement si f est strictement croissante et dérivable sur I, de dérivée strictement croissante sur I.

Objectif de la séance : Emettre deux conjectures sur la fonction $\alpha_0 : x \to \alpha_0(x) = (f(x)-f(0))/x$, pour $f(x) = e^x$ et les démontrer, puis les généraliser à toute fonction vérifiant la propriété (P) sur un intervalle I contenant 0.

A/ Dans cette partie, f désigne la fonction $x \to e^x$.

1°) Soit x_0 un réel donné *non nul*.

A l'aide d'un schéma, déterminez de quelle droite, passant par le point M_0 d'abscisse x_0 de la courbe exponentielle, le terme $\alpha_0(x_0)$ est le coefficient directeur. Justifiez votre réponse en déterminant l'équation de cette droite. Mêmes questions pour $f'(x_0)$.

2°) En raisonnant uniquement de manière graphique, précisez *selon vous* :

a) Les variations et les limites en $-\infty$, 0, $+\infty$, de la fonction α_0 définie sur $\mathbb{R}^*$.
b) Le signe de $(\alpha_0 - f')(x)$ selon la valeur de $x \neq 0$.

3°) En déduire un tracé (approximatif) des courbes représentatives de α_0 et de f ' sur un même schéma, dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4°) Déterminez la relation existant pour tout $x \neq 0$ entre $(\alpha_0)'(x)$ et $(\alpha_0 - f')(x)$.
Etudiez les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $u : x \to xe^x - e^x + 1$.
En déduire une preuve *rigoureuse* des conjectures obtenues en 2°).

B/ Généralisation aux fonctions vérifiant (P) sur un intervalle.

1°) A l'aide d'une propriété des accroissements finis (*théorème* ou *inégalités*), généralisez à *toutes* les fonctions vérifiant (P) sur un intervalle I contenant zéro, le résultat obtenu en partie A sur le signe de $(\alpha_0 - f')(x)$ selon $x \neq 0$.

2°) Généralisez alors à *toutes* les fonctions vérifiant (P) sur un tel intervalle I la relation trouvée pour la fonction exponentielle entre $(\alpha_0)'$ et $(\alpha_0 - f')$ et le résultat sur les variations de la fonction α_0.

ANNEXE 15 : Transcription de l'expérimentation de l'atelier n°1 à Orléans

PROTOCOLE DE L'ATELIER SUR LES DEFINITIONS
DE LA DERIVABILITE EN UN POINT.

(groupe "Florent, J.P, Thierry, Christel, Florence", séance effectuée à Orléans, février 1997)

A/ Résultats préliminaires : résumé.

.Les étudiants se remémorent aisément l'équation de la tangente, identifient les valeurs de a et b, mais ne peuvent justifier cette équation autrement qu'en disant : "C'est une définition !".

.Ils donnent ensuite une définition de la dérivabilité en x_0 par la limite d'un taux d'accroissement (sauf dans un cas), voir ci-dessous, mais aucun ne donne la définition par approximation affine...

Christel: "f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) / (x-x_0) = f'(x_0)$."

Florent : "f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) / (x-x_0)$ existe,
et dans ce cas, la valeur de cette limite est $f'(x_0)$."

J.P : "Si $f'(x_0)$ existe et est fini, alors f est dérivable en x_0"

Thierry : "f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) / (x-x_0) = m$ $(m \in \mathbb{R})$."

Florence propose :
"On peut aussi écrire : $\lim\limits_{dx \to 0} (f(x_0 + dx) - f(x_0)) / dx = f'(x_0)$."

Les garçons :"Non, cela, c'est de la physique, pas des Maths !" (...)

.Si on sollicite de leur part, de façon explicite, la définition par approximation affine, ils éprouvent d'énormes problèmes pour se la remémorer (bien qu'elle ait été revue récemment en cours), et se trompent dans le reste (mettent $\mathcal{E}(x)$ au lieu de $(x-x\ ).\mathcal{E}(x)$).
La diversité des formulations possibles (en x, x_0 ou en x_0,h ; avec $f'(x_0)$ ou avec un réel "A"..) ajoute encore à la confusion...

Christel écrit : "$f(x) = f(?) + A.h + \mathcal{E}(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{E}(h) = 0$"

Thierry : "Moi, j'aurais plutôt écrit : ..."
(il écrit : "...$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \mathcal{E}(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$")

Je leur propose de reconstituer le taux d'accroissement à partir de la formule proposée par Thierry, pour voir si cette nouvelle définition équivaut bien à celles qu'ils ont données au début.
Dans un premier temps, ils ne rencontrent pas de difficulté particulière, Thierry écrivant successivement :

1) $f(x) - f(x_0) = (x-x_0).f'(x_0) + \mathcal{E}(x)$,
2) $(f(x) - f(x_0)) / (x-x_0) = f'(x_0) + (\mathcal{E}(x) / (x-x_0))$,
3) $(f(x) - f(x_0) - \mathcal{E}(x)) / (x-x_0) = f'(x_0)$,

et concluant avec l'assentiment de ses camarades :
"Comme la fonction $\mathcal{E}$ tend vers zéro quand x tend vers x_0, c'est bon, on retrouve le fait que $\lim_{x \to x_0} (f(x)-f(x_0)) / (x-x_0) = f'(x_0)$ ..."

Je lui demande alors de me dire pourquoi il affirme que $(\mathcal{E}(x) / (x-x_0))$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 et de regarder vers quoi tend $(x-x_0)$ lorsque x tend vers x_0.
Chacun comprend ainsi le problème ("C'est une forme indéterminée !")...

Les voyant alors fort désorientés, je leur propose de repartir de la (seule) définition dont ils semblent sûrs, celle par la limite du taux d'accroissement, en la traduisant ainsi :

$$(f(x) - f(x_0)) / (x-x_0) = f'(x_0) + \mathcal{E}(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0"$$

A partir de là, ils retrouvent finalement la définition correcte, par approximation affine : $f(x) = f(x_0) + (x-x_0).f'(x_0) + (x-x_0).\mathcal{E}(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$,
constatant alors d'eux-mêmes leur omission initiale du terme $(x-x_0)$.

Ils se souviennent que cette définition leur a été donnée en classe de première, mais la considèrent comme très peu utile pour les exercices ("C'est juste une définition de base, mais on ne s'en sert jamais !").

B/ Etude de la validité d'affirmations proposées sous l'hypothèse de dérivabilité de f au point x_0.

1°) Proposition B/a).

1.1 Résumé des premiers échanges.

.Tout d'abord, certains étudiants ont des difficultés à rentrer dans le problème posé : ils ne comprennent pas immédiatement que la validité des propositions énoncées dans cette partie B/ est à juger en fonction de la situation initialement décrite, qui est prise pour hypothèse de départ.
Ils sont donc un peu perdus pendant quelques minutes...

.Le point précédent étant clarifié, dans un premier temps les étudiants n'écrivent rien, car ils souhaitent d'abord élucider (avec mon aide) deux questions préliminaires :

(1) Est-ce qu'avoir $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$, c'est la même chose que d'avoir l'égalité entre $\lim_{x \to x_0} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0} g(x)$?"

(2) L'information : "$\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$" n'est elle pas redondante avec l'information : "$f(x_0) = g(x_0)$" ?

.Concernant la première de ces deux questions, personne ne veut vraiment s'engager, ni pour un sens d'implication, ni pour l'autre, même si Thierry avance "qu'il pourrait y avoir un problème si f et g n'admettent pas de limite en x_0", mais que (inversement) "si f et g admettent la même limite en x_0, f-g tendra sûrement vers 0 en x_0"...

Je leur fournis moi-même deux exemples à étudier du point de vue de la question qu'ils se posent
(Exemple 1 : $f(x) = g(x) = \sin(1/x)$ et $x_0 = 0$
Exemple 2 : $f(x) = 1/x^2$; $g(x) = 1/x^4$ et $x_0 = 0$),
ce qui leur permet ensuite de la régler...

Florence en tire en effet la conclusion suivante :

"On a équivalence entre les deux propositions $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x} g(x)$ seulement si f et g ont des limites finies en x_0."

Cependant, lorsque je lui demande si c'est bien le cas dans la situation qui nous occupe, elle me répond que g, fonction affine, admet nécessairement une limite finie en x_0, mais que pour f, "on ne sait pas".
Je lui demande alors de regarder si cela ne suffirait pas pour que les deux propositions :

"$\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$" et "$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$"

s'impliquent mutuellement.
Elle se rend alors compte que c'est bien le cas.

. Concernant la seconde question, tous semblent penser qu'il va de soi que si $f(x_0) = g(x_0)$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$, donc $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$, d'après ce qui vient d'être dit.
Ainsi la proposition a) leur semble alors trivialement vraie, puisque la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 admet ce point en commun avec elle, donc $f(x_0) = g(x_0)$.
Je ne les contredis pas, mais leur demande de justifier la première de ces affirmations...

1.2 Transcript : première séquence.

Thierry : "$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ car $f(x_0) = g(x_0)$"

Florent : "$\lim_{x \to x_0} f(x)-g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - (f(x_0) + (x-x_0).f'(x_0))$
$= \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) - (x-x_0).f'(x_0)$
$= 0$
car $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et $(x-x_0).f'(x_0)$ tend vers 0 car $f'(x_0)$ est un nombre fini."

Moi : "Concernant les démonstrations de Florent et Thierry, je note qu'ils admettent toujours l'égalité entre $f(x_0)$ et $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ou entre $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x))$ et $f(x_0)-g(x_0)$."

Les deux étudiants concernés l'admettent aisément.
A nouveau perplexes, ils commencent à ressentir un certain découragement.

Moi : "Qu'est-ce que cela exprime, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$?"

Après un instant, Florence : "Que f est continue en x_0 !"

Moi : "Et est-ce le cas ici ?"

Thierry : "Oui, puisque f est dérivable en x_0 !"

Moi : "Et pour g, a t'on aussi $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$?"

Thierry : "Pareil ! C'est une fonction affine, donc dérivable et continue sur $\mathbb{R}$."

Moi : "Conclusion ?"

Thierry : " $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$, donc le a) est vérifié."

Moi : "Pas si vite ! Disons que la première partie de la proposition a) est satisfaite, mais il reste à tester l'unicité de g !"

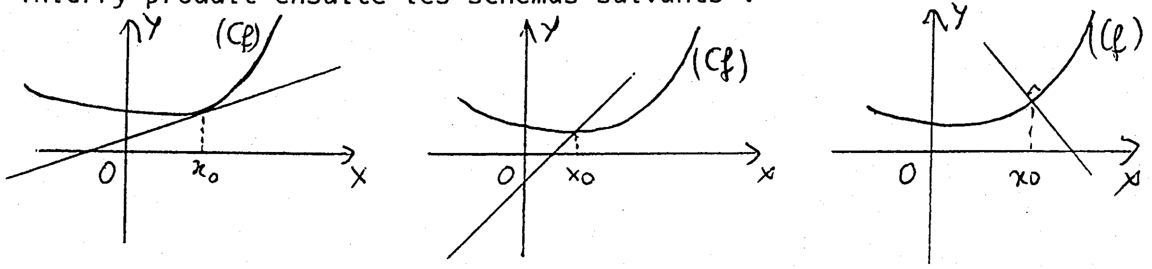
1.3 Transcript : seconde séquence.

Moi : "Pour voir s'il y a unicité de g, tentez de vous représenter graphiquement ce qui se passe si on a : $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$ avec $f(x_0) = g(x_0)$."

Thierry : "Cela signifie que plus on se rapproche de x_0, plus la courbe et la droite se rapprochent l'une de l'autre, et en x_0, elles se coupent."

Moi : "Et il y a unicité d'une telle droite, selon vous ?"

Quelques instants de réflexion...
Thierry produit ensuite les schémas suivants :



Thierry : "Moi je pense qu'il y a unicité de g, car par exemple, si on prend une droite qui est perpendiculaire à la courbe au point x_0,.."
(là, il pointe le troisième schéma ci-dessus)

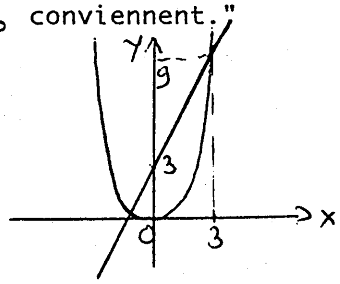
"..eh bien, la droite et la courbe se coupent bien en x_0, mais dès qu'on s'éloigne de x_0, la courbe et la droite s'éloignent très vite."

Il poursuit : "..tandis qu'avec la tangente, pour x proche de x_0, la courbe et la droite restent très proches l'une de l'autre."

Christel acquiesce.

Florence : "Je ne suis pas d'accord. Toutes les droites coupant la courbe au point x_0 conviennent."

Elle donne un exemple : $f(x) = x^2$
$g(x) = 2x+3$
et produit un schéma (cf ci-contre).



Florence : "On a : $f(3) = g(3) = 9$ et $\lim_{x \to 3} (f(x)-g(x)) = \lim_{x \to 3} (x^2 - 2x - 3) = 0$"

Cette fois, tout le monde abonde dans son sens : il n'y a pas unicité de g.

J.P : "Mais alors, la proposition a), elle est vraie ou elle est fausse ?"

Thierry : "Ben, elle est vraie, sauf l'unicité."

Florent : "Non, elle est fausse, puisqu'on demande aussi l'unicité !"

Devant la perplexité du groupe, je les départage :

Moi : "C'est Florent qui a raison.
Rappelez vous qu'une proposition de la forme "p et q" est vraie si et seulement si p est vraie et q est vraie à la fois."

2°) Proposition B/b).

2.1 Transcript : première séquence

La première réaction que l'on enregistre chez plusieurs étudiants, concernant cette proposition, consiste à dire qu'elle n'est pas différente, voire peu différente de la proposition a) précédente.

Thierry : "C'est la même chose que a).
Cela signifie que l'on a : $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$."

Christel : "C'est comme a) sauf que l'on n'a pas : $f(x_0) = g(x_0)$.
On a seulement la propriété au voisinage de x_0."

Moi : "Qu'est-ce que vous entendez par là ?"

Christel : "Sur un intervalle autour de x_0, mais privé de x_0."

J.P : "Cela signifie..."
(il écrit : pour $x \longrightarrow x_0$, $f(x) = g(x) + \mathcal{E}(x)$ avec $\mathcal{E}(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$)
Il lit : "..que pour x tendant vers x_0, f(x) est égal à g(x) plus $\mathcal{E}(x)$, où $\mathcal{E}$ est une fonction tendant vers 0 lorsque x tend vers x_0."

Moi : "En d'autres termes, que $\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = 0$."

J.P : "Ben,..oui !"

Moi : "Donc vous êtes d'accord avec vos camarades ?"

J.P : "Oui, mais ce que j'écris, cela signifie..."
(il écrit : $f(x) \approx g(x)$ pour x proche de x)
"..que f(x) est presque égal à g(x) pour x proche de x_0, donc au voisinage de x_0."

Moi : "Oui, d'accord, mais la proposition b) ne dit pas : "presque égal", mais : "exactement égal", au voisinage de x_0, non ?"

J.P : "Euh,..oui !"

A partir de cet instant, l'impression initiale des étudiants (selon laquelle a) et b) diraient la même chose) s'estompe rapidement et ils commencent à rechercher d'autres pistes.

Florent : "Moi je pense que la proposition b) est plus précise que la proposition a).
Cette fois, on a $f(x) = g(x)$ au voisinage de x_0 et pas seulement au point x_0 !
Il y a une certaine épaisseur."

Thierry : "Ce n'est pas possible qu'on ait $f(x) = g(x)$ sur une certaine largeur ; C'est une courbe, pas une droite !"

Florent : "Si ! Pourquoi pas ? Il suffit que ce soit droit sur un petit bout seulement !"

Florence : "Moi je pense que c'est possible si l'intervalle sur lequel on a $f(x) = g(x)$ tend vers zéro, si c'est un intervalle de largeur dx infinitésimale."

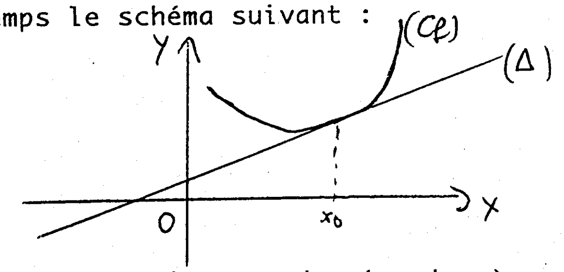
A cet instant, je reprends la main pour leur faire produire une formalisation de la proposition "$f(x)=g(x)$ au voisinage de x_0".

2.2 Transcript : seconde séquence

Moi : "Bon ! Maintenant qu'on a éclairci le sens de la proposition "$f(x) = g(x)$ au voisinage de x_0", pouvez vous me dire si elle est vérifiée lorsque f est dérivable en x_0 ?"

Thierry (s'adressant à moi): "Est-ce que l'on peut dire qu'une droite est tangente à elle-même ?"

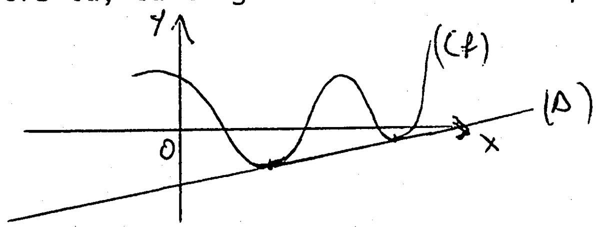
Il produit en même temps le schéma suivant :



Je ne réponds pas, c'est J.P qui tente de répondre à ma place :

J.P : Non ! La tangente touche la courbe en un point unique."

Florence : "Pas toujours ! Si tu considères un dessin comme çà..." (elle produit le schéma ci-dessous) "..alors là, la tangente touche en deux points !"



J.P : "Oui mais c'est pas pareil, là ce sont des points éloignés !"

Christel : "Dans le cas de la tangente, on a : $f(x_0) = g(x_0)$, mais on n'a pas $f(x) = g(x)$ tout autour de x_0."
Elle cite le cas de la fonction $x \rightarrow x^2$ en 0.

Florent : "Mais si on a $f(x) = g(x)$ tout autour de x_0, c'est encore mieux !
C'est tangent sur tout l'intervalle où on a $f(x) = g(x)$"

Là, le groupe se scinde en trois parties : il y a ceux qui pensent que "si $f = g$ au voisinage de x_0, alors il y a tangence au point x_0" (Florent, Florence), ceux qui pensent le contraire (J.P, Christel), et Thierry qui reste le seul indécis. Il attend toujours une réponse définitive à sa question ("Est-ce qu'on peut dire qu'une droite est tangente à elle-même ?) pour se prononcer.

Moi : "Pour répondre à la question de Thierry, je vous demande : est ce qu'une fonction affine est dérivable en tout point ?"

Les étudiants (d'abord un peu étonnés de ma question) : "Oui !"

Moi : "Et comment est sa dérivée ?"

Thierry : "Constante !

Moi : "Est-ce qu'une fonction dérivable en un point correspond toujours à une courbe admettant une tangente en ce point ?"

Thierry : "Oui ! Donc on peut dire qu'une droite est sa propre tangente en tout point ?"
(encore un peu interrogatif, mais beaucoup moins)

J'acquiesce doucement, d'un mouvement de tête, un peu embarassé.

Florent (triomphant) : "Donc c'est nous qui avions raison ! La droite est tangente à la courbe en tout point du voisinage."

Moi : "Bon ! Maintenant, revenons à la proposition b). Est elle vraie ou fausse ?"

Florent : "Ben, elle est vraie !"

Moi : "Attention, revenez au problème posé ! Il s'agit de déterminer si, sachant que f est dérivable en x_0, on a nécessairement $f = g$ au voisinage de x_0, pas le contraire !"

(...)

Ils relisent l'énoncé.

Thierry : "Ah non, ça ne marche pas ! C'est un cas particulier de tangente, mais on n'a pas nécessairement b) lorsque f est dérivable en x_0 !"

Les autres acquiescent unanimement. La proposition b) est jugée fausse.

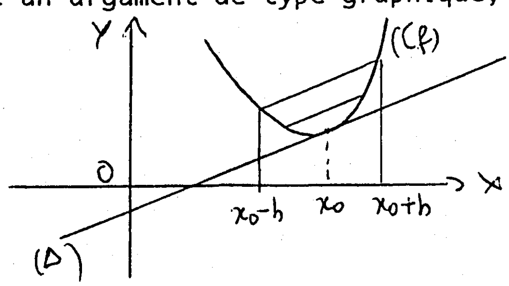
3°) Proposition B/d).

3.1 Résumé des premiers échanges.

Rapidement, le groupe se scinde en deux : il y a ceux qui pensent que la proposition d) est satisfaite, car ils retrouvent dans l'expression de "a" celle d'un taux d'accroissement, même si ce n'est pas "le" taux d'accroissement "habituel" (Christel, J.P, Florent), et ceux qui ne veulent pas se prononcer, justement pour cette raison (Florence, Thierry).

3.2 Transcript : première séquence.

Florent propose un argument de type graphique, et effectue le schéma :



Florent : "C'est le même principe que tout à l'heure avec la sécante, sauf qu'ici on prend deux points au lieu d'un seul !"

Moi : "Précisez votre pensée !"

Florent : "Si on fait tendre h vers zéro, cela revient à faire tendre les deux points, d'abscisses x_0-h et x_0+h, encadrant M_0 vers M_0, donc à la limite on a la tangente en M_0."

Moi : "Donc la limite de ce nouveau taux d'accroissement existe, et redonne nécessairement le nombre dérivé en x_0 de la fonction f, c'est cela ?"

Florent : "Oui ! De toutes façons, c'est toujours un taux d'accroissement !"

Moi : "Votre approche est interessante, mais elle est purement intuitive. Il faudrait prouver par le calcul que les deux limites sont toujours égales, si c'est bien le cas !"

Florent : "Ce n'est pas vrai ?"

Moi : "On verra, mais en tous cas on pourrait vous dire que vous allez un peu vite, lorsque vous supposez que faire tendre deux points à la fois, va donner le même résultat que d'en faire tendre un seul !"

Moi (m'adressant à tous) : "Cherchez une preuve par le calcul !"

Après quelques minutes lors desquelles chacun, individuellement, cherche par écrit une solution au problème posé, les étudiants présentent leurs propositions.

Florence conseille de poser : $X = x_0 - h$,
ce qui lui donne alors : $x_0+h = X+2h$.
Elle écrit ainsi :

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / (2h) = \lim_{h\to 0} (f(X+2h) - f(X)) / (2h)$$

Florence : "Et si on pose : H = 2h, on retrouve le taux d'accroissement du cours."

Moi : "Regardez ! Dans le taux d'accroissement habituel, que vous avez vous-même rappelé, on a :
$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) / h$ avec x_0 fixé,
alors que votre X, lui, est variable, puisque $X = x_0-h$.
Il est amené à tendre vers x_0 quand h tend vers 0.
Donc vous ne pouvez pas remplacer votre terme
" $\lim_{H\to 0} (f(X+H) - f(X)) / H$ " par f'(X) ..et encore moins par $f'(x_0)$, d'accord ?"

Florence : "Oui."

Thierry propose alors la solution qu'il vient d'écrire :

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / (2h)$$
$$= \lim_{h\to 0} 1/2 \; ((f(x_0+h)-f(x_0))/h + (f(x_0)-f(x_0-h))/h)$$
$$= (1/2).\lim_{h\to 0} (f(x_0+h)-f(x_0))/h + (1/2).\lim_{h\to 0} (f(x_0)-f(x_0-h))/h$$
$$= (f'(x_0))/2 + (f'(x_0))/2 = f'(x_0) = a.$$

Le groupe, après lecture de cette solution, est tout à fait disposé à l'accepter, et ne trouve rien à redire.
J'estime quant à moi qu'il est nécessaire de demander à son auteur quelques éclaircissements sur la justification de certains passages, pour lui-même, mais aussi pour ses camarades...

3.3 Résumé des derniers échanges.

Je soulève les questions suivantes, concernant la démonstration fournie par Thierry :

(1) Pourquoi peut on affirmer que le nombre dérivé de f en x_0 est aussi égal à $\lim_{h \to 0} (f(x_0)-f(x_0-h)) / h$?

(2) Pourquoi a t'on le droit de dire ici que la limite de la somme des deux taux est égale à la somme des limites des deux taux, alors que l'on n'a pas toujours :
$\lim_{x \to x_0} (u+v)(x) = \lim_{x \to x_0} u(x) + \lim_{x \to x_0} v(x)$ pour u,v, deux fonctions ?

Les étudiants réussissent à peu près à répondre à la première de ces deux questions, car ils semblent voir grosso-modo l'idée :
"C'est comme $\lim_{h \to 0} (f(x_0+h)-f(x_0)) / h$, sauf qu'au lieu de prendre l'intervalle $[x_0, x_0+h]$, il faut prendre l'intervalle $[x_0-h, x_0]$." (Thierry)
"On remplace h par -h dans le taux $(f(x_0+h)-f(x_0)) / h$, et çà nous donne $(f(x_0)-f(x_0-h)) / h$. " (Florent)

En revanche, ils sont assez déstabilisés par la seconde question et ne lui trouvent pas de réponse.
Je finis donc par y répondre moi-même.

Enfin, le problème de l'unicité n'est pas compris de prime abord, et confondu avec celui de l'unicité de la tangente.
Une fois le malentendu dissipé, ce problème est aisément règlé : il y a une unique droite passant par un point donné et de coefficient directeur donné.

C/ Etude du problème réciproque : y a t'il dérivabilité de f en x_0 sous les affirmations qui sont effectuées ?

1°) Proposition C/a) : transcript ; première séquence.

Dans un premier temps, certains étudiants ne semblent pas saisir l'objet de cette partie C/ et sont assez décontenancés.
Je reprécise donc oralement ce qui a été fait en partie B/ et ce que l'on demande maintenant.

Moi : "Utilisez l'interprétation graphique qui a été donnée de cette propriété à la fin du B/a)."

(...)

Thierry : "Cela signifie que la courbe et la droite se rapprochent l'une de l'autre lorsque x tend vers x_0."

Moi : "Oui, et se coupent au point M_0, d'accord. Conclusion ?"

Florence : "Il y a une infinité de droites qui marchent, on l'a vu, toutes celles qui coupent la courbe en M_0 ;
pas seulement la tangente.
Donc F n'est pas forcément dérivable au point x_0."

Moi : "Voilà, c'est l'idée, mais avec en plus F continue en x_0, rappelez vous ! Donc la proposition a) est fausse. D'ailleurs vous savez qu'une fonction continue en un point x_0 n'est pas forcément dérivable en ce point x_0."

2°) Proposition C/b) : Transcript ; deuxième séquence.

Moi : "Rappelez vous que ce b) signifie que F et H sont égales sur un certain intervalle centré en x_0. Vous avez fait un dessin tout à l'heure."

Ils regardent les notes qu'ils ont prises lors de la partie B/, et Thierry, l'auteur du schéma, conclut :

Thierry : "On a dit tout à l'heure que c'est un cas particulier de tangente, donc ça marche."

Moi : "D'accord."

3°) Proposition C/d) : Transcript ; troisième séquence.

Florent : "C'est comme tout à l'heure. On a démontré que la limite de ce taux est égale à $f'(x_0)$, donc H c'est la tangente au point x_0."

Moi : "Donc vous pensez que dans ce cas F est dérivable en x_0 ?"

Florent : "Oui."

Moi (me tournant vers ses camarades) : "Et les autres ? Vous êtes d'accord ?"

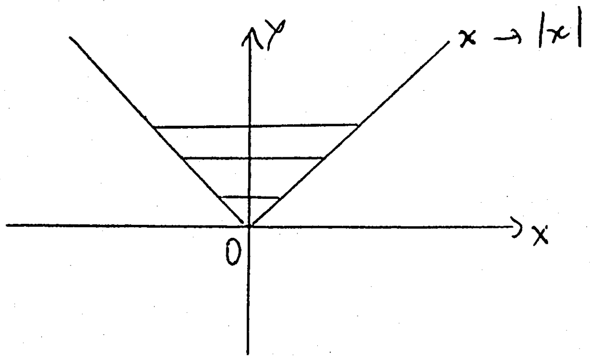
Les autres étudiants (plus timidement) : "Ben, oui !"

Moi : "Bon. Vous allez tester la fonction "valeur absolue de x", en prenant le point $x_0 = 0$.."

Ils font rapidement le calcul de la limite du taux d'accroissement symétrique, trouvent zéro, et Florence repère alors la contradiction.

Florence : "La fonction "valeur absolue de x" n'est pas dérivable en 0."

Comme ils sont assez surpris du résultat et qu'il est trop tard pour les laisser chercher eux-mêmes l'explication, je la leur donne en commentant succintement le schéma suivant :



ANNEXE 16

PREMIERE PREEXPERIMENTATION A L'UNIVERSITE D'ORLEANS DE L'ATELIER N°2 (étude d'une classe de fonctions, lien entre taux d'accroissement et nombre dérivé ; Février 1997) :

L'atelier remplace une séance de travaux dirigés ordinaire d'une durée de deux heures dans l'une des deux classes de M.Clinard qui ne comporte que dix étudiants ce jour là. On les répartit sur trois groupes G1 (trois étudiants : Stéphane, Gilles, François), G2 (trois étudiants : Jérémie, Karine, Sylvie), G3 (quatre étudiants : Franck, Jean-Marc, Benjamin, Julien).
Le temps effectif consacré à cet atelier sera d'une heure quarante, les vingt premières minutes étant consacrées à une interrogation écrite (sans rapport avec l'atelier).
Nous avons décidé que le groupe G2 disposerait de la calculatrice, et pas les groupes G1 et G3, afin de tester l'influence de cette variable ; M.Clinard observe et aide en alternance plus spécialement les groupes G2, G3, et nous les groupes G1, G2. Les étudiants travaillent sur la version d'origine de cet atelier (étude d'exemples et de conjectures sur une seule séance). Dans les faits, on constatera que les étudiants du groupe G1, des redoublants, finiront la partie A consacrée à la recherche d'exemples et entameront la partie B sur les conjectures, que les étudiants du groupe G2, apparemment assez faibles, achèveront avec beaucoup de difficultés et d'aide de notre part la question A/3°)a), et que le groupe G3, assez dynamique, au sein duquel Franck prend un rôle de « leader », de « locomotive », s'arrêtera au début du C.

Question A/1°) :
La fonction exponentielle est citée assez spontanément par les trois groupes.
Dans le groupe G3, la référence aux fonctions convexes est vite évoquée et les conforte :
Jean-Marc : « *La fonction expo, ça semble convenir, non ?* »
Benjamin : « *Oui, c'est ce qu'il y a de plus évident !* »
Franck : « *En fait, on nous dit que f ' est croissante, donc f '' est positive ; les fonctions à croissance forte, c'est les fonctions convexes* »
Jean-Marc : « *Ah oui, je me souviens, on a vu ça en cours, y a pas longtemps !* »
Benjamin : « *Tu es sûr ? Il y a une condition de plus ici ; il faut aussi que f soit croissante.* »
Franck : « *D'accord, si tu veux, mais dans ce cas c'est des fonctions convexes particulières, et l'exponentielle c'est bien un exemple de fonction convexe.* »
Jean-Marc : « *Oui, et comme l'exponentielle est convexe et croissante, c'est bon !* »

Pour trouver une famille de fonctions à croissance forte, nous leur avons conseillé de chercher parmi des familles de fonctions paramétrées, car ils ne trouvaient pas spontanément.
Les groupes G1 et G3 citent plus généralement la famille des fonctions $x \to a^x$ avec $a > 1$:
Gilles : « *Y a toutes les fonctions du type* $x \to a^x$ *qui marchent !* »
Stéphane : « *...Je crois qu'il faut prendre a>1 aussi.* »
Gilles : « *Non, si on prend a>0, ça suffit !* »
Stéphane : « *Non, regarde ! Si on prend a entre 0 et 1 strictement, c'est décroissant avec x. Plus x est grand et plus c'est petit...* »
Gilles : « *Ah oui, c'est toi qui a raison !* »
Ils n'éprouvent le besoin de vérifier par un calcul de dérivées, ni la croissance de la fonction, ni celle de sa dérivée...

Dans le groupe G2, ils citent la famille des fonctions du type $x \to x^{\alpha} = \exp(\alpha.\ln(x))$ *« parce que ce sont des exponentielles »*. Nous leur répondons que si cela ne dépendait que d'un jeu d'écriture, écrire f sous la forme exp(ln(f)), toutes les fonctions pourraient être à croissance forte ! Nous leur demandons donc de tester des exemples ($x \to x^2$, $x \to x^3$...).
Ils n'arriveront pas, ensuite, à trouver une famille de fonctions répondant au problème posé.

Question A/2°) :
Le fait qu'il y ait beaucoup d'autres types de fonctions à croissance forte semble une évidence pour chacun des groupes. Nous leur demandons donc d'en trouver.
Julien : *« Y a la fonction $x \to x^2$, par exemple. »*
Franck : *« Elle est croissante seulement sur R_+ »*
Ils cherchent alors à affiner à partir de cette idée, à trouver des fonctions polynômiales qui seraient à croissance forte sur R, et au bout d'un certain temps, commencent à se décourager. Ils s'adressent alors à nous :
Jean-Marc : *« Toutes celles qu'on a trouvé sont à croissance forte sur un intervalle de R, mais pas sur R tout entier »*
Franck : *« Il y en a sûrement d'autres que l'exponentielle qui sont à croissance forte sur R, puisque ce sont des fonctions convexes, mais c'est difficile de voir lesquelles ! »*

Nous aidons personnellement les étudiants du groupe G1, soumis aux mêmes problèmes que le groupe G3, en leur demandant de chercher les tableaux de variations possibles (avec limites aux bornes) pour la dérivée f ' d'une fonction f à croissance forte. Par habitude, ils dressent à la place un tableau de variation possible pour la fonction f.
Nous-même : *« Vous avez confondu. Je vous ai demandé un tableau de variations pour f ', pas pour f. Sur ce tableau, il faudra que vous arriviez à synthétiser les deux propriétés qui définissent la croissance forte. »*
Après réflexion, ils finissent par trouver deux tableaux de variations possibles pour f ' :

1)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	0 ↗	$+\infty$

2)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$\lambda>0$ ↗	$+\infty$

Nous-même : *« Oui, mais il y en a deux autres possibles ; vous pouvez aussi avoir une limite en $+\infty$ égale à un nombre λ' strictement positif, avec $\lambda'>\lambda$ dans le cas où la limite en 0 vaut $\lambda>0$ »*
Ils en conviennent, tracent des courbes possibles pour f 'selon ces tableaux de variation puis, avec notre aide, des courbes plausibles pour f (avec notamment présence d'asymptotes horizontales et obliques). Nous nous arrêtons là pour cette question, sans chercher à définir l'expression analytique de fonctions correspondant à ces tracés. Les deux autres groupes n'ont rien obtenu de probant à cette question, rencontrant les mêmes difficultés que le groupe G1.

Question A/3°)a) :
Dans les divers groupes, on constate une certaine difficulté à gérer simultanément les deux contraintes que doivent satisfaire les fonctions à croissance forte, des problèmes liés à la présence de paramètres, un cheminement assez erratique, une difficulté à estimer « à l'œil » les variations des fonctions prototypiques, des confusions entre positivité et croissance de f '.
Stéphane (il écrit en même temps) : *« $f'(x) = A\alpha(x-a)^{\alpha-1}$ est croissante pour $A>0$ et $\alpha>1$, car l'exposant doit être strictement positif. »*
Nous-même : *« Une telle fonction est-elle forcément croissante sur l'intervalle donné ? »*
(...)
Nous-même : *« Pouvez-vous faire des calculs permettant de confirmer vos affirmations ? »*

La méthode consistant à re-dériver f ' pour en déduire ses variations n'est pas évoquée par eux. Ils restent alors bloqués, ne peuvent en écrire davantage.

Nous-même : « *Souvenez vous de la fonction $x \to x^2$, tout à l'heure !* »

Gilles : « *Ah oui, donc il faut jouer sur la valeur de a, il faut avoir a supérieur à 10000.* »

François : « *...Non, moi je dirais plutôt (x-a) supérieur à zéro, comme pour $x \to x^2$!* »

Stéphane : « *Oui, mais ça donne quoi ça, x supérieur à a ?* »

François : « *Donc a supérieur à –10000 ?* » (dubitatif)

Nous-même : « *Ecrivez ce que vous dites, et formulez un raisonnement cohérent !* »

Stéphane (écrivant) : « *...Non, c'est pas ça, regardez ! Si a est supérieur à –10000, -a est inférieur à 10000 donc on n'a pas (x-a) positif sur]-10000 ; +∞[...* »

(...) Ils réfléchissent quelques minutes, séparément.

Stéphane : « *J'ai trouvé ! Si on prend a inférieur à –10000, on aura –a supérieur à 10000, donc pour tout x supérieur à –10000 on aura (x-a) positif. Oui, c'est bon !* »

Il a écrit en même temps les inégalités : a<-10000, -a>10000, x-a >0 pour x >-10000...

Nous-même : « *D'accord, donc a<-10000 avec A>0 et α>1, cela permet d'avoir f' croissante sur]-10000 ; +∞[, mais vous n'avez pas vérifié que f est bien croissante !* »

Stéphane (il regarde) : « *C'est vérifié aussi car f ' est positive, vu que x-a est positif.* »

Nous-même : « *D'accord, c'est bon.* »

Au groupe G2, qui n'a aucune idée pour déterminer sous quelle condition la fonction dérivée $x \to A\alpha(x-a)^{\alpha-1}$ est croissante, nous conseillons de calculer la dérivée seconde.

Jérémy : « *On trouve $f''(x) = A\alpha(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-2}$, donc il faut prendre A positif et (α-2) dans N^* et pair, pour être sûr que ce sera positif. Donc f' est croissante, c'est ce qu'on voulait pour que f soit à croissance forte.* »

Nous-même : « *Vous avez oublié de regarder si f alors croissante, elle aussi...* »

Jérémy : « *Ben, comme $f'(x) = A\alpha(x-a)^{\alpha-1}$ on fait pareil, on prend A positif et (α-1) pair* »

Nous-même : « *Mais comment faites vous pour avoir en même temps (α-1) et (α-2) pairs ?* »

(...) Jérémy parait alors assez déconcerté, tandis que ses deux camarades semblent perdus. Nous revenons les voir un peu plus tard, mais leur travail n'a guère avancé et nous sommes obligé de leur donner la solution. Le groupe G3 a procédé comme le groupe G1 (sans calculer la dérivée seconde de f), mais a obtenu un peu plus aisément que le groupe G1 la condition a<-10000.

Question suivante dans A/3°)a) : Fonctions $x \to A.\ln(|x-a|) + B$.

Les groupes G1 et G3 sont déstabilisés par le fait qu'ils considèrent la dérivée $x \to A / (x-a)$ comme nécessairement décroissante sur]-∞,a[et]a,+∞ [. Nous leur conseillons de calculer la dérivée seconde pour déterminer si leur estimation est correcte. Ils n'éprouvent alors plus de difficultés à trouver une fonction du type $x \to A.\ln(|x-a|) + B$ qui soit à croissance forte sur]-∞ ;10000[; ils obtiennent : $f'(x) = A/(x-a)$, et $f''(x) = -A/(x-a)^2$, et constatent de suite qu'il faut avoir A< 0 et (x-a)< 0 pour obtenir conjointement f '(x) et f ''(x) strictement positifs sur]-∞ ;10000[, ce qui les amène à donner les conditions A<0, et a>10000.

Ils récoltent ici en partie le fruit du travail réalisé lors de la recherche du premier exemple. En revanche le groupe G2 obtient lui : $f'(x) = A / (|x-a|)$, et $f''(x) = -A / (|x-a|)^2$, ce qui débouche sur une impasse, avoir à la fois A>0, et (–A) >0 ! Ce groupe semble assez perdu depuis le début de la question 3°)a) et n'arrivera pas à aller au-delà de cette question avant la fin de la séance, échouant également dans la recherche d'une fonction à croissance forte du type $x \to A.\tan(x-a) + B$:

Jérémy : « *$f'(x) = A.(1 + tan^2(x\text{-}a))$ et $f''(x) = 2A.tan(x\text{-}a).(1 + tan^2(x\text{-}a))$ donc il faut avoir $A>0$, et $tan(x\text{-}a) > 0$... ça donne $x\text{-}a > 0$, donc $x > a$? C'est bizarre, on veut une condition sur a, pas sur x !* »

Le groupe G3 trouve assez aisément un exemple de fonction à croissance forte sur $]-\pi/4, \pi/4[$ du type $x \to A.tan(x\text{-}a) + B$ à partir de la condition de positivité de f ' et f '' :
Franck : « *Il faut $A>0$ et $tan(x\text{-}a) > 0$, donc $0 < x\text{-}a < \pi/2$, donc $a < x < a + \pi/2$ pour x appartenant à $]-\pi/4, \pi/4[$; pour ça on peut prendre $a = -\pi/4$.* »
Le groupe G1 aboutit à la même conclusion, via un théorème en acte :
Stéphane : « *$f'(x) = A.(1 + tan^2(x\text{-}a))$ est positive pour $A>0$, et strictement croissante si la fonction $x \to tan(x\text{-}a)$ est croissante, donc pour x-a appartenant $]-\pi/2, \pi/2[$... ça donne $a-\pi/2 < x < a+\pi/2$. Pour $a = -\pi/4$, par exemple, c'est vérifié.* »

Question A/3°)b) :
Les groupes G1 et G3 ont spontanément la même démarche devant cette question : ils tentent surtout de vérifier que les fonctions $x \to -\ln(|x\text{-}1|)$ et $x \to x + x^3/3$ sont à croissance forte sur R- et R_+^* respectivement. Les interventions de M.Clinard (groupe G3), et de nous-même (groupe G1), et les réactions à ces interventions des étudiants des deux groupes, font évoluer différemment le débat sur le problème posé...

Groupe G1 :
Gilles : « *Il suffit de vérifier que les deux premières dérivées sont strictement positives.* »
Stéphane : « *Oui, donc que la dérivée seconde de $-\ln(|x\text{-}1|)$ est positive sur R- et que la dérivée seconde de $x+ x^3/3$ est positive sur R_+^** »
François : « *Moi, je pense qu'il faut aussi voir que f est dérivable en 0.* »
Gilles : « *Oui, mais ça c'est évident. On a $f(x) = -\ln(|x\text{-}1|)$ pour x inférieur ou égal à zéro, donc $f'(x) = 1 / (1\text{-}x)$, ce qui donne en 0, $f'(0) = 1$.* »
François : « *D'accord.* »
Ils commencent donc leurs calculs de dérivées et aboutissent rapidement au résultat attendu, qu'ils nous montrent :
Stéphane : « *On a trouvé $f''(x) = 1 / (x\text{-}1)^2$ pour $x \leq 0$, et $f''(x) = 2x$ pour $x > 0$. Donc la dérivée seconde est positive, et la dérivée est strictement croissante sur R.* »
Nous-même : « *Et le signe de f' ? Vous ne l'avez pas vérifié ?* »
Stéphane : « *Ben, c'est évident ça, non ?* »
Nous-même : « *Ah bon ? Pourquoi ? Est-ce que c'est parce que vous avez déjà vu que les dérivées secondes à gauche et à droite de 0 sont positives ? Est-ce que f'' positive implique f' positive ?* »
(...) Ils réfléchissent.
Nous-même : « *Est-ce que si la dérivée seconde est positive, la fonction est nécessairement à croissance forte ?* »
Gilles : « *Ben... non, peut-être pas ! Il faut aussi vérifier que la dérivée est positive.* »
Nous-même : « *D'accord. Alors vous l'aviez oublié ?* »
Gilles : « *Non, c'est parce que l'atelier porte sur les fonctions convexes d'après le titre...* »
François : « *Moi, c'est parce que je croyais que f' croissante, ça voulait dire que la pente de la courbe est de plus en plus forte, donc que la fonction est de plus en plus croissante.* »
Nous-même : « *Oui, c'est intéressant, mais vous confondez pente et coefficient directeur ; f'(x) mesure le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x, et il peut très bien rester négatif tout en croissant avec x !* »

Ils vérifient ensuite assez rapidement que les dérivées premières $x \rightarrow 1 / (1-x)$ et $x \rightarrow 1+ x^2$ sont positives sur R- et R_+^*.

Nous-même : « *Et en 0, il n'y a pas de problème ?* »

Stéphane : « *D'après le calcul des deux premières dérivées de la fonction - ln(|x-1 |), on voit que f'(0)=f''(0)=1, donc la fonction f est dérivable en 0, et les deux premières dérivées sont positives en 0 donc f et f' sont strictement croissantes en 0 !* »

Nous-même : « *Qu'est-ce que ça veut dire f et f' croissantes en un point ?* »

Stéphane : « *C'est juste pour dire qu'on doit avoir f'(0) et f''(0) positifs...* »

Nous-même : « *Mais justement, votre calcul de f'(0), vous en êtes sûr ? C'est cela que vous faites d'habitude pour étudier la dérivabilité en un point où l'expression d'une fonction change ?* »

François : « *Non, en fait il faut faire le taux d'accroissement et calculer ses limites à gauche et à droite.* »

Nous-même : « *Exactement !* »

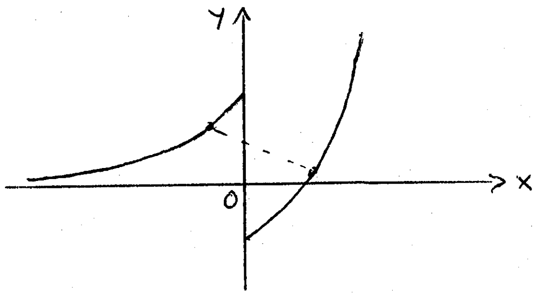
Ils effectuent ce calcul correctement, trouvent une limite de 1 à gauche et à droite en 0.

Nous-même : « *Vous avez dit tout à l'heure que f' est strictement croissante parce que f''(x) est strictement positif avant et après zéro. Mais si on trace la courbe suivante...* » (je trace) « *... on voit que la fonction associée est croissante avant et après zéro, mais est-ce qu'elle l'est sur R ?* »

Ils ne savent pas trop quoi répondre...

Nous-même : « *Regardez ! Si je prends ces deux points, est-ce que la fonction s'accroit entre ces deux points ?* » (je trace le segment joignant ces deux points)

François : « *Non, ça décroit au contraire... ah d'accord !* »



Stéphane : « *Oui, mais cette fonction là, elle n'est pas continue en 0, alors que f l'est !* »

Nous-même : « *Pourquoi ?* »

François : « *Parce qu'on vient de voir qu'elle est dérivable en 0 !* »

Nous-même : « *Voilà ! On peut dire avec certitude qu'une fonction qui est strictement croissante sur R- et* R_+^* *l'est sur R si on sait qu'elle est continue en 0. Et pour être sûr que f' soit strictement croissante sur R que faut-il vérifier ici ?* »

François : « *Pareil. Il suffit de prouver que f' est continue en 0.* »

Nous-même : « *Faites le !* »

(...)

Nous-même : « *Calculez les limites de la dérivée f' en zéro.* »

Ils achèvent ainsi le travail demandé.

Groupe G3 :

Les étudiants de ce groupe calculent les deux premières dérivées de f de chaque côté de zéro, déterminent leur signe, et en déduisent que f est à croissance forte sur R.

Jean-Marc : « *f' et f'' sont positives sur R- et sur* R_+^**, donc elles le sont sur R !* »

M.Clinard : « *Faites un schéma. Que peut-il se produire si une fonction et sa dérivée sont strictement croissantes sur R- et sur* R_+^* *?* »

Un temps de réflexion (…)

Franck (hésitant) : *« Ah oui, il faut vérifier que ça se raccorde en 0, que c'est continu ? »*

M.Clinard : *« C'est cela. »* (il trace une fonction discontinue en 0 et strictement croissante de part et d'autre de zéro de manière à ce que les chaque étudiant comprenne)

Jean-Marc : *« Mais la fonction est définie en 0, donc elle est bien continue ! »*

Comme personne ne contredit vraiment cette affirmation, M.Clinard intervient :

M.Clinard : *« Non, regardez ! Si on prolonge en 0 la fonction qui à x associe 1/x en posant f(0) = 0, on obtient une nouvelle fonction, qui est bien définie en 0 mais non continue en ce point. »* (il trace la courbe correspondante)

Franck : *« Il faut vérifier que f est continue en zéro en calculant les limites à gauche et à droite en zéro de la fonction, et après, on fait pareil pour la dérivabilité en zéro. »*

Benjamin : *« Oui. Une fonction à croissance forte sur R doit forcément être dérivable sur R, c'est dans la définition ! On avait oublié de vérifier la dérivabilité en 0. »*

M.Clinard : *« On voit que vérifier la dérivabilité en zéro est nécessaire car il s'agit d'une propriété des fonctions à croissance forte, mais cela assure aussi la continuité en 0, donc la stricte croissance sur R, pas seulement à gauche et à droite de 0. »*

Benjamin : *« On voit que* $\lim_{x\to 0-} f''(x) = 1$*, et que* $\lim_{x\to 0+} f''(x) = 0$*. C'est bizarre ! »*

M.Clinard : *« Est-ce qu'une fonction à croissance forte admet nécessairement une dérivée seconde en tout point ? »*

Franck : *« Non, c'est pas dans la définition ! »*

M.Clinard : *« Voilà. En fait, il suffit de vérifier que f' est continue en zéro. Pour cela, vous calculez les limites de f' en* 0^+ *et* 0^-*… De cette façon, comme f' est strictement croissante sur R- et* R_+^**, elle l'est sur R. »*

Question A/3°)c) :

Les deux groupes « survolent » cette question, ne décelant pas à travers l'exemple donné en A/3°)b) de mode d'obtention plus général de fonctions à croissance forte sur R. Nous les laissons passer à la suite de l'atelier, car une partie déjà importante du temps octroyé pour cet atelier a été consacrée à la partie A, et il faut en venir assez vite à l'étude des conjectures.

Partie B :

Le groupe G1 aura à peine le temps d'entamer la question B/1°), butant sur des difficultés d'interprétation du terme $\alpha_0(x)$ pour x fixé (comme le groupe G3, mais en faisant moins de propositions). Ils sont perturbés par le fait que ce terme leur semble être *« le coefficient directeur de la tangente »* (ils ne précisent pas en quel point), ce qui est aussi le cas de f '(x) (au point d'abscisse x). Tout comme les étudiants du groupe G3, ils ne font jamais référence au petit devoir à la maison qui leur a été donné sur le sujet, quelque temps avant l'atelier. Nous serons finalement obligés de leur livrer l'interprétation, la séance arrivant à son terme. Voici à présent les réflexions et les échanges à l'intérieur du groupe G3 sur cette partie B :

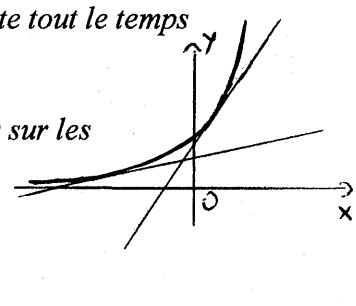
Question B/1°) :

Ils semblent assez fatigués, à ce stade de l'atelier, la recherche d'exemples en partie A leur ayant déjà demandé beaucoup d'énergie. Ils tracent la courbe représentative de la fonction exponentielle, et les droites tangentes à cette courbe en divers points.

Franck : *« α_0 représente la tangente, il est croissant et reste comme la tangente tout le temps en dessous de la courbe de la fonction… »*

Il poursuit : *« … et comme f' = f, on a donc $\alpha_0 \leq f'$. »*

Jean-Marc : *« Ah oui, je me souviens, on a vu un truc comme ça dans le cours sur les fonctions convexes. »*



Franck : « *Oui, je crois qu'on a démontré que la tangente en un point est toujours en dessous de la courbe pour une fonction convexe.* »

Benjamin et Julien ont eux aussi l'air très satisfaits de cette trouvaille.

M.Clinard : « *Dans le devoir à la maison que je vous ai donné l'autre jour, vous avez du voir que $\alpha_0(x)$, pour x fixé, n'est pas le coefficient directeur de la tangente... C'est le coefficient directeur de quelle droite ?* »

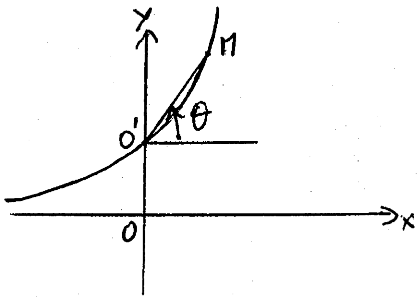
(...) Ils semblent assez perplexes et un peu déçus... chacun se remet à réfléchir isolément. Après quelques minutes, ils reprennent tour à tour la parole.

Jean-Marc : « *Je ne comprends pas bien ce que cela veut dire, interpréter graphiquement.* »

Julien acquiesce.

Benjamin : « *Pour moi, c'est quand même le coefficient directeur de la tangente car c'est la tangente de cet angle là :...* »

Il a produit le schéma suivant, sur lequel figure la corde O'M attendue pour interpréter $\alpha_0(x)$:



M.Clinard : « *Il y a une idée interessante, mais vous confondez la notion de droite tangente en un point et celle de tangente d'un angle ! De quelle droite le terme $\alpha_0(x)$ que vous avez identifié graphiquement est-il le coefficient directeur ? Refaites un schéma plus grand en plaçant bien les extrémités de la corde.* »

Les autres refont le même schéma. Nous nous joignons à la discussion qui nous paraît devenir de plus en plus intéressante...

Franck : « *C'est le coefficient directeur de la corde !* »

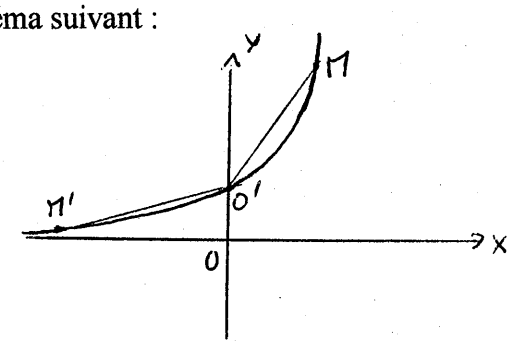
M.Clinard : « *Voilà. C'est cela.* »

Julien : « *Mais c'est tout proche de la tangente ! Pour x proche de zéro, au voisinage de zéro, on peut dire que $\alpha_0(x)$ représente la tangente, non ?* »

Jean-Marc : « *Quand on fait tendre x vers zéro...* »

Franck (plus sûr de lui) : « *Oui, mais pour x fixé non nul, c'est la corde.* »

Il fait cette fois le schéma suivant :



Franck : « *En fait, c'est le contraire de ce que j'ai dit tout à l'heure. C'est α_0 qui est au-dessus de f, donc de f' puisque f = f'* »

Nous-même : « *Là, vous comparez deux choses qui ne sont pas comparables sur le dessin : la valeur du coefficient directeur d'une droite et l'ordonnée d'un point ! Qu'est-ce que représente f'(x) graphiquement ?* »

Franck : « *Le coefficient directeur de la tangente... Ah oui, donc il faut comparer les deux !* »

Il place la pente en un point de la courbe, et jauge son inclinaison par rapport à celle de la corde. Il conclut au fait que pour tout réel x non nul, on a : $\alpha_0(x) \leq f'(x)$.

M.Clinard : « *Vous avez regardé pour les valeurs de x négatives ?* »
Les camarades de Franck ont compris le problème à leur tour et regardent donc tous ce qui se passe pour les valeurs de x négatives en faisant des petits schémas...
Benjamin : « *On voit pas bien, c'est très plat. C'est pareil, je crois... $\alpha_0(x) \leq f'(x)$.* »
Franck : « *Non, c'est le contraire pour x négatif... on a : $\alpha_0(x) \leq f'(x)$. Regarde !* »
M.Clinard : « *Très bien. Et pour les variations de la fonction α_0 ?* »
Franck : « *Elle est bien croissante.* » (il trace différentes cordes partant de O')
M.Clinard : « *D'accord. Vous passez à la suite maintenant.* »
Ils tracent rapidement l'allure des deux courbes. Nous les aidons pour les limites aux bornes.

Question B/2°) :
Ils passent rapidement sur le début de la question. Nous ne les poussons pas à approfondir davantage, car il ne reste plus beaucoup de temps...
Benjamin : « *Oui, il y a d'autres fonctions que l'exponentielle qui vérifient cette propriété, sinon ce ne serait pas très interessant !* »
Jean-Marc : « *C'est ça ta démonstration ?* »
Benjamin : « *Bon, tu as raison, mais prouve le !* »
Jean-Marc : « *Non, je ne sais pas.* »
Franck : « *C'est comme tout à l'heure la question 2°) sur les fonctions à croissance forte. On sait bien qu'il y en a d'autres, mais on sait pas lesquelles. Bon, on passe à la suite ?* »
Les autres : « *D'accord !* »
Ils tentent de démontrer les conjectures, mais n'arrivent à rien de probant. Nous les aidons :
Nous-même : « *A quoi vous fait penser le schéma effectué, avec la représentation de diverses cordes et tangentes ? A l'interprétation de quel résultat théorique ?* »
(...) Cette question ne les aide guère, semble-t'il...
M.Clinard : « *Pour arriver à comparer le taux d'accroissement $\alpha_0(x)$ et le nombre dérivé $f'(x)$, il faudrait déjà les mettre sur un même plan, en cherchant un nombre dérivé auquel est égal $\alpha_0(x)$... Et pour cela, il faut utiliser un théorème du cours...* »
Franck (peu sûr de lui) : « *Est-ce qu'on peut utiliser le théorème des accroissements finis ?* »
M.Clinard : « *Oui, c'est ce qu'il faut faire !* »

Ils écrivent successivement la formule des accroissements finis dans le cas général, puis dans le cas qui nous préoccupe : $f(a)-f(b) = f'(c).(a-b)$, puis $f(x)-f(0) = f'(c).(x-0)$...
La séance touchant à sa fin, nous leur montrons comment la preuve de la conjecture b sur le signe de la différence $\alpha_0 - f'$ s'en déduit. Ils laissent de côté la démonstration de la conjecture a et passent à l'application (partie C). Ils ont juste le temps d'effectuer un développement limité de la fonction $x \rightarrow \exp(x+x^3/3)$ et c'est la fin de la séance.

Ils nous semble que l'atelier est trop long pour une séance unique de deux heures, puisque même le groupe G3, assez enthousiaste et dynamique, n'a pas eu le temps de démontrer les deux conjectures, et les deux autres groupes sont allés encore beaucoup moins loin. Sans doute, la recherche d'exemples de fonctions à croissance forte pourrait être allégée, mais c'est surtout le projet de réaliser cet atelier sur deux séances qui se dessine ici. Aucun des étudiants n'ayant droit à la calculatrice n'en a fait usage ici. Pour les autres expérimentations, nous la laisserons désormais à la disposition de tous, afin de voir si cette tendance se confirme.

ANNEXE 17

SECONDE PREEXPERIMENTATION A L'UNIVERSITE DE MARNE-LA-VALLEE DE L'ATELIER N°2
(groupe Sébastien, Eric, Olivier, Stéphane, Grégory, Malika – Mars 1997)

Cette seconde préexpérimentation à l'université de Marne-la-vallée a lieu trois semaines après celle d'Orléans, avec un public exclusivement constitué d'étudiants redoublant le premier semestre de la première année de DEUG A.
Le temps effectif consacré à cet atelier sera cette fois de deux heures et quinze minutes.
Les étudiants travaillent sur la même version de cet atelier qu'à Orléans, mais nous avons décidé de laisser de côté la question A/3°)b), afin de leur laisser davantage de temps pour l'étude des conjectures (partie B), trop peu travaillée lors de la première préexpérimentation d'Orléans. De fait, ces dispositions s'avèreront utiles, car ces étudiants travaillent nettement plus lentement que les groupes G1 et G3 d'Orléans et nécessitent davantage d'aide. Nous sommes seul observateur de la séance. Ils disposent tous de calculatrices, dont ils ne feront en fait que très peu usage.

Question A/1°) :

Eric : *« La fonction exponentielle est à croissance forte sur R. »*
Les autres acquiescent.
Stéphane : *« Plus généralement, les fonctions du type exp(f) sont à croissance forte... »*
Grégory : *« ... Oui, mais à condition que f soit croissante ! Par exemple, $x \to x^\alpha$ convient pour $\alpha>0$. »*
Eric : *« Non, je ne suis pas d'accord, car par exemple $x \to x^2$ n'est pas croissante sur R, mais seulement sur R_+ ! »*
(...) Eric trace la parabole. Ils réfléchissent au problème posé...
Eric : *« ...Par exemple, $x \to \exp(x^3)$ convient sur R. »*
Grégory : *« Plus généralement, $x \to \exp(x^\alpha)$ avec α est un nombre impair... »*
Nous-même : *« Vous affirmez beaucoup de choses, mais je ne vous vois pas effectuer les calculs qui pourraient prouver ce que vous dites ! »*
(...)
Nous-même : *« Vous n'avez pas calculé la dérivée de f, alors comment pouvez vous dire qu'elle est strictement croissante pour $x \to \exp(x^3)$, par exemple ? »*
Ils dérivent l'expression f(x) et obtiennent $f'(x) = 3x^2.\exp(x^3)$... Ils réfléchissent.
Eric : *« ...f' n'est pas strictement croissante à cause du $3x^2$! »*
Olivier : *« Alors tu prends $f(x) = \exp(x^4)$, donc $f'(x) = 4x^3.\exp(x^4)$, et dans ce cas f' est strictement croissante puisque $x \to x^3$ est strictement croissante sur R ! »*
Eric : *« ... Oui, mais dans ce cas là, c'est f qui n'est plus strictement croissante sur R. On n'arrive pas à avoir les deux propriétés à la fois avec un polynôme ! »*
Nous-même (à tous) : *« Vous généralisez bien vite ! Et vous n'écrivez pas suffisamment de choses ; ce n'est pas un jeu de devinettes ! Est-ce que vous ne voyez pas un critère de nature purement calculatoire qui pourrait permettre de déterminer si une fonction est à croissance forte ou non ? »*
Olivier (il fait des gestes décrivant les variations respectives de $x \to x^3$ et de $x \to x^4$) :
« ... Si f n'est pas monotone, e^f n'est pas monotone, et si f' est strictement croissante $f'.e^f$ aussi »
Nous-même : *« Là encore, il faudrait justifier cela, vous restez à un niveau intuitif. De toutes façons, je parlais de critères très généraux, et bien connus, permettant de juger de la stricte croissance de f et f' ! »*
Ils semblent assez déconcertés. Nous les laissons réfléchir quelques instants.

Etant donné qu'ils n'ont rien à proposer, nous leur fournissons une réponse nous-même.

Nous-même : « *Il suffit d'avoir f' et f'' strictement positives sur R pour que f et f' soient strictement croissantes sur R ! C'est un critère opérationnel plus facile à utiliser que de tenter de déterminer à l'œil les variations, non ?* »

Nous recentrons ensuite le débat. Ils n'ont toujours pas trouvé de famille de fonctions croissance forte, alors que la séance est déjà commencée depuis plus de vingt-cinq minutes. Grégory propose alors une nouvelle famille :

Grégory : « *Les fonctions du type* $x \to a^x$ *pour* $a > 0$ *sont à croissance forte sur R* »

Nous-même : « *Là encore, vous affirmez quelque chose sans essayer de vérifier. Maintenant que l'on a un critère, utilisez le. Calculez f' et f'' !* »

Stéphane et Grégory ont trouvé : $f'(x) = x.a^{x-1}$ et $f''(x) = x(x-1).a^{x-2}$

Nous-même : « *Vos dérivées sont incorrectes car x n'est pas une constante, c'est la variable. Revoyez votre calcul !* »

Sébastien : « *Il faut poser* $a^x = e^{x\ln(a)}$ ... »

Nous-même : « *Oui, et que trouve t'on pour f' et f'' ?* »

Sébastien : « *On trouve alors :* $f'(x) = \ln(a).e^{x\ln(a)}$ *et* $f''(x) = (\ln(a))^2.e^{x\ln(a)}$ *!* »

Olivier et Grégory constatent alors avec un peu de scepticisme et d'étonnement que la fonction n'est à croissance forte que pour : $\ln(a) > 0$, donc $a > 1$ (et non pas $a > 0$ comme ils le pensaient !)...

On passe assez rapidement sur la question A/2°) : les étudiants pensent qu'il y a d'autres fonctions à croissance forte, même s'ils n'en ont pas trouvé encore...

Question A/3°) :

Le travail réalisé précédemment permet aux étudiants d'avancer un peu plus vite lors de la recherche d'exemples de fonctions paramétrées à croissance forte sur un intervalle spécifié. Ils dérivent deux fois la fonction $f : x \to A.(x-a)^{\alpha} + B$ pour obtenir assez rapidement : $f'(x) = A\alpha.(x-a)^{\alpha-1}$ et $f''(x) = A\alpha(\alpha-1).(x-a)^{\alpha-2}$, et étudient d'abord le signe de f'' puis celui de f'.

Sébastien : « *Il faut prendre A, α, et (α-1) strictement positifs et choisir ensuite a de façon à ce que (x-a) soit strictement positif sur]-10000 ; +∞[* »

Nous-même : « *Oui, c'est exactement cela !* »

Dans la réalisation, ils ont les mêmes difficultés que les étudiants d'Orléans à traduire sur le paramètre « *a* » la troisième condition. Sébastien arrive à résoudre cette question, tandis que ses camarades semblent un peu perdus... Mais le problème posé est surtout à l'origine d'un débat très interessant entre Sébastien et Olivier :

Olivier : « *En fait, on regarde uniquement la condition sur f'' ; si f'' est strictement positive, f' aussi !* »

Sébastien : « *Non, ce n'est pas une propriété générale !* »

Olivier : « *Ben si, regarde ! Pour A strictement positif et α supérieur à 1, on a bien Aα strictement positif, donc f' est positive !* »

Sébastien : « *Oui, mais c'est pas toujours vérifié cela !* »

Olivier : « *Pourquoi pas ?* »

Sébastien : « *Si f' est strictement croissante sur R, f' peut quand même être négative sur un intervalle, donc on peut avoir f'' positive avec f' négative ...* »

Comme ses camarades lui demande de donner un exemple, il donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Il cherche un exemple, mais ne trouve pas...

Nous-même : « *C'est pas difficile, prenez $f'(x) = x$ et cherchez une primitive de f* »

Sébastien : « *Ah oui, ben... $f(x) = x^2/2$ convient alors !* »

Nous-même : « *Voilà, par exemple !* »

Eric : « *...D'ailleurs je me souviens, on ne pouvait pas avoir $x \rightarrow \exp(x^{\alpha})$ et sa dérivée strictement croissantes sur R en même temps à cause de la parité de α, donc c'est le contraire ! On n'a pas en général f'' et f' positives !* »

Nous-même : « *Oui, enfin c'est surtout vrai ce que vous dites si on veut l'avoir sur R* »

Le groupe cherche ensuite une fonction à croissance forte sur $]-\infty ; 10000[$, qui soit du type : $x \rightarrow A.\ln(|x-a|) + B$, mais seul Sébastien trouve $x \rightarrow A/(x-a)$ et $x \rightarrow -A/(x-a)^2$ pour les deux premières dérivées.

Olivier, Grégory et Malika annoncent $x \rightarrow A/|x-a|$ pour la dérivée première et sont ennuyés pour re-dériver cette expression, tandis qu'Eric et Stéphane s'arrêtent à l'expression : $f'(x) = A(|x-a|)' / (|x-a|)$ qu'ils ne savent pas comment transformer.

Nous revenons personnellement sur ces deux derniers résultats, ce qui nous permet d'expliquer pourquoi c'est Sébastien qui a raison.

Les étudiants passent ensuite directement à la partie B, selon notre consigne.

Question B/1°) :

Nous-même : « *Commencez par interpréter graphiquement le terme $\alpha_0(x)$ pour x réel fixé non nul et $f(x) = e^x$.* »

Ils réfléchissent individuellement au problème, effectuent des tracés, puis se concertent. Stéphane, Grégory et Malika pensent que $\alpha_0(x)$ mesure la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse x, tandis que Sébastien, Eric et Olivier ne veulent pas se prononcer. Nous intervenons donc :

Nous-même : « *Que représente f'(x) pour x fixé ?* »

Eric : « *C'est le coefficient directeur de la tangente en x...* »

Nous-même : « *Alors dans ce cas, d'après vos camarades, $\alpha_0(x)$ et f'(x) s'interprètent graphiquement de la même façon ?* »

(...) Ils réfléchissent au problème quelques instants...

Stéphane : « *On s'est trompé, c'est f'(x), il a raison ! Donc pour $\alpha_0(x)$ on sait pas...* »

Grégory : « *On n'a pas $f'(x) = (f(x)-f(0)) / (x-0)$, mais en passant à la limite dans ce taux on obtient f'(x).* »

Stéphane : « *Non, je ne suis pas d'accord ! La limite de ce taux quand x tend vers zéro, c'est f'(0) et pas f'(x)...* »

Sébastien : « *Ce qu'il veut dire, c'est que si x est très proche de 0, $\alpha_0(x)$ et f'(x) c'est la même chose.* »

Grégory (pas très convaincu) : « *Ouais, c'est ça...* »

Olivier : « *Je ne comprends pas pourquoi vous dites que $\alpha_0(x)$ et f'(x) ce n'est pas la même chose. D'après le théorème des accroissements finis on sait que ces termes sont égaux !* »

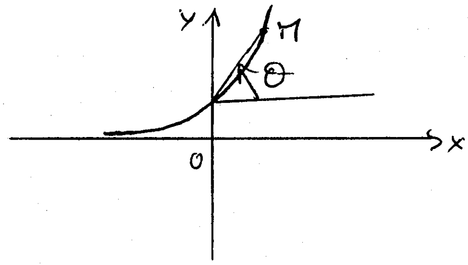
(...) Courte période de silence et de réflexion du groupe, faisant suite à ce « coup de théâtre ».

Stéphane : « *Non, c'est faux ! Dans le théorème des accroissements finis, il y a f'(c) et non pas f'(x)...* »

Olivier : « *Oui, c'est vrai ! Tu as raison !* »

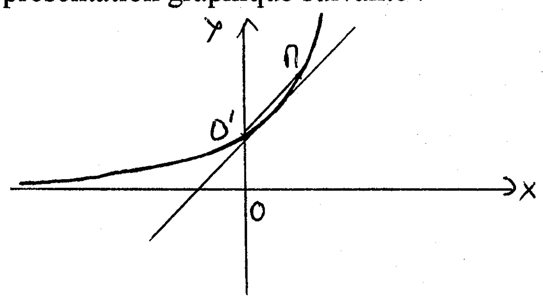
Nous tentons alors de recentrer les débats en demandant aux étudiants de représenter à nouveau la courbe exponentielle en plaçant les points concernés O'(0,1) et M(x, e^x), et d'interpréter graphiquement les différences (f(x) - f(0)) et (x-0) puis le quotient $\alpha_0(x)$. Ils arrivent alors à voir que $\alpha_0(x)$ mesure la pente de la corde O'M, puis que α_0 est une fonction croissante de x :

<u>Olivier :</u> « *$\alpha_0(x)$, c'est la tangente de l'angle θ fait par la droite (O'M)* »
Il fait des gestes et le schéma suivant :

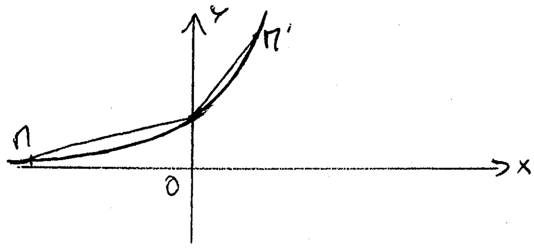


Ses camarades acquiescent après quelques instants...
<u>Stéphane :</u> « *$\alpha_0(x)$ mesure la pente de la corde alors que f'(x), c'est la pente de la tangente.* »
<u>Sébastien</u> : « *Et on voit que α_0 est strictement croissante car la droite (O'M) est de plus en plus inclinée quand M s'éloigne de O'* »
<u>Nous-même</u> : « *Oui, mais pour l'instant, vous n'avez considéré que le cas x positif !* »
(...)
<u>Eric</u> : « *α_0 est aussi strictement croissante sur R^*_-, car la droite (O'M) est de moins en moins inclinée quand M s'éloigne de O' par la gauche...* »
<u>Nous-même :</u> « *D'accord. Et concernant le signe de α_0 - f', que peut on dire ?* »
(...) Ils cherchent la réponse à ce nouveau problème...

<u>Grégory :</u> « *On a : $\alpha_0(x)>f'(x)$ partout, car la corde est au-dessus de la courbe et la tangente en dessous de la courbe en tout point !* »
Il a effectué la représentation graphique suivante :



<u>Nous-même</u> : « *Regardez pour une valeur de x fixée de façon unique, si la pente mesurée par $\alpha_0(x)$ est plus ou moins forte que celle mesurée par f'(x)...* »
<u>Sébastien</u> annonce : « *$\alpha_0(x) < f'(x)$ pour $x>0$ et $\alpha_0(x) > f'(x)$ pour $x< 0$* »,
après avoir réalisé le schéma suivant :



Ils butent ensuite sur le problème de l'allure générale des courbes représentatives des fonctions α_0 et f ', dans un premier temps parce qu'ils oublient que la question est posée pour la fonction exponentielle (et non pas n'importe quelle fonction à croissance forte), et dans un second temps parce qu'ils pensent devoir, pour cela, d'abord étudier la fonction $x \rightarrow (e^x-1) / x$, alors qu'ils constatent que ce n'est pas demandé par le texte. Sébastien utilise finalement sa calculatrice graphique. Nous lui demandons d'afficher le graphe des deux fonctions $x \rightarrow e^x$ et $x \rightarrow \alpha_0 (x) = (e^x-1) / x$ conjointement. Pour gagner du temps, nous leur montrons nous-même comment on peut tirer des résultats précédents, sans l'aide de la calculatrice, l'allure des deux courbes en les positionnant l'une par rapport à l'autre, et en complétant cela par un calcul des limites aux bornes...

Question B/2°) :

Nous-même : « *Vous pouvez tenter de tester les autres exemples de fonctions à croissance forte qui ont été trouvées. Pourquoi n'utilisez vous pas votre calculatrice graphique ?* »

Stéphane : « *On n'a plus l'habitude d'utiliser la calculatrice, et de toutes façons, çà ne prouvera pas que c'est général !* »

Grégory : « *Comment peut on s'apercevoir que toute fonction à croissance forte vérifie les conjectures, si on ne connaît pas toutes les fonctions à croissance forte, et qu'en plus on en connaît très peu ?* »

Certains de ses camarades acquiescent...

Nous-même : « *Par des considérations graphiques d'ordre général, une démonstration. On sait par exemple que toute fonction dérivable en un point est continue en ce point sans avoir eu pour autant à tester toutes les fonctions dérivables qui existent... On ne pourrait pas le faire d'ailleurs !...* »

(...) Ils semblent tous assez désorientés. Nous reprenons :

Nous-même : « *Vous disposez de certaines hypothèses sur les fonctions à croissance forte...f strictement croissante, f' strictement croissante... A partir de là, vous pouvez essayer d'en déduire quelque chose sur les variations de α_0 ou le signe de la quantité $(\alpha_0 - f')(x)$...* »

(...) Ils réfléchissent.

Nous-même : « *Tentez d'interpréter graphiquement la propriété de croissance forte !* »

Olivier : « *Si f' est croissante, cela signifie que la pente de la tangente est de plus en plus forte ! On a vu ça quand on a fait la convexité en cours...* »

Sébastien (il effectue un tracé correspondant à la même idée) :

« *Oui, f est croissante et la pente est de plus en plus inclinée, donc on aura toujours à peu près la même courbe, donc les deux conjectures doivent se généraliser !* »

Nous-même : « *Oui, c'est l'idée... On peut jouer sur les limites aux bornes bien sûr, mais sur le principe, vous avez raison... Bon, passons à la démonstration rigoureuse maintenant.* »

(...)

Nous les laissons chercher quelques minutes... puis nous les aidons à nouveau :

Nous-même : « *Refaites un tracé de l'exponentielle, et placez la corde O'M dont α_0 mesure la pente, et la pente de la tangente en M mesurée par f'(x) !* »

Ils s'exécutent.

Nous-même : « *A quelle pente est égale la pente de la corde ?* »

Malika : « *A la pente en un point entre 0 et x !* »

Nous-même : « *Oui, très bien ! Placez la sur le schéma !* »

Elle le fait sans encombre…

Nous-même : « *A quoi vous fait penser cette situation ?* »

Malika : « *A la formule des accroissements finis, $(f(b)-f(a))/(b-a) = f'(c)$, le dessin a été fait en cours !* »

Grégory et Stéphane : « *Nous, on n'a jamais vu ce dessin en cours au moment où on a fait le théorème des accroissements finis !* »

Nous demandons alors à Malika d'expliquer son idée à ses camarades… Elle obtient ainsi l'égalité : $f(x)-f(0) = x.f'(c)$, pour c entre 0 et x. Eric termine le raisonnement :

Eric : « *Comme $\alpha_0(x) = f'(c)$ pour $0<c<x$, et comme $f'(c)<f'(x)$, on en déduit que $\alpha_0(x)<f'(x)$!* » (il écrit en même temps qu'il dit)

Nous-même : « *Oui d'accord, mais comment justifiez vous le fait que $f'(c)<f'(x)$?* »

Eric : « *Ben, ça se voit sur le dessin !* »

Nous-même : « *Attention ! On est en train de démontrer, donc il faut fournir à présent des justifications rigoureuses. La représentation graphique, on s'en sert pour trouver l'idée intuitivement, mais ensuite, le résultat, il faut le prouver, de même que le théorème des accroissements finis peut se voir graphiquement, mais en cours il a aussi été démontré…* »

(…) Période de flottement. Comme ils ne trouvent pas, nous leur donnons donc la justification :

Nous-même : « *Il faut tout simplement invoquer le fait que f' est strictement croissante, ce qui est l'une des deux propriétés caractérisant les fonctions à forte croissance. Comme $c<x$, on a bien alors $f'(c)<f'(x)$.* »

Nous leur rappelons ensuite qu'il faut aussi regarder pour les valeurs de x strictement négatives. Ils établissent alors ensemble, et sans trop de difficultés, le fait que l'on a : $\alpha_0(x) > f'(x)$ pour tout $x<0$. On en vient à présent à la preuve de la stricte croissance de α_0 sur R_-^* et R_+^* pour une fonction quelconque à croissance forte…

Grégory : « *On ne peut pas étudier la fonction α_0 si on ne connaît pas f !* »

Olivier : « *On peut tenter de le faire pour la fonction exponentielle…* »

Les autres sont d'accord. Ils calculent ensemble la dérivée de α_0 pour $f(x) = e^x$ et obtiennent : $(\alpha_0)'(x)= (xe^x-e^x+1) / x^2$, ce qui les amènent à résoudre l'équation : $(x-1).e^x = -1$… Cela débouche rapidement pour eux sur une impasse :

Eric : « *On peut essayer de passer en log !* »

Grégory : « *Oui, mais il y a –1 à droite ; on peut pas en prendre le log !* »

Stéphane : « *Il suffit de changer le signe, on écrit : $(1-x).e^x = 1$.* »

Ils obtiennent ensuite l'équation : $\ln(1-x) + x = 0$, dont ils voient que 0 est une racine.

Eric : « *On n'est pas sûr que zéro soit la seule solution !* »

(…) Ils semblent à partir de là assez perdus.

Nous-même : « *Oui, Eric à raison, et vous êtes en train de perdre de vue votre objectif qui est d'étudier le signe de la dérivée $(\alpha_0)'$… Je vais vous donner une indication : il faut re-dériver.* »

Un court débat s'ouvre à nouveau entre eux à partir de notre indication : Eric et Malika estiment qu'il suffit de re-dériver l'expression $u(x) = xe^x-e^x+1$ pour avoir son signe, parce que le signe du dénominateur de $(\alpha_0)'$ est déjà connu (« *cela simplifie le travail* » selon eux), tandis que les autres étudiants pensent qu'il faut plutôt re-dériver $(\alpha_0)'$, « *pour assurer* » affirme Stéphane. Nous proposons aux uns et aux autres de suivre la stratégie qu'ils préconisent « *pour voir qui s'en tirera le mieux* ».

Eric et Malika obtiennent : $u'(x) = x.e^x$, dressent alors le tableau des variations de la fonction u, repèrent son signe et en déduisent la stricte croissance de α_0 sur R_-^* et R_+^*.

Nous leur faisons remarquer enfin que la fonction α_0 est prolongeable par continuité en zéro. Les autres étudiants se sont trouvés face à une impasse, l'expression de $(\alpha_0)''(x)$ étant plus complexe encore que celle de $(\alpha_0)'(x)$.

Nous leur proposons rapidement, la séance arrivant à son terme, de généraliser ce résultat en essayant de dériver de même l'expression $\alpha_0(x)$ pour une fonction f quelconque.
Ils s'exécutent.
Olivier : « ... *On a trouvé ça en dérivant le terme $\alpha_0(x)$...* »
(il montre ce qu'il a écrit : $(\alpha_0)'(x) = (x.f'(x) - x.f'(0) - f(x) + f(0)) / x^2$)
Nous-même : « *Vous avez commis une erreur de calcul dans la dérivée de la fonction qui à x associe f(x)-f(0)...* »
(Nous écrivons en même temps)
« *...C'est x donne f'(x) et non pas x donne f'(x)-f'(0), car f(0) est une constante qui disparaît par dérivation* »
Ils rectifient leur calcul. Nous leur conseillons alors d'identifier le terme $\alpha_0(x)$ dans l'expression de $(\alpha_0)'(x)$, parce qu'ils ne savent pas comment exploiter leur calcul.
Ils obtiennent : $(\alpha_0)'(x) = (f'(x) - \alpha_0(x)) / x$.
Sébastien remarque alors que le signe de la quantité $(f'(x) - \alpha_0(x))$ a déjà été obtenu précédemment. Il en déduit ainsi la stricte croissance de α_0 sur R_-^* et R_+^*.
La séance se termine là.

ANNEXE 18

EXPERIMENTATION DE L'ATELIER N°2 SOUS SA NOUVELLE VERSION A L'UNIVERSITE DE MARNE-LA-VALLEE (SEANCE N°1)
(groupe Sylvain, Leslie, Smail, Stephen, Béatrice – Avril 1997)

Nous travaillons cette fois sur la version remaniée de l'atelier 2, qui se déroule à présent sur deux séances d'une durée de deux heures chacune. Cette première séance est réservée à la familiarisation des étudiants avec les fonctions à croissance forte : recherche de C.N.S opérationnelles, interprétation graphique et étude d'exemples...
Cet atelier prend place environ un mois après la seconde préexpérimentation de la version d'origine effectuée à l'université de Marne-la-vallée.
Il s'agit ici d'un public d'étudiants ayant été admis dans le module M2 (second module de la première année de DEUG A) suite aux examens de Janvier 1997.
Ils disposent tous de calculatrices. Je suis seul observateur de la séance.

Question A/1°) :
Sylvain : « *...Il faut que la dérivée seconde soit positive et... c'est tout, parce que si f'' est positive, f' est aussi positive.* »
Leslie : « *Je ne suis pas d'accord, si f'' est positive on n'a pas forcément f' positive !* »
Nous-même : « *Vous avez un contre-exemple ?* »
Stephen : « *x donne x^3, on a f' positive, donc f croissante, et f''... ah non, ça marche pas, c'est le contraire qu'on veut...* »
Leslie : « *Si $3x^2$ c'est la dérivée seconde, ça marche, x^3 est la dérivée première, donc f'' est positive sur R alors que f' est négative sur R- !* »
Sylvain : « *Ah oui, alors il faut les deux , f' et f'' positives pour que f soit à croissance forte. En fait, il faut même qu'elles soient strictement positives, car on veut que f et f' soient strictement croissantes.* »
(...)
Smail (s'adressant à moi) : « *Est-ce que les fonctions à croissance forte sont les fonctions convexes ?* »
Nous-même : « *C'est une bonne question. Essayez d'y répondre vous-mêmes !* »
Sylvain : « *Une fonction à croissance forte est convexe mais on n'a pas la réciproque. Convexe, c'est simplement la dérivée seconde positive...* »
Smail : « *Oui, en plus c'est juste positive ou nulle, pas strictement positive !* »
Stephen : « *Alors une fonction affine n'est pas à croissance forte ?* »
Sylvain : « *Ben... non ! Je suppose que à croissance forte, ça veut dire que ça monte très vite !* »
(...)
Nous-même : « *Bon, on passe à la question suivante : s'agit-il de conditions nécessaires ou simplement suffisantes ?* »
Smail : « *Il y a équivalence entre f'' strictement positive et f' strictement croissante. Ben oui, c'est nécessaire et suffisant !* »
Sylvain : « *Non, regarde ! Si on prend x donne x^3, c'est strictement croissant mais la dérivée s'annule en zéro. On a vu ça en cours au premier semestre !* »
Béatrice : « *On n'était pas dans le même amphi que toi au premier semestre !* »
Leslie : « *Tu dis que c'est strictement croissant, x donne x^3 ? En zéro, c'est constant !* »
Sylvain : « *Non, ça continue de monter !* »
Béatrice : « *Moi, je crois que c'est pas strictement croissant. En 0, elle est plate !* »
Stephen : « *Je suis d'accord avec elle !* »

(...) Ils s'opposent encore quelques instants sur ce point. Sylvain n'a pas d'argument vraiment convaincant à leur fournir. Il demande mon arbitrage...

Nous-même (en écrivant): « *Il faut revenir à la définition de la stricte croissance, qui est : si $x<y$, alors $f(x)<f(y)$. Donc la stricte croissance n'est pas satisfaite si on peut trouver x et y, ici voisins de zéro, vérifiant $x<y$ et $x^3 = y^3$... Est-ce possible ?* »

Sylvain : « *Non, justement !* »

Nous-même : « *Pourquoi ?* »

Sylvain : « *Parce que si $x^3 = y^3$, on a forcément $x = y$!* »

Nous-même : « *Oui, enfin, cela n'est pas si évident, il faudrait le prouver en résolvant vraiment cette équation... Mais vous pouvez raisonner aussi en envisageant les divers cas possibles...* »

Nous écrivons tout en parlant :

Nous-même : « *Il y a les cas : $x<y<0$, $x<y = 0$, $x<0<y$, $x = 0<y$, $0<x<y$. Est-ce qu'il y a un seul de ces cas où l'on peut avoir $x^3 = y^3$?* »

Leslie : « *Non, c'est impossible !* »

Nous-même : « *Donc ?* »

Leslie : « *C'est que l'on a forcément $x = y$ si $x^3 = y^3$!* »

Nous-même : « *Voilà ! Donc la fonction qui à x associe x^3 est strictement croissante sur R ; sur aucun intervalle du type $]-\varepsilon,+\varepsilon[$, même très petit, f n'est constante.* »

Ils ont l'air cette fois assez convaincus. Je poursuis donc :

Nous-même : « *Alors reprenons ! Est-ce que f' et f'' strictement positives est une condition nécessaire ou suffisante pour que f soit à croissance forte ? Dans quel sens est-ce vérifié ? Si f' et f'' sont strictement positives, est-ce que f est à croissance forte ?* »

L'ensemble du groupe : « *Oui, ça c'est sûr !* »

Nous-même : « *Et inversement ?* »

Smail : « *Ben non, parce que x donne x^3 est strictement croissante alors que sa dérivée est seulement positive ou nulle...* »

Nous-même : « *Voilà, c'est l'idée ! On peut avoir f et f' strictement croissantes et f', f'' positives ou nulles. La condition f' et f'' strictement positives est suffisante mais pas nécessaire pour avoir f à croissance forte.* »

(...) Ils semblent avoir compris et passent à la question suivante.

Question A/2°) :

Ils semblent un peu décontenancés par la question : « *Comment doit on interpréter graphiquement la croissance forte ?* »... Nous les aidons un peu :

Nous-même : « *Tout à l'heure, vous avez parlé de convexité. Comment se caractérise t'elle graphiquement ?* »

Stephen : « *Il ne faut pas qu'il y ait un changement de courbure...* »

Smail : « *Oui, par exemple avec d'un côté convexe, de l'autre concave et au milieu le point d'inflexion en lequel elle change de concavité.* »

Nous-même : « *D'accord, là vous me dites ce qu'il ne faut pas avoir ; mais dites plutôt ce qu'il faut avoir !* »

Stephen : « *Moi je dirais que c'est une fonction qui se sépare de plus en plus de la droite $y = x$, ... au moins à partir d'un certain rang... ou partout... c'est-à-dire... vérifiant $f(x)\geq x$ et la fonction $x \rightarrow f(x)-x$ strictement croissante !* »

Sylvain (dubitatif) : « *C'est une conjecture ?* »

Stephen : « *Ben, si on prend des exemples de fonctions à croissance forte, ça marche, non ?* »
Sylvain : « *Quels exemples ? La fonction exponentielle ?* »
Stephen : « *Oui, ou bien x donne x^n sur R_+, regarde !* »
Il calcule par écrit les deux premières dérivées de la fonction f : $x \to x^n$, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, constate qu'elles sont positives sur R_+ et affirme que cette fonction satisfait à : $f(x) \geq x$ sur R_+ et $x \to f(x)-x$ strictement croissante sur R_+. Comme personne ne conteste, nous rectifions : « *C'est vrai sur $[1,+\infty[$* ».
Ils constatent de même que l'exponentielle vérifie ces deux propriétés (la première sur R, et la seconde sur R_+)... Ils sont donc d'accord entre eux.

Nous-même : « *Ce n'est pas parce que, sur des exemples précis, il y a concommittance de la croissance forte et de vos deux propriétés qu'il y a un lien d'implication entre les deux choses. C'est peut-être un hasard !* »
(...) Ils réfléchissent, ont quelques difficultés à comprendre l'objection.

Stephen (il écrit) : « *Si je pose $\varphi(x) = f(x)-x$, par dérivation ça donne $\varphi'(x) = f'(x)-1$, et ce terme est positif au moins à partir d'un certain rang car si f' est strictement croissante elle dépasse 1 à partir d'un certain rang.* »
Personne ne récuse ce raisonnement. Nous intervenons donc :
Nous-même : « *Une fonction strictement croissante ne dépasse pas nécessairement 1 ; elle peut par exemple admettre l'asymptote horizontale d'équation y=1 en $+\infty$ et se situer partout en dessous de cette asymptote !* »
Nous donnons un exemple, la fonction $x \to 1-1/x$ pour $x \geq 1$, dont nous traçons le graphe.
(...)

Smail : « *Moi je pense que pour que f soit à croissance forte, il faut d'une part avoir f croissante... enfin, strictement croissante,... et d'autre part, la pente de la tangente en 0 doit être supérieure ou égale à celle de y = x, donc f'(0)> 1.* »
Il trace en même temps un début de courbe à croissance forte pour illustrer son idée.
Nous-même (aux autres) : « *Vous êtes tous d'accord ?* »
(...) Ils ne savent pas, ne se prononcent pas.
Nous-même : « *Votre condition f'(0)> 1 n'est pas nécessaire. Pour la fonction qui à x associe x^2, à croissance forte sur R_+, on a f'(0)=0 !* »
Smail : « *Oui, mais si on a les deux conditions : f est strictement croissante et f'(0)> 1, la fonction f sera à croissance forte !* »
Nous-même (écrivant) : « *Pas davantage, ça peut monter doucement à partir de zéro ! Si je prends racine carrée de x+1,... disons le triple de cela, la dérivée en zéro vaut 3/2, la fonction est strictement croissante sur R_+, mais pas à croissance forte.* »
Nous traçons le graphe de cette fonction et en calculons la dérivée seconde.
Smail : « *Bon, alors il faut f croissante et f' croissante aussi.* »
Sylvain (un peu amusé) : « *Oui, mais ça on le savait déjà, c'est l'énoncé !* »
Nous-même : « *Mais la dérivée strictement croissante, c'est visualisable comment ?* »
Stephen : « *Les coefficients directeurs augmentent...* »
Smail : « *Ah oui, c'est ça, les pentes des tangentes en un point sont croissantes !* »
Stephen : « *Avec $f(x) \geq x$... à partir d'un certain rang, ça on peut le garder ?* »
Nous-même : « *Non, pas davantage que votre autre idée, qui était de dire que la fonction $x \to f(x)-x$ est croissante ! La fonction et les pentes peuvent très bien croître strictement, et le graphe rester en dessous de y=x !* »

(...) Nous cherchons un exemple à leur donner.

Nous-même : « *Si je prends la fonction $x \to x/2+ e^{-x}$ dont la dérivée, $1/2-e^{-x}$, est positive et strictement croissante sur $]ln(2) ;+\infty[$, on voit que la courbe est en dessous de la première bissectrice !* »

A notre demande, ils vérifient les calculs : $f(x) = x/2 + e^{-x}$, $f'(x) = 1/2-e^{-x}$, $f''(x)= e^{-x}$ ainsi que : $f'(x) = 1/2-e^{-x} >0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1/2 \Leftrightarrow -x < -\ln(2) \Leftrightarrow x > \ln(2)$.

Nous nous apercevons que l'inéquation : $f(x) \leq x$, équivalente à : $e^{-x} \leq x/2$, est valable au moins pour $x\geq1$, car elle est satisfaite pour $x =1$, et $x\to x/2$ croit alors que $x \to e^{-x}$ décroit... Nous leur demandons de passer rapidement sur la question suivante pour en venir très vite à la partie B. La longue digression précédente a permis à chacun de se familiariser avec la propriété de « croissance forte » et ils effectuent divers tracés sans toutefois percevoir que l'on peut jouer un peu sur les limites aux bornes. Traçant assez systématiquement des courbes correspondant à : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)= +\infty$, ils ne voient donc guère de différence d'une courbe à l'autre.

Question B/1°) :

La fonction exponentielle, déjà évoquée précédemment, est citée en exemple.

Sylvain : « *Pour la famille, on peut prendre x donne x^n avec n pair.* »

Béatrice : « *Mais non ! On a vu tout à l'heure que $x\to x^2$, ça ne marche que sur R_+ !* »

Sylvain : « *Ah oui, c'est vrai !* »

Smail : « *Avec n impair, par exemple x^3, c'est bon, c'est strictement croissant sur R !* »

Leslie : « *Oui, mais la dérivée seconde, 6x, n'est positive que sur R_+, donc f' n'est pas strictement croissante sur R !* »

(...) Ils cherchent mais ne trouvent pas de famille de fonctions à croissance forte. Nous leur citons la famille des exponentielles $x\to e^{ax}$ avec $a>0$. Ils passent à la suite.

Question B/2°)a) :

Cette question fait l'objet d'un simple rappel puisque le travail précédent les a amenés à dire que la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x^n$ est à croissance forte sur R_+ pour $n\geq2$.

Question B/2°)b) :

Sylvain : « *C'est un peu comme pour la fonction $x\to x^n$. On a : $F_n'(x) = n.(x-a)^{n-1}$ et $F_n''(x) = n(n-1).(x-a)^{n-2}$, donc la fonction F_n est à croissance forte pour n supérieur ou égal à 2 et $x-a \geq 0$.* » (il a écrit)

Smail : « *Comme l'intervalle qu'on nous donne, c'est]-100, +∞[, il faut que a vaille au moins 100,... non –100 !* »

Leslie : « *Non, il faut avoir –a supérieur ou égal à 100, donc il faut avoir a inférieur ou égal à –100 !* »

Sylvain : « *OK, on passe à la question suivante !* »

Smail : « *C'est pareil en remplaçant –100 par –10000 ! On doit avoir n supérieur ou égal à 2 et a inférieur ou égal à –10000...* »

Sylvain : « *Bon, d'accord, c'est facile. Alors sur R maintenant !* »

Stephen : « *C'est encore pareil, il suffit de prendre x supérieur au nombre a !* »

Smail : « *Oui, mais pour x réel quelconque, donc il faudrait que a aille jusqu'à -∞ ; c'est possible ça ?* »

Stephen : « *Ben... oui, a appartient à R, donc il peut aller jusqu'à -∞ !* »

Leslie : « *Mais a c'est une constante ! Il peut pas dépendre de x !* »

Sylvain : « *On peut pas donner de valeur précise au nombre a. On peut seulement dire que a doit être inférieur à x.* »

Leslie (avec plus insistance) : « *Mais non, a n'est pas fonction de x, on peut pas ! D'ailleurs dans l'énoncé, c'est marqué : ...* »

Elle lit : « *...En déduire les valeurs de n et a* ***s'il en existe***... » (elle insiste sur la fin)

Sylvain (avec un air malicieux) : « *Ah oui, tu as vu ça... C'est toi qui as raison, ça ne marche pas, il n'en existe pas !* »

Cette fois, tous les étudiants du groupe sont convaincus du fait que Leslie a raison. Ils en viennent donc à la question suivante.

Question B/2°)c) :

Sylvain : « *La fonction x → A.ln (|x-a|) ne peut pas être à croissance forte, puisque le log croit lentement !* »

Ses camarades semblent convaincus par cet argument qui leur paraît être de bon sens. Nous intervenons avant qu'ils ne passent à la question suivante :

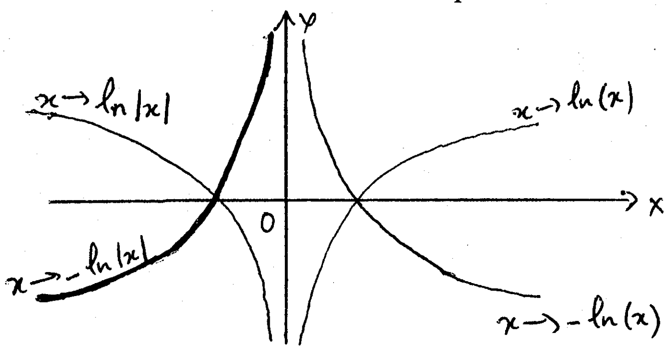
Nous-même : « *Oui, votre argument est intéressant car il est qualitatif, mais vous avez vu : il y a un coefficient A devant le log ! Ce coefficient peut-être positif ou négatif. Il vaudrait mieux que vous fassiez vraiment les calculs...* »

Ils commencent à dériver l'expression, mais trouvent : $g'(x) = A / |x-a|$. Nous leur faisons rectifier leur erreur en leur rappelant qu'une primitive de f' / f est : $\ln(|f|)$.

Ils obtiennent alors : $g'(x) = A / (x-a)$ et $g''(x) = -A / (x-a)^2$ et en déduisent que g est à croissance forte pour A strictement négatif et x élément de $]-\infty ; a[$.

Nous même (à Sylvain): « *Par rapport à votre approche qualitative de tout à l'heure, ce résultat peut très bien s'interpréter. Prenons A = -1 et a = 0, par exemple . On obtient la fonction qui à x associe –ln(|x|), définie sur R^*, dont je trace le graphe :...* »

Nous réalisons le tracé suivant et nous demandons à Sylvain de repérer si la branche correspondant à x< 0 est bien à croissance forte. Il opine du chef.



Nous passons à la question suivante...

Question B/2°)d) :

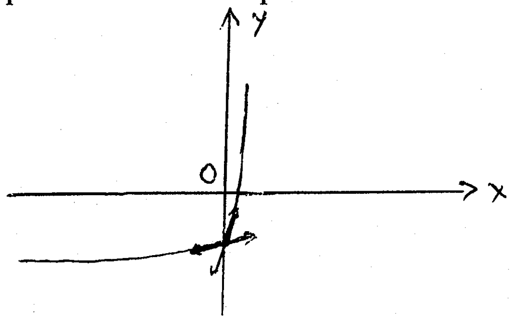
Ils dérivent deux fois et trouvent $]-\pi/2, 0[$ comme domaine de « forte croissance » pour la fonction sinus. Nous leur précisons simplement qu'en fait, cette fonction est à « forte croissance » sur tout intervalle du type : $]-\pi/2 + 2k\pi, 2k\pi [$. Ils retrouvent aisément le résultat de manière graphique sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.

Question B/3°)a) :

Sylvain : « *Ben, déjà il faut que f_1 et f_2 soient à croissance forte sur R pour que f soit à croissance forte !* »

Leslie : « *C'est plutôt f_1 à croissance forte sur R- et f_2 à croissance forte sur R_+^** »

Sylvain : « ... *Oui, tu as raison, ... mais bon, si elles sont à croissance forte sur R, c'est encore mieux.* »
Smail : « *Moi, je crois qu'il faut aussi avoir $f'_2(0)$ supérieur ou égal à $f'_1(0)$ pour que ça marche.* »
Stephen : « *$f'_2(0)$ strictement supérieur à $f'_1(0)$, non ?* »
Sylvain : « *Non, il faut qu'elle soit dérivable en 0, donc on doit avoir $f'_2(0)$ égal à $f'_1(0)$* »
Smail : « *Moi, je dirais plutôt supérieur ou égal... ou alors, d'accord, disons $f'_2(x)$ supérieur ou égal à $f'_1(0)$ pour x strictement positif...* »
(...)
Leslie : « *En plus, il faut qu'elle soit continue en zéro !* »
Sylvain : « *Oui, c'est vrai aussi.* »
(...)
Devant l'affluence des propositions, qui leur paraissent avoir une certaine pertinence, les étudiants semblent être dans la confusion. Nous tentons de mettre un peu d'ordre :
Nous-mêmes : « *Bon, essayons de faire le bilan de ce que vous avez dit : f_1 doit être à croissance forte sur R-, et f_2 sur R_+^*, et vous pensez qu'il doit y avoir en zéro une ou plusieurs conditions supplémentaires, parce qu'il y a un problème en ce point, c'est bien ça ?* »
Stephen : « *Oui, mais moi, il y a quelque chose que je ne comprends pas : $f'_2(0)$ en fait, ça n'existe pas ! f_2 est définie pour x strictement positif seulement.* »
Nous-mêmes : « *Non, regardez dans l'énoncé quelles hypothèses on a sur f_2 : elle est indéfiniment dérivable sur R ! Donc vous pouvez considérer $f'_2(0)$, mais le problème de la dérivabilité de f en 0, c'est autre chose !...* »
Stephen : « *Ah oui, d'accord !* »
Nous-mêmes : « *Bon, reprenons ! Donc en zéro, que faut-il avoir ?... Smail avait dit : $f'_2(0)$ supérieur ou égal à $f'_1(0)$... alors que pensez vous du schéma suivant : ...* »
Nous réalisons le tracé d'une fonction à croissance forte sur *R*- et sur R_+^*, mais avec une pente *strictement* supérieure en 0^+ à ce qu'elle est en 0^- :



Sylvain : « *C'est pas dérivable en 0, il y a un point anguleux...* »
Nous-mêmes : « *Donc, est-il possible d'avoir $f'_2(0)$ strictement supérieur à $f'_1(0)$?* »
Smail : « *Ben non, il faut qu'ils soient égaux sinon c'est pas dérivable en 0.* »
Cette fois, l'ensemble du groupe semble convaincu.
Nous-mêmes : « *Alors, si on fait le bilan des conditions nécessaires pour avoir f à croissance forte sur R, qu'est ce qu'il faut retenir ?* »
Leslie : « *f_1 à croissance forte sur R-, f_2 à croissance forte sur R_+^*...* »
Sylvain : « ... *et f continue en zéro, dérivable en zéro.* »
Nous-mêmes : « *Ce que vous dites peut se résumer : si f est dérivable en zéro...* »
Smail : « ... *Elle est aussi continue en zéro.* »

Nous-mêmes : « *OK, très bien... donc à part les conditions de croissance forte sur f_1 et f_2, il faut que f soit dérivable en zéro.* »

(...)

Béatrice : « *Et si $f'_2(0)$ est égal à $f'_1(0)$, est-ce qu'on est sûr que f est dérivable en 0 ?* »

Sylvain : « *Ah oui, c'est vrai ça, il faut aussi avoir $f_1(0)$ égal à $f_2(0)$ pour qu'elle soit continue.* »

(...)

A partir de la remarque de Sylvain, il y a rapidement accord entre les divers étudiants du groupe pour dire qu'il convient de vérifier à la fois les deux conditions : $f_1(0) = f_2(0)$ et $f_2'(0) = f_1'(0)$ si on veut être assuré de la dérivabilité de f en zéro.
Le groupe, qui a donc obtenu quatre conditions nécessaires pour avoir f à croissance forte sur R, à savoir : *f_1 doit être à croissance forte sur R-, f_2 à croissance forte sur R_+^*, $f_1(0)$ doit être égal à $f_2(0)$, et $f_2'(0)$ égal à $f_1'(0)$,* arrête là son travail concernant la question B/2°)b), sans donc faire, semble t'il, de distinction entre conditions nécessaires et conditions suffisantes. Nous sommes proches du terme de la séance, et dans la mesure où il s'agit bien de conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit à croissance forte sur R, nous n'intervenons pas.
La question B/3°)b) est traitée sans le moindre problème par le groupe comme une application de la question précédente. Par contre, la question B/4°) laisse les étudiants assez perplexes. Nous leur expliquons que, dans la mesure où nous avons trouvé fort peu d'exemples de fonctions à croissance forte sur R, alors qu'il est assez fréquent qu'une fonction soit à croissance forte sur un intervalle de R, un procédé pour obtenir de nouvelles fonctions à croissance forte sur R peut consister, selon le principe de la question précédente, à effectuer le « recollement » d'expressions de fonctions à croissance forte sur des intervalles constituant une partition de R.

EXPERIMENTATION DE L'ATELIER N°2 SOUS SA NOUVELLE VERSION A L'UNIVERSITE DE MARNE-LA-VALLEE (SEANCE N°2)
(groupe Sylvain, Leslie, Smail, Stephen, Béatrice – Mai 1997)

Cette seconde séance est réservée au travail de conjecturation et de démonstration des étudiants sur les fonctions à croissance forte : approche graphique puis recherche de la preuve, dans le cas de la fonction exponentielle, puis dans le cas général.
Il s'agit des mêmes étudiants que ceux qui ont participé à la première séance.
Ils disposent tous de calculatrices. Je suis seul observateur de la séance.

Question A/1°) :
Après quelques instants de réflexion, pendant lesquels ils ont recopié certains éléments de l'énoncé, en particulier l'expression de $\alpha_0(x)$, et effectué quelques schémas (courbe de l'exponentielle, corde joignant O'(0,1) et $M(x,e^x)$, tangente en $M(x, e^x)$...) :

Stephen : « *Ben...f'(x) c'est la limite de $\alpha_0(x)$ quand x tend vers zéro !* »
Sylvain : « *Attend !...Non, c'est f'(0) la limite de $\alpha_0(x)$ quand x tend vers zéro !* »
Stephen : « *...Ah oui ! Moi, je pensais que c'était en n'importe quel point, qu'il suffisait de prendre la corde de passer à la limite pour avoir la tangente.* »
Sylvain : « *Non ! Il faut regarder les points ; $\alpha_0(x)$, c'est le taux d'accroissement entre zéro et x, donc sa limite quand x tend vers zéro c'est f'(0) !* »
Stephen : « *OK, je comprends...* »
(...)
Béatrice : « *Bon, alors $\alpha_0(x)$, c'est la pente ... de la tangente ?* »
Leslie : « *Non... de la corde !...* »
Béatrice : « *...Et f'(x) celle de la tangente, c'est ça ?*
Sylvain : « *Oui, je crois que c'est cela.* »
Nous confirmons. Ils passent à la question suivante.

Question A/2°) :
Stephen : « *La pente de la corde, elle est croissante quand tu t'éloignes de l'origine dans ce sens là, et décroissante que tu vas dans l'autre sens.* »
Il désigne tour à tour, sur la courbe exponentielle, l'évolution d'un point M dont la valeur d'abscisse irait de x positif à $+\infty$, et de x négatif à $-\infty$.
Sylvain : « *Ah non, moi je ne crois pas. Moi je pense que la pente de la corde, elle croit tout le temps justement !* »
Stephen : « *Ben, je sais pas... C'est pas clair ça. Tu prends la corde dans quel sens pour voir le sens de variations ?* »
Sylvain : « *Il faut prendre le point M qui parcourt R... donc de $-\infty$ à 0 et de 0 à $+\infty$. Et si on fait ça, on voit que c'est croissant tout le temps !* »
Stephen : « *Ah oui... moi je n'ai pas compris le problème comme ça ! Je croyais qu'il fallait prendre un point x négatif et s'éloigner de plus en plus de l'origine pour voir l'évolution. Et refaire la même chose de l'autre côté pour les x positifs. Donc moi je m'arrête en zéro et je repars de l'autre côté.* »
Béatrice : « *Mais il faut prendre x qui croit pour voir si une fonction est croissante ou décroissante... Donc c'est lui qui a raison !* »
Stephen en convient peu à peu, et nous venons confirmer l'affirmation de Béatrice.

Nous-mêmes : « *Bon, ce point étant éclairci, est-ce que vous êtes tous d'accord avec Sylvain sur le fait que la fonction est croissante sur* R_-^* *et* R_+^* ? »

Stephen : « *Si on part de zéro et qu'on va vers des valeurs de plus en plus négatives, ça décroit, mais comme il faut partir de* $-\infty$ *et aller jusqu'à zéro, c'est croissant* $\alpha_0(x)$, *oui !* »

Il poursuit alors son discours :...

Stephen : « *Si on prend la parabole, par exemple, la pente de la corde décroit de* $+\infty$ *à zéro, puis croit de zéro à* $+\infty$ »

Il effectue un schéma en même temps qu'il parle, et désigne différentes cordes.

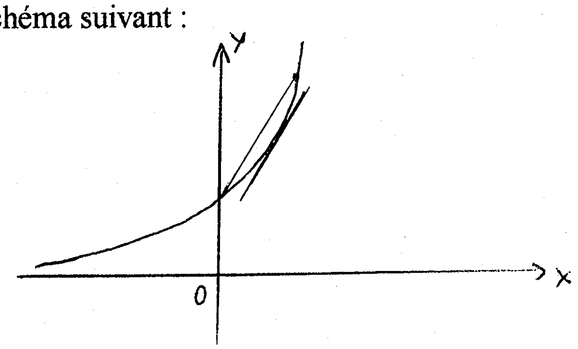
Nous-mêmes : « *D'accord ! Et la fonction* α_0 ? »

Stephen : « *C'est pareil !* »

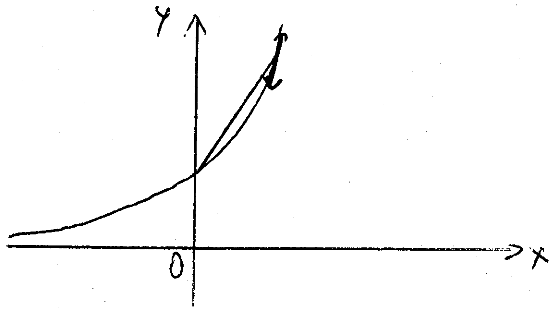
Nous-mêmes : « *Non, la fonction* $x \rightarrow x^2$ *est décroissante sur R-, donc* $\alpha_0(x)$, *qui est le coefficient directeur de la corde, est négatif sur R- et se distingue de la pente ;* $\alpha_0(x)$ *est strictement croissante sur R-, car pour x très négatif,* $\alpha_0(x)$ *est très négatif. Pour l'exponentielle, il n'y a pas ce problème ;* $\alpha_0(x)$ *s'identifie à la pente puisque la fonction est partout croissante.* »

Cette parenthèse étant refermée, on en revient à la situation de l'atelier. Chacun semble admettre désormais que la fonction est strictement croissante avant et après zéro.
Les étudiants se penchent donc sur le problème du signe de l'expression $(\alpha_0(x)-f'(x))$.

Béatrice : « *La tangente est toujours en dessous de la corde.* »
Elle a produit le schéma suivant :



Sylvain : « *Non, regarde, la corde a une pente inférieure à celle de la tangente !* »
Il effectue le tracé suivant :



Béatrice : « *Ah oui... C'est pas les droites qu'il faut regarder, c'est les pentes !* »

Leslie : « *Et pour les valeurs de x négatives ?* »

Sylvain : « *C'est très plat. Pour x négatif, la courbe croit doucement... les tangentes sont presque confondues avec les cordes, alors que pour les x positifs, c'est nettement différent. On n'arrive pas à bien voir, mais bon, pour moi,* $\alpha_0(x)$ *est inférieur à* $f'(x)$ *partout.* »

Nous-mêmes : *« Vous êtes sûr ? »*

Leslie : *« Non, en fait pour les x positifs, $\alpha_0(x)$ est inférieur à f'(x), mais pour x négatif, c'est le contraire ! On a f'(x) qui devient inférieur à $\alpha_0(x)$! »*

Smail : *« Pour les x négatifs, le numérateur (f(x)-f(0)) est négatif ! C'est bizarre... »*

Leslie : *« Non, parce que le dénominateur aussi est négatif, c'est x ! Donc $\alpha_0(x)$ est strictement positif même pour x négatif... »*

Nous leur demandons de tracer à présent, sur un même graphique, l'allure des courbes représentatives de α_0 et f '. Ils tentent alors d'effectuer une étude de la fonction α_0 dans le cas de l'exponentielle, au lieu de se contenter d'appliquer les résultats qu'ils viennent d'obtenir en raisonnant graphiquement.

Nous-mêmes : *« Vous avez déjà commencé la troisième question ? »*

Sylvain : *« Non, on essaye d'étudier le signe de la dérivée de la fonction $(e^x-1)/x$ pour faire son tableau de variations... »*

Nous-mêmes : *« Mais pourquoi n'utilisez vous pas ce que vous venez de faire ? »*

(...)

Sylvain : *« Ben... oui, effectivement. Mais c'est pas très rigoureux... et on n'a pas tout. Par exemple, on n'a pas les limites à l'infini... »*

Nous-mêmes : *« Si ! Vous auriez pu aussi les obtenir graphiquement,... et de toutes façons, ce n'est pas le tableau de variations qui donne les limites ! »*

Stephen : *« Oui, mais c'est pas rigoureux comme méthode ! »*

Nous-mêmes : *« On vous demande juste une allure pour les deux courbes de f' et de α_0, pour ce qui est de la preuve rigoureuse, elle fait l'objet de la troisième question... »*

Ils lisent l'énoncé de la troisième question. Puis nous en revenons au tracé de l'allure des deux courbes à partir des informations obtenues par interprétation graphique...

Nous-mêmes : *« On a vu que α_0 est strictement croissante sur R_-^* et R_+^*. Quelles sont ses limites en $+\infty$ et $-\infty$? Regardez l'évolution des pentes. »*

Stephen : *« En $-\infty$, ça vaut zéro... et en $+\infty$, ça vaut $+\infty$... »*

Sylvain : *« Oui ! Et en zéro, f'(0) = 1, donc intuitivement on peut dire qu'en 0^+ et 0^-, $\alpha_0(x)$ vaut 1. »*

Nous-mêmes : *« Très bien. En fait il y a un prolongement par continuité en 0 pour la fonction α_0. Bon, on peut donc tracer sa courbe, maintenant. »*

Ils tracent assez correctement une allure de courbe pour α_0.

Nous-mêmes : *« Bon... et pour f' maintenant ? »*

Smail : *« C'est la même forme de courbe, f' c'est égal à f donc c'est l'exponentielle. »*

Nous-mêmes : *« Oui, d'accord... mais est-ce que l'on ne peut pas être plus précis pour positionner la courbe de f' par rapport à celle de α_0 ? »*

Leslie : *« Si ! Tout à l'heure on a vu le signe de $(\alpha_0(x) - f'(x))$ selon x... On peut en déduire que la courbe de α_0 est au-dessus de celle de f' pour les x négatifs et en dessous pour les x positifs ! »*

Sylvain : *« Oui, et en zéro les deux courbes se croisent. »*

Nous-mêmes : *« Bon, vous pouvez passer à la question suivante... »*

Question A/3°) :

Ils calculent correctement la dérivée de α_0, trouvent $(\alpha_0)'(x) = (xe^x - e^x + 1) / x^2$, puis tentent d'étudier le signe de cette dérivée...

Stephen : *« Il faut d'abord résoudre l'équation : $xe^x - e^x + 1 = 0$. »*

Sylvain : *« Il y a zéro comme racine évidente, et pour x=1, $xe^x - e^x + 1$ est égal à 1. »*

Leslie : « *Cela ne sert à rien de prendre des valeurs particulières ! Il faut déterminer le signe de* $(\alpha_0)'(x)$ *en tout point…* »
Sylvain : « *Et si on étudiait* $(\alpha_0)'(x)$ *divisé par* e^x, *plutôt que* $(\alpha_0)'(x)$ *?* »
Leslie : « *C'est pas plus facile !* »
Sylvain (après avoir transformé l'expression) : « *Non, tu as raison…* »
Smail (il écrit) : « *Moi j'ai trouvé un truc ! On a :* $(\alpha_0)'(x) = (f'(x)-\alpha_0(x)) / x$ »
Il explique aux autres le détail de son calcul…
Sylvain : « *Ouais, c'est pas mal ça, mais qu'est-ce qu'on peut en faire ?* »
Smail (réfléchit) : « *Ben… on a vu tout à l'heure que* $f'(x)$ *est supérieur à* $\alpha_0(x)$ *pour x strictement positif, et inférieur pour x négatif.* »
Sylvain : « *Ah oui, c'est pas bête ! On peut retrouver le signe de* $(\alpha_0)'(x)$ *avec ça !* »
Nous-mêmes : « *Oui, mais le signe de* $(f'(x)-\alpha_0(x))$ *n'a pas encore été établi de façon rigoureuse. Comment faites vous pour cela ?* »
Sylvain : « *Ah oui, … dommage !* »
Nous intervenons à nouveau, car l'idée de Smail semble perdre alors à leurs yeux tout intérêt…
Nous-mêmes : « *Son idée est utilisable : si on arrive à prouver la conjecture sur le signe de* $(f'(x)-\alpha_0(x))$, *on pourra s'en servir pour démontrer alors que* $(\alpha_0)'(x)$ *est positif en tout x réel… Vous verrez que cette idée nous servira un peu plus loin dans le cas général.* »
Smail (plus assuré) : « *Oui, quand x est positif,* $(f'(x)-\alpha_0(x))$ *est positif, donc* $(\alpha_0)'(x)$ *est positif, et quand x est négatif,* $(f'(x)-\alpha_0(x))$ *est négatif, mais* $(\alpha_0)'(x)$ *est encore positif comme quotient de deux négatifs !* »
Nous-mêmes : « *D'accord. Mais comme pour l'instant on ne voit pas comment prouver le résultat sur le signe de* $(f'(x)-\alpha_0(x))$, *on va quand même établir la croissance de* α_0 *par une étude de cette fonction…* »

Ils reprennent donc l'expression de $(\alpha_0)'(x)$ sous sa forme particulière : $(xe^x - e^x + 1) / x^2$ et tentent à nouveau d'en étudier le signe.
Stephen : « *Moi j'ai trouvé que* $(\alpha_0)'(x)$ *est positif pour* e^x *supérieur à* $1 / (1-x)$*… mais ça donne rien !* »
Sylvain : « *Attends, y a quelque chose qu'on peut dire : le numérateur de* $(\alpha_0)'(x)$ *est égal à* $(x-1).e^x + 1$, *donc pour x supérieur ou égal à 1, c'est supérieur ou égal à 1, donc c'est positif, donc* α_0 *est croissante sur* $[1, +\infty[$. »
Leslie : « *D'accord, mais ça ne traite pas tout le problème ! Est-ce qu'on ne pourrait pas redériver le numérateur pour trouver le signe de* $(\alpha_0)'(x)$ *?* »
Nous-mêmes : « *Essayez de mettre en œuvre votre idée… en tous cas vous avez raison, il faudrait essayer de trouver une méthode qui déblaye l'ensemble du problème et pas seulement sur* $[1, +\infty[$. »
Stephen : « *On peut faire un développement limité, par exemple…* »
Nous-mêmes : « *Attention ! Un développement limité, c'est local… est-ce que le problème posé est de nature locale ?* »
(…)
Nous-mêmes : « *Est-ce qu'on est en train de calculer la limite en un point précis par exemple ?* »
Sylvain : « *Non, donc c'est pas un développement limité qu'il faut faire.* »
(…)
Leslie, pendant ce temps là, a commencé à mettre en application son idée.

Elle a posé $g(x) = xe^x - e^x + 1$, étudié le signe de $g'(x) = xe^x$ sur R, en a déduit que g est décroissante sur R-, croissante sur R_+. Nous lui demandons de dresser le tableau des variations de g, puis d'indiquer la valeur du minimum en 0. Comme $g(0) = 0$, elle voit donc que g est positive sur R, et que par suite, $(\alpha_0)'$ l'est sur R_-^* et R_+^*.
Sur notre demande, elle réexplique la méthode et les calculs à ses camarades. Le groupe en déduit donc que α_0 est strictement croissante sur R_-^* et R_+^*.
(...)
Sylvain : « *Mais maintenant, si on prend l'égalité de Smail, $(\alpha_0)'(x) = (f'(x)-\alpha_0(x)) / x$, est-ce qu'on peut pas en déduire le signe de $f'(x)-\alpha_0(x)$?* »
Nous-mêmes : « *Si, c'est une très bonne idée ! Cela va nous éviter une seconde étude de fonction !... Essayez de mettre en œuvre votre idée et de l'expliquer aux autres.* »
Sylvain : « *Comme $(\alpha_0)'(x)$ est positif, si x est positif, $f'(x)-\alpha_0(x)$ est positif...* »
Nous-mêmes : « *Oui, et si x est négatif ?* »
Sylvain : « *Ben,... $(\alpha_0)'(x)$ est toujours positif, donc $f'(x)-\alpha_0(x)$ est négatif... ah oui, ça marche !* »
Le groupe passe donc à la partie B.

Question B/1°) :
Cette question pose un problème de dévolution de la tâche. Les étudiants comprennent mal que l'on attend d'eux une approche intuitive à partir de la caractérisation graphique des fonctions à croissance forte (en termes de pentes). Ils semblent avoir un peu oublié le travail réalisé à ce sujet lors de la première séance d'atelier. Ils tentent directement une démonstration des deux conjectures dans le cas général. Nous les laissons faire, une part importante du temps consacré à cette séance d'atelier étant déjà dépensée.

Question B/2°) :
Smail : « *On a vu que $f'(x)$ est supérieur à $\alpha_0(x)$ pour x positif, et inférieur pour x négatif...* »
Stephen : « *Oui, mais il faut le démontrer pour toutes les fonctions à croissance forte* »
Sylvain (lisant l'indication du texte) : « *Quel résultat je connais, liant le taux d'accroissement et le nombre dérivé ?...* »
Les autres étudiants du groupe semblent assez circonspects...
Sylvain : « *Ben... y a limite du taux d'accroissement égale le nombre dérivé... mais ça m'étonnerait que ce soit ça ! Ce serait trop simple...* »
Nous-mêmes : « *C'est normal que vous pensiez à cela, mais c'est plutôt une définition qu'un résultat ; l'énoncé parle de résultat...* »
Leslie : « *Il y a le théorème des accroissements finis !* »
Sylvain : « *Ah oui, c'est sûrement ça ; on l'a vu en cours cette année...* »
Smail : « *On peut prendre l'inégalité des accroissements finis, plutôt !* »
Sylvain : « *Tu crois ? Non, c'est le théorème à mon avis...* »
Nous-mêmes : « *Vous pouvez chercher chacun de votre côté, par le théorème ou les inégalités des accroissements finis... les deux pistes sont bonnes.* »
A partir de là, le groupe se scinde en deux sous-groupes ; Sylvain, Leslie et Béatrice essayent de raisonner à partir du théorème des accroissements finis, Smail et Stephen tentent, eux, d'utiliser les inégalités des accroissements finis.
(...)
Sylvain (à Leslie) : « *Il faut appliquer le théorème à quelle fonction, f ou α_0 ?* »
Leslie : « *La fonction f... je crois !* »

Ils commencent par écrire la formule des accroissements finis dans le cas général, entre deux points quelconques a et b : f(b)-f(a) = f '(c).(b-a). Après quelques instants de réflexion, chacun ayant écrit cette formule, Sylvain fait une proposition :

Sylvain (il écrit) : *« On prend x pour b et 0 pour a... ça donne : f(x)-f(0) = f'(c).(x-0) »*

Leslie (elle écrit aussi) : *« Oui, donc on a : $\alpha_0(x) = f'(c)$. »*

Sylvain : *« ... Ah oui, et comme f' est croissante, α_0 est croissante, c'est bon ! »*

Leslie (un peu hésitante) : *« ... Oui, c'est ça... je pense... mais c'est la première conjecture, alors qu'on demande dans l'énoncé de démontrer d'abord la seconde. »*

Comme personne ne remet cependant en cause ce raisonnement, nous intervenons :

Nous-mêmes : *« Attention, vous avez obtenu $\alpha_0(x) = f'(c)$, et non pas $\alpha_0(x) = f'(x)$. Est-ce que cela ne pose pas un petit problème tout de même, de dire que α_0 est strictement croissante comme f' ? Où se situe c ? »*

(...)

Sylvain : *« ... c est entre 0 et x. On peut écrire le TAF entre 0 et x_1, puis entre 0 et x_2... »*

Il écrit...

Sylvain : *« On obtient $\alpha_0(x_1) = f'(c_1)$, et $\alpha_0(x_2) = f'(c_2)$, avec c_1 entre 0 et x_1 et c_2 entre 0 et x_2, disons 0 inférieur à c_1 inférieur à x_1 et 0 inférieur à c_2 inférieur à x_2 »*

Nous-mêmes : *« Cela vous donne quoi, alors ? »*

Sylvain : *« Ben... si par exemple on a x_1 strictement inférieur à x_2, on a c_1 strictement inférieur à c_2 donc comme f' est croissante, α_0 est croissante ! »*

Nous-mêmes : *« Pourquoi dites vous que x_1 strictement inférieur à x_2 implique c_1 strictement inférieur à c_2 ?... Si vous prenez deux nombres a et b, sachant que a appartient à [0,1] et b appartient à [0,2], vous pouvez en déduire que a est forcément inférieur à b ? »*

Sylvain : *« Ben,... non ! Et si on prend c entre $x-\varepsilon$ et $x+\varepsilon$? »*

Nous-mêmes : *« De toutes façons il faudra fixer ε, même très petit ; donc même dans ce cas vous ne pourrez identifier f'(c) avec f'(x) ! »*

(...) Le groupe semble assez désorienté. Nous essayons à nouveau de l'aider.

Nous-mêmes : *« Vous avez dit : $\alpha_0(x) = f'(c)$, pour c entre 0 et x, d'accord ? »*

Ils acquiescent.

Nous-mêmes : *« Bon ! Prenons x strictement positif, par exemple... Est-ce que l'on ne peut pas comparer f'(c) avec f'(x) ? »*

Leslie : *« On a : f'(c) strictement inférieur à f'(x) dans ce cas. »*

Nous-mêmes : *« Donc par rapport à la conjecture sur le signe de $(\alpha_0(x)-f'(x))$, que peut-on dire ? »*

(...)

Sylvain : *« Que $(\alpha_0(x)-f'(x))$ est négatif pour x positif, car $\alpha_0(x)$ est inférieur à f'(x). »*

Leslie : *« Et pour x négatif, c'est le contraire ! »*

Nous-mêmes : *« Voilà ! Parce que, pour x négatif, on a cette fois x inférieur à c, lui-même inférieur à 0. »*

Pendant ce temps, Smail et Stephen ont également cherché à mettre en œuvre leur idée d'application des inégalités des accroissements finis. Nous les avons un peu aidés au début, avant de concentrer notre attention sur le travail précédent, de Sylvain, Leslie et Béatrice...

Smail a écrit, avec l'aide de Stephen : $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$ si pour tout $x \in [a,b]$ $m \leq f'(x) \leq M$. Nous lui confirmons que cette proposition est correcte.

Stephen : *« Que valent m et M ici ? »*

Smail : « *Si on prend [0,x] pour [a,b], m c'est f'(0) et M c'est f'(x) !* »
Nous-mêmes : « *Oui, mais pourquoi ?* »
Smail : « *...Ah oui ! Parce que f' est croissante !* »
Nous-mêmes : « *D'accord !* »
Il écrit alors : $x.f'(0) \leq f(x)-f(0) \leq x.f'(x)$, puis $f'(0) \leq \alpha_0(x) \leq f'(x)$.
Nous-mêmes : « *Attention ! Cela ne pose pas de problème de diviser ainsi par x les inégalités ?* »
Stephen : « *Il faut que x soit positif !* »
Nous-mêmes : « *Oui, donc il faut que vous traitiez maintenant l'autre cas, c'est-à-dire le cas x négatif !* »
Stephen propose d'écrire pour x strictement négatif : $f'(0) \geq (f(x)-f(0))/x \geq f'(x)$ en intervertissant simplement le sens des inégalités. Nous les laissons réfléchir à cela, en suggérant tout de même que Stephen n'a pas produit un raisonnement correct, même si le résultat final l'est.
Nous-mêmes : « *Non, ce n'est pas si simple !* »
Smail : « *Quand x est négatif, le b ce n'est plus x, c'est zéro ! On a : a=x et b=0.* »
Stephen : « *Pourquoi ? C'est pareil ! On peut prendre a=x et b=0 ou le contraire dans la formule...* »
Smail : « *Non ! La formule est valable pour x appartenant à [a,b], donc a est inférieur à b...* »
Stephen : « *Tu crois ?* »
Smail (moins sûr de lui) : « *Oui, c'est le théorème de terminale.* »
Ils n'arrivent pas vraiment à trancher cette question. Smail tente de réécrire la formule en tenant compte du fait que $a = x < b = 0$: $f'(0).(0-x) \leq f(0)-f(x) \leq f'(x).(0-x)$.
Stephen : « *Oui, mais comme –x est positif, les inégalités ne changent pas de sens. On retrouve la même chose que tout à l'heure ! Ca ne va pas !* »
Smail : « *Si, parce que maintenant on a f(0)-f(x) au lieu de f(x)-f(0) !* »
Ils réécrivent les inégalités, et constatent que c'est Stephen qui a raison. Ils cherchent encore un peu, puis attendent notre aide.

Smail : « *Y a une erreur de calcul ! On trouve $\alpha_0(x) \leq f'(x)$ pour x strictement négatif aussi.* »
Nous-mêmes : « *C'est parce que vous vous êtes trompé dans les valeurs de m et M, qui changent aussi pour x négatif. Que vaut m pour x négatif ?* »
Smail regarde le schéma de la courbe exponentielle.
Smail : « *Ah oui, pour x négatif, on a : m=f'(x) et M=f'(0), donc c'est bon !* »
Il écrit l'encadrement : $f'(x).(0-x) \leq f(0)-f(x) \leq f'(0).(0-x)$, puis l'encadrement : $f'(x) \leq (f(0)-f(x))/(0-x) \leq f'(0)$, et constate que $(f(0)-f(x))/(0-x) = \alpha_0(x)$.
Sylvain, Leslie et Béatrice, qui ont observé la fin du travail de Smail et Stephen, préfèrent leur solution, qu'ils jugent plus simple.
Nous-mêmes : « *Vous avez peut-être raison. Les inégalités des accroissements finis découlent du théorème. Il vaut mieux remonter à la source.* »

La fin ne leur pose plus de problème dès lors que nous leur suggérons de généraliser l'égalité : $(\alpha_0)'(x) = (f'(x)-\alpha_0(x)) / x$ établie pour la fonction exponentielle. De l'étude du signe de $(f'(x)-\alpha_0(x))$ selon x, ils déduisent que $(\alpha_0)'(x)$ est strictement positif pour tout x non nul, donc que α_0 est strictement croissante sur R_-^* et R_+^* avec existence d'un prolongement par continuité en zéro ($\lim_{x\to 0} \alpha_0(x) = f'(0)$).

La partie C est à peine entamée, faute de temps. Stephen tente seulement d'effectuer un développement limité en 0 de la fonction g. Smail reconnaît un taux d'accroissement et en déduit que $\lim_{x \to 0} g(x) = H(0) = 1$.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

RESUME :

Les problèmes de transition lycée-université en mathématiques jouent un rôle crucial dans le contexte actuel de la massification de l'enseignement. Cette thèse étudie les microruptures techniques et conceptuelles liées à la transition terminale S/ DEUG Sciences, dans le domaine de l'analyse et précisément pour la notion de dérivée et son environnement. Nous fondant sur l'hypothèse selon laquelle l'évolution du rapport à l'analyse n'est pas réductible au passage d'une analyse algébrisée à une analyse formalisée, nous mettons ici en relief les ruptures liées aux systèmes de pratiques différents émergeant des deux cultures, du lycée et de l'université. Nous menons d'abord une étude comparée d'exercices de manuels de lycée et de feuilles de travaux dirigés de diverses universités. Une grille multidimensionnelle d'analyse nous aide à classer précisément les informations recueillies. L'évolution du degré d'autonomie sollicité dans le travail mathématique apparaît comme un facteur essentiel de la transition. Suit une étude des rapports personnels à la dérivée d'étudiants entrant en DEUG, via l'analyse de leurs productions à des tests écrits. Les tâches sollicitées, réalisables théoriquement à partir des seules connaissances du lycée, ont été choisies pour leur caractère non routinier dans cette institution. Des difficultés transversales (situations générales, monde fonctionnel inhabituel) font que ces tâches se situent déjà à la transition des deux cultures. Les comportements par adaptation des étudiants laissent entrevoir des possibilités de médiations. L'expérimentation d'ateliers en petits groupes, sur des questions centrales de la transition (statut des définitions, étude d'une classe de fonctions…), permet de cerner les problèmes de dévolution de tâches complexes et de jauger les possibilités de gestion des microruptures locales. Elle confirme l'existence d'un vide didactique à prendre en charge dans la transition.

MOTS CLES :

mathématiques,
didactique,
analyse,
dérivée,
transition lycée-université,
rapports institutionnels,
microruptures,
flexibilité cognitive.

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la publication : R. CORI
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Janvier 2000
ISBN : 2-86612-188-0